DIFFUSION DANS UN TUYAU

Communication
présentée au Comité technique
de la Société Hydrotechnique de France
le 21 novembre 1968

PAR P. CASEAU * ET
R. DENIAU *

Introduction

PREMIÈRE PARTIE

I. — Définitions et propriétés générales

Le texte de cette communication se subdivise en trois parties :

- dans la première partie, on expose les raisons qui ont conduit à entreprendre une étude expérimentale de diffusion de masse dans une conduite circulaire, en dégagant d'une part les hypothèses que l'on peut introduire, et en montrant d'autre part comment on peut atteindre la connaissance du nombre de Stanton à partir de la transformée de Laplace de la courbe donnant l'évolution des concentrations à la paroi dans le cas d'une injection pariétale localisée;
- la seconde partie a trait à l'expérimentation proprement dite : après une description de l'installation et d'un modèle de diffusion, les résultats expérimentaux et ceux du modèle donnent lieu à une discussion;
- la troisième partie complète l'exposé, en ce sens qu'on s'y efforce d'élargir le sujet en soulignant l'intérêt que peuvent présenter les considérations développées dans les deux premières parties pour aborder certains problèmes relatifs aux échangeurs thermiques.

Le but de cet exposé est de présenter une série d'expériences sur la diffusion de masse dans un écoulement turbulent. Etant donnée une grandeur scalaire quelconque Γ nous pouvons écrire, comme dans la référence [1], l'équation d'évolution locale de Γ en l'absence de sources :

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \text{div}(\vec{\Gamma} \vec{u}) = \text{div}(D_{\Gamma} \text{grad } \Gamma) \quad (1)$$

et si, dans l'écoulement turbulent, nous séparons les composantes moyennes et les fluctuations :

$$\Gamma = \bar{\Gamma} + \gamma' \quad \vec{u} = \vec{U} + \vec{u}'$$

nous obtenons l'équation locale moyenne :

$$\frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial t} + \text{div}(\bar{\Gamma} \cdot \vec{U}) + \overline{\text{div}(\gamma' \vec{u}')} = \text{div}(D_{\Gamma} \text{grad } \bar{\Gamma}) \quad (2)$$

Ainsi, pour l'équation de la chaleur, nous aurons :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \text{div}(\theta \vec{U}) = \text{div } \vec{q} \quad (3)$$

avec :

$$\vec{q} = -\overline{\theta \vec{u}'} + \frac{\lambda}{\rho C_p} \text{grad } \theta$$

Le flux d'énergie proprement dit est $\vec{Q} = \rho C_p \vec{q}$

* Direction des Etudes et Recherches, Electricité de France, Chatou.

Pour la diffusion de masse d'un constituant, nous aurons :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \text{div}(\vec{C}\vec{U}) = \text{div} \vec{q}_m \quad (4)$$

$$\vec{q}_m = -c\vec{u}' + D_m \text{grad } C$$

Dans tout ce qui suivra, nous supposons que la grandeur qui diffuse (θ ou C) ne modifie ni les propriétés du fluide, ni la structure de l'écoulement. Il faut pour cela que les variations de température ou de concentration (et les flux $\vec{q}$ ou $\vec{q}_m$ associés) soient faibles.

Il résulte de cette hypothèse restrictive que le phénomène de diffusion est alors linéaire, bien que les lois qui régissent l'écoulement turbulent lui-même ne le soient pas. Si aux champs de température $\theta_1(x, y, z)$ et $\theta_2(x, y, z)$ sont associés, pour un même écoulement, les flux $\vec{q}_1(x, y, z)$ et $\vec{q}_2(x, y, z)$, le flux $(\vec{q}_1 + \vec{q}_2)$ sera associé au champ $(\theta_1 + \theta_2)$.

Nous considérons comme établi ([1], [2]) que cette relation linéaire entre flux (ou sources) et grandeurs dépend de la structure turbulente de l'écoulement et du nombre sans dimension $(U_\infty L/D_f)$ mais ne dépend pas de la quantité nature de la grandeur qui diffuse. Plus précisément, deux problèmes de diffusion de masse et de chaleur seront considérés comme équivalents si :

$$\frac{U_\infty L}{D_m} = \frac{U_\infty L}{\lambda/\rho C_p} \quad (5)$$

Alors θ_∞ et C_∞ étant une température et une concentration de référence (valeurs à l'infini aval par exemple), si :

$$\frac{\theta}{\theta_\infty} = \frac{C}{C_\infty} \quad (6)$$

on aura :

$$\frac{\vec{Q}}{\rho C_p \theta_\infty U_\infty} = \frac{\vec{q}}{\theta_\infty U_\infty} = \frac{\vec{q}_m}{C_\infty U_\infty} \quad (7)$$

II. — Diffusion dans un tuyau en régime établi

Nous allons étudier l'évolution de la température (ou de la concentration) dans un tuyau cylindrique en régime établi. Dans un tel régime, l'écoulement est invariant en translation le long de l'axe Ox (axe du tuyau) et en rotation d'un angle α autour de cet axe.

Non seulement les vitesses moyennes, mais les corrélations sont invariantes.

Par exemple, nous avons :

$$\vec{u}'(x_0, r_0) \oplus \vec{u}'(x_1, r_1) = \vec{R}(x_1 - x_0, r_0, r_1)$$

Il en résulte que si une source placée en (x_0, r_0, α_0) produit un champ de température $\theta_0(x, r, \alpha)$, la même source placée en (x_1, r_0, α_1) produira le champ :

$$\theta_1(x, r, \alpha) = \theta_0(x + x_0 - x_1, r, \alpha + \alpha_0 - \alpha_1)$$

Nous supposons en outre qu'il n'y a pas de sources dans l'écoulement et que les conditions aux limites (flux à la paroi q) sont invariantes par rotation. Dans ces conditions, l'ensemble du problème

est invariant par rotation et nous pouvons oublier complètement la coordonnée α .

La linéarité du problème nous conduit donc à poser :

$$\theta(x, r) = \int_{-\infty}^{+\infty} T(x, u, r) q(u) du$$

$T(x, u, r)$ étant le champ créé par une distribution de Dirac :

$$q(x) = \delta(x - u)$$

Ce que nous venons de dire sur l'invariance en x montre alors que $T(x, u, r)$ ne dépend que de $(x - u)$:

$$\theta(x, r) = \int_{-\infty}^{+\infty} T(x - u, r) q(u) du \quad (8)$$

Cette formule n'est valable *a priori* que lorsque $q(u)$ est nul en dehors d'un domaine fini ou du moins tend rapidement vers 0 lorsque $x \rightarrow \pm \infty$. Or nous verrons que de nombreux cas exigent qu'on lève cette restriction. Pour généraliser facilement l'équation (8) nous introduirons une hypothèse supplémentaire qu'il est facile de justifier avec les ordres de grandeur contenus dans [1] ou [2]. Nous admettrons que les flux axiaux q_x sont faibles par rapport aux flux transversaux. Nous aurons alors :

$$\left[\int_0^R 2\pi U \theta r dr \right]_{x_1}^{x_2} = \bar{\omega} \int_{x_1}^{x_2} q dx$$

où :

$\bar{\omega}$ périmètre du cylindre (de section S);
 q flux à la paroi.

Donc, θ_m étant la température moyenne et U_∞ la vitesse moyenne, nous aurons :

$$\left[\theta_m \right]_{x_1}^{x_2} = \frac{\bar{\omega}}{S U_\infty} \int_{x_1}^{x_2} q dx$$

En particulier, si $q(x) = \delta(x)$ nous aurons :

$$\theta_m = a = \frac{\bar{\omega}}{S U_\infty} \quad \text{pour } x > 0$$

Nous poserons alors :

$$F(x, r) = T(x, r) - a$$

Et, comme lorsque $x \rightarrow \infty$, $T(x, r) \rightarrow \theta_m = a$, nous voyons que $F(x, r) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow \infty$. Dans ces conditions on peut montrer facilement que

si : $\left\{ \begin{array}{l} \theta(x) \\ q(x) \end{array} \right\} \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow \infty$ et si : $\int_x^{+\infty} q(x) dx < \infty$

alors :

$$\theta = -\theta_\infty \int_x^\infty q(u) du + \int_{-\infty}^{+\infty} F(x - u, r) q(u) du \quad (A)$$

Si : $\left\{ \begin{array}{l} \theta(x) \\ q(x) \end{array} \right\} \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow -\infty$ et si : $\int_{-\infty}^x q(x) dx < \infty$

alors :

$$\theta = \theta_\infty \int_{-\infty}^x q(u) du + \int_{-\infty}^{+\infty} F(x - u, r) q(u) du \quad (B)$$

L'avantage des équations (A) et (B) par rapport à (8), c'est qu'il n'est pas nécessaire que $q(x) \rightarrow 0$ des deux côtés. L'étude des échangeurs montre qu'on est toujours dans le domaine de validité de (A) ou (B) mais jamais dans celui de (8).

III. — Rôle des modèles théoriques de diffusion

On peut conclure de l'examen des équations (A) et (B) que la connaissance de la fonction $F(x, r)$ suffit à résoudre tous les problèmes vérifiant les hypothèses déjà présentées à savoir : faibles variations de température (propriétés constantes) absence de sources, conditions de flux à la paroi dépendant seulement de x . Cette fonction peut être obtenue expérimentalement et c'est le but de l'expérience présentée dans la deuxième partie. Nous avons obtenu le champ $F(x, r)$, en nous intéressant plus particulièrement à la valeur de F à la paroi :

$$\Phi(x) = F(x, r=R)$$

En effet les problèmes de transfert thermique font intervenir plus particulièrement la température de paroi.

Ce que nous venons de voir est indépendant du modèle de diffusion que l'on peut adopter. Il est néanmoins intéressant d'étudier un tel modèle, pour deux raisons :

1. La condition aux limites $q = \delta(x)$ est impossible à réaliser rigoureusement. En pratique on effectuera une injection de masse sur un intervalle Δx assez petit. Il faut donc être à même de vérifier que cette injection a été faite correctement. D'autre part, il est difficile de mesurer les concentrations près de la paroi : cette difficulté joue un grand rôle lorsque x est faible, car $C(x, r)$ est alors non nul au voisinage de la paroi seulement, et varie beaucoup avec r . Il est donc utile d'avoir un modèle valable au moins au voisinage de l'injection pour suppléer aux difficultés expérimentales.

2. Il est très important — nous le verrons au paragraphe suivant — de bien connaître l'allure asymptotique de la fonction $C(x, r)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. Or l'expérience doit être arrêtée pour x fini et, les concentrations devenant très faibles, elle ne se prête pas nécessairement très bien à l'évaluation de cette forme asymptotique. D'où la nécessité de disposer d'un modèle, valable lorsque $x \rightarrow +\infty$, qui pourra être utilisé en liaison avec les résultats expérimentaux.

IV. — Variation exponentielle de q Nombre de Stanton

Nous verrons dans la troisième partie que, dans les problèmes d'échangeurs, le flux varie de façon exponentielle. Nous avons :

ou bien : $q \sim e^{+\lambda x}$ et $\theta \rightarrow 0$ pour $x \rightarrow -\infty$

ou bien : $q \sim e^{-\lambda x}$ et $\theta \rightarrow 0$ pour $x \rightarrow +\infty$

L'application des équations (A) et (B) donne alors :

1. Si :

$$q = Q_0 e^{\lambda x}$$

$$\theta = Q_0 \left[K(\lambda, r) + \frac{a}{\lambda} \right] e^{\lambda x} \quad (9)$$

avec :

$$K(\lambda, r) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x} F(x, r) dx \quad (9A)$$

2. Si :

$$q = Q_0 e^{-\lambda x}$$

$$\theta = Q_0 \left[K(\lambda, r) - \frac{a}{\lambda} \right] e^{-\lambda x} \quad (10)$$

avec :

$$K(\lambda, r) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda x} F(x, r) dx \quad (10A)$$

Les deux relations ainsi trouvées sont d'ailleurs formellement identiques : l'équation (9) est donc valable, que λ soit positif ou négatif.

Cette équation montre donc que θ et q sont proportionnels en tout point. On appelle traditionnellement nombre de Stanton (ou de Margoulis) le nombre :

$$St = \frac{q}{U_{\infty}(\theta_p - \theta_m)}$$

où θ_p est la température à la paroi.

Comme nous savons d'après l'équation (9) que :

$$\theta_m = \frac{a}{\lambda} e^{\lambda x} Q_0$$

nous voyons que :

$$\theta_p - \theta_m = Q_0 e^{\lambda x} K(\lambda, R) = q K(\lambda, R)$$

Et donc que :

— le nombre de Stanton est indépendant de x ;

— sa valeur est donnée par :

$$St = \frac{1}{U_{\infty} K(\lambda, R)} \quad (11)$$

Il est donc très intéressant d'étudier la fonction $K(\lambda, R)$ qui est la transformée de Laplace de $\Phi(x)$. En particulier l'allure asymptotique de $\Phi(x)$ détermine les pôles de $K(\lambda, R)$ c'est-à-dire les zéros du nombre de Stanton. Si on obtient :

$$\Phi(x) \sim C_1 e^{-\lambda_1 x} + C_2 e^{-\lambda_2 x} + \dots \quad \text{pour } x \rightarrow \infty$$

alors $K(\lambda, R)$ aura un pôle pour $\lambda = \lambda_1$, et $\lambda = \lambda_2$ etc.

Au voisinage de ce pôle on aura :

$$K(\lambda, R) = \frac{C_1}{\lambda - \lambda_1} \quad \text{et} \quad St = \frac{\lambda - \lambda_1}{U_{\infty} C_1}$$

c'est-à-dire que l'allure de la fonction $St(\lambda)$ est liée au développement asymptotique de $\Phi(x)$. Comme nous l'avons dit au paragraphe précédent, il est intéressant de disposer d'un modèle numérique qui soit valable pour $x \rightarrow \infty$ (ce qui correspond à $St(\lambda)$ pour $\lambda \rightarrow 0$).

I. — Description de l'installation

(fig. 1)

Elle se compose essentiellement d'un tube cylindrique de 21 m de long et de diamètre $D = 30,3$ cm dans lequel l'air ambiant est aspiré à une vitesse moyenne voisine de 15 m/s.

Dans le sens de l'écoulement, on peut distinguer :

a) La zone d'établissement de régime.

Sa longueur est de $50 D$ (15 m). Comme tout le reste du tuyau, sections de mesure et d'injection mises à part, elle est constituée d'éléments de P.V.C. (chlorure de polyvinyle) très rigides et assemblés par un système de brides et joints encastrés assurant le moins de discontinuité possible à la paroi. A la sortie de cette zone, on peut admettre que l'écoulement est en régime turbulent établi, avec une vitesse moyenne de 14,75 m/s, qui correspond à un nombre de Reynolds : $Re = 291\,000$.

b) La section d'injection du CO_2 .

Le gaz carbonique est détendu à 3 kg/cm^2 avant de pénétrer par 4 orifices disposés à 90° les uns des autres, dans une chambre de tranquillisation de forme annulaire. Il doit ensuite contourner un déflecteur puis traverser un écran de feutre maintenu par une tôle perforée avant de pénétrer dans la veine par une fente périphérique de largeur réglable entre 0 et 2 mm. Le débit de CO_2 injecté a toujours été voisin de 1 l/s, ce qui correspond à une vitesse d'injection de 0,5 m/s pour une largeur de fente de 2 mm. L'ensemble de cette section est construit en Dural.

c) La veine d'expérience.

De 6 m de long, elle est constituée par des éléments mesurant pour la plupart 400 mm, de même construction que ceux de la zone de mise en régime. En fait la longueur de la veine est variable, car c'est la section d'injection qui se déplace par rapport à la section de mesures, par diminution ou augmentation du nombre de ces éléments.

d) La section de mesure.

La sonde de prélèvement est coudée à angle droit, la partie longitudinale étant de 50,1 ou de 150 mm, la partie transversale (radiale) étant fixée sur un support mobile profilé de longueur $2 D$ qui traverse la conduite selon un diamètre. L'ensemble

de cette section peut tourner autour de l'axe, si bien que l'on peut à tout moment contrôler la symétrie de la répartition du CO_2 dans la veine. Le diamètre intérieur des sondes est de 0,5 mm.

e) Le col sonique et le ventilateur.

La réalisation d'un débit constant est obtenue par un col sonique. Réalisé en matériau plastique par moulage, ce col comporte un diffuseur d'angle au sommet 7° qui raccorde la section d'aire minimale S_c à une section circulaire d'aire $4 S_c$. La section d'aire minimale elle-même est constituée par une partie cylindrique de longueur égale au diamètre d_c du col. Le raccordement amont se fait sans point anguleux, par un profil longitudinal en quart de cercle de rayon d_c . La cote d_c est de 8,3 cm. Le débit d'air calculé est alors de $1,08\text{ m}^3/\text{s}$.

Le ventilateur, de type centrifuge, présente les caractéristiques suivantes : puissance de 40 ch, débit de $1,1\text{ m}^3/\text{s}$ sous 1 300 mm. C.E., vitesse de rotation, de 2 890 tr/mn.

II. — L'appareillage de mesure

1. L'analyseur de gaz « Onera 80 » (fig. 2).

C'est un analyseur de gaz par absorption dans l'infra-rouge sans décomposition spectrale. Le principe de cette méthode a été exposé en 1943 par K.F. Luft [3]. Depuis cette date, les appareils de ce type ont été largement répandus. Rappelons seulement qu'il s'agit d'une mesure différentielle d'absorption entre un rayonnement traversant un tube d'analyse parcouru par le gaz prélevé dans la conduite, et un tube parcouru par l'air ambiant. Bien entendu, les gaz sont desséchés avant d'être introduits dans l'appareil. Les avantages principaux de cette méthode de mesures sont, outre la sensibilité de l'appareil, la rapidité de réponse et l'obtention d'un signal électrique exploitable sur une centrale de mesures, ainsi qu'une lecture directe. Selon le pourcentage de CO_2 à doser, on dispose en outre de plusieurs tubes d'analyse de longueurs différentes (0,5; 2,5 ou 10 mm) ce qui permet d'obtenir plusieurs gammes de sensibilité : la gamme la plus basse va de 0 à 0,1 % de CO_2 , soit de 0 à 1 000 p.p.m. En vue du traitement automatique, les courbes d'étalonnage de chacune des gammes ont été approchées par des polynômes du second degré avec une approximation largement suffisante. La seule contrainte expérimentale a consisté en de fréquents réglages de zéro.

1/ Schéma de l'installation.

Diagrammatic rig layout.

2. Le débitmètre à flotteur rotatif.

Cet appareil, de médiocre précision absolue, n'a été utilisé sur le circuit de CO₂ que pour le repérage de la constance du débit à l'aval du détendeur lors d'une série de mesures. La détermination du débit de CO₂ a été calculée pour chaque section par intégration du champ des concentrations (multipliées par la vitesse) dans la section.

3. Les capteurs de pression et de température et la centrale de mesures.

Les capteurs de température sont des thermosondes à résistance de platine. La température est mesurée à l'extrémité amont du tuyau et à l'aval, la différence des températures entre ces deux régions n'excède pas 1 °C.

Les capteurs de pression sont des manomètres Fortier.

La centrale de mesures comporte cent voies dont une moitié environ est utilisée. Son organe de sortie est une perforatrice dont les rubans sont exploités, après transformation en cartes, sur ordinateur. Cette centrale permet d'enregistrer, outre les conditions d'essai qui sont affichées manuellement (date, numéro d'essai et d'échelle sur l'analyseur, débit, largeur de fente, coordonnées x , r et α , températures de l'air et dépression au col sonique), dix valeurs de la concentration par point de mesure.

Un premier traitement sur ordinateur permet de dégager, pour chaque section, les valeurs moyennes, maximales et minimales des concentrations mesurées en chaque point.

2/ Schéma de principe de l'analyseur ONERA 80.

Diagrammatic layout of ONERA 80 analyser.

III. — Résultats expérimentaux

1. Détermination du profil des vitesses.

Les valeurs expérimentales de la vitesse $u(r)$ sont données en une dizaine de points dans les tableaux 1 et 2 ci-contre correspondant respectivement à la zone logarithmique et à la zone centrale. Dans cette dernière zone, les valeurs de la vitesse suivent d'assez près la loi :

$$\frac{u_{\max} - u}{u_*} = 7 \left(\frac{r}{r_0} \right)^2$$

et pour la zone logarithmique, la loi :

$$u^+ = A \log y^+ + B \quad (50 < y^+ < 1\,500)$$

avec :

$$A = 5,5 \quad \text{et} \quad B = 5,1$$

et ceci en adoptant pour la vitesse de frottement u_* la valeur :

$$u_* = 0,64 \text{ m/s}$$

La mesure directe de la vitesse de frottement a été effectuée à partir de la relation donnant la différence de pression Δp entre deux sections distantes de Δx :

$$u_*^2 = \frac{R}{2\rho} \frac{\Delta p}{\Delta x}$$

La pression statique a été mesurée en trois sections d'abscisses 50, 3 600 et 6 000 mm, et les valeurs de u_* étaient de 0,612 — 0,620 et 0,635 m/s. Compte tenu de l'incertitude sur les mesures de Δp , la

Tableau 1

Tableau des valeurs expérimentales $u^+ = f(y^+)$ dans la zone logarithmique et le début de la zone centrale
 $u_* = 0,64 \text{ m/s}$

$y^+ = y \frac{u_*}{\nu}$	$y \text{ (mm)}$	$u \text{ (m/s)}$	$u^+ = \frac{u}{u_*}$	$A \log y^+ + B$
10 ²	2,41	10,25	16,0	17,1
2.10 ²	4,82	11,5	17,9	17,8
3.10 ²	7,22	11,95	18,7	18,7
5.10 ²	12,05	12,65	19,8	19,9
10 ³	24,1	13,8	21,6	21,6
2.10 ³	48,2	15,25	23,8	23,3
3.10 ³	72,2	16,2	25,3	24,2

Tableau 2

Valeurs expérimentales de la vitesse dans la zone centrale
 $u_{\max} = 17,4 \text{ m/s}$

$\frac{r}{r_0}$	u	$\frac{u_{\max} - u}{u_*}$	$7 (r/r_0)^2$
1/3	16,9	0,78	0,775
0,5	16,3	1,72	1,75
2/3	15,35	3,20	3,11
0,75	14,8	4,07	3,94

valeur adoptée n'est pas en contradiction avec les résultats de l'expérience. Elle est d'ailleurs légèrement supérieure à la valeur tirée de la loi de Karman-Nikuradze valable pour un tuyau lisse :

$$\frac{1}{\sqrt{\Lambda}} = 2 \log \text{Re} \sqrt{\Lambda} - 0,8$$

qui donne $\Lambda = 0,0145$ pour $\text{Re} = 2,91 \cdot 10^5$, d'où, avec une vitesse moyenne $U_{\text{moy}} = 14,75 \pm 0,1 \text{ m/s}$:

$$u_* = U_{\text{moy}} \sqrt{\frac{\Lambda}{8}} = 0,628 \pm 0,004 \text{ m/s}$$

L'écart par rapport à cette dernière valeur correspondrait à une rugosité absolue de l'ordre de 5μ .

2. Mesure de concentrations.

La détermination du profil des concentrations a été faite en 18 sections dont les distances à la section d'injection s'échelonnaient entre 89,5 et 6 039,5 mm.

Une série de mesures préliminaires a servi à mettre au point le dispositif d'injection du CO_2 . La réalisation d'une injection uniforme sur la circonférence de la fente a soulevé en effet quelques difficultés : il a fallu plusieurs tâtonnements pour aboutir au dispositif décrit au § I. Les dissymétries relevées dans la répartition du gaz carbonique ont été ainsi ramenées aux environs de 1 %. Par la suite, toutes les mesures de concentration ont été faites suivant deux diamètres perpendiculaires et on ne considère chaque fois que la moyenne de deux mesures. Chacune de ces deux mesures résulte elle-même de la moyenne des signaux enregistrés toutes les secondes pendant 10 secondes. Le nombre de points expérimentaux dans une section donnée varie entre 13 et 25 selon l'éloignement par rapport à la section d'injection.

Les résultats expérimentaux sont présentés sous forme de tableaux et de courbes au paragraphe V.

IV. — Résolution numérique de l'équation de la diffusion

1. Hypothèses de calcul.

L'équation de la diffusion s'écrit, en coordonnées cylindriques :

$$u \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \varepsilon \frac{\partial C}{\partial r} \right) \quad (12)$$

dans laquelle :

$C = C(x, r)$ est la concentration;

$u = u(r)$ est la vitesse;

et $\varepsilon = \varepsilon(r)$ est le coefficient de diffusion.

L'expression de la fonction $u(r)$ hors de la sous-couche visqueuse est donnée ci-dessus (II.1).

L'expression de la fonction $\varepsilon(r)$ ne peut se déterminer expérimentalement sur cette installation.

En fait :

$$\varepsilon = D + \varepsilon_q$$

où D est la diffusivité moléculaire et ε_q le coefficient de diffusion turbulente de masse. Ces coef-

ficients apparaissent lorsque l'on exprime le flux massique q_m radial sous la forme :

$$q_m = \rho (D + \varepsilon_q) \frac{\partial C}{\partial y}$$

par analogie avec les expressions de la tension de frottement τ et du flux radial de chaleur q :

$$\tau = \rho (\nu + \varepsilon_\tau) \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$q = (a + \varepsilon_H) \frac{\partial T}{\partial y}$$

dans lesquelles :

ν et a sont respectivement la viscosité cinématique ($\nu = \mu/\rho$) et la diffusivité thermique ($a = \lambda/\rho C_p$);

ε_τ et ε_H sont respectivement les coefficients de diffusion turbulente de quantité de mouvement et de chaleur.

Nous avons fait les hypothèses suivantes :

1° $D = a$.

En d'autres termes, le nombre de Prandtl ($\text{Pr} = \mu C_p / \lambda = \nu / a$) est égal au nombre de Schmidt ($\text{Sc} = \nu / D$) comme nous l'avons dit dans la première partie.

2° $\varepsilon_q = \varepsilon_H$.

Ce coefficient doit être indépendant de l'expérience effectuée. En particulier, si le flux de chaleur q est constant, nous avons :

$$\frac{T - T_p}{q} = \int_0^y \frac{dy}{a + \varepsilon_H}$$

(T_p = température à la paroi).

Donc l'étude des expériences à flux constant ou quasi constant doit donner la fonction $\varepsilon_H(r)$. On a constaté que dans ces conditions [4] on a à peu près :

$$\frac{u_* (T(y) - T_p)}{q} = \frac{1}{0,9} \cdot \frac{u}{u_*}$$

dans une zone proche de la paroi ($y^+ < 80$).

Ceci permet de préciser la valeur de ε_H dans cette zone. Au centre du tuyau, en revanche, l'analogie est peu sûre.

Finalement, nous avons adopté une courbe analogue à celle que propose Reichardt [5] (fig. 3). Les valeurs de $\varepsilon_H(r)$ pour $y^+ > 150$ sont assez sujettes à caution. Nous reviendrons d'ailleurs sur ce point dans la discussion des résultats (§ V).

2. Conditions initiales et aux limites.

La condition initiale s'écrit $C(x, y) = 0$ pour $x < 0$.

À la paroi, la condition exprimant le flux s'écrit :

$$-\frac{\partial C}{\partial y}(x, 0) = \delta(x) \quad (\delta = \text{fonction de Dirac})$$

Au centre du tuyau :

$$\frac{\partial C}{\partial y}(x, R) = 0 \quad (y = R - r)$$

Le champ des concentrations présente une singularité au point origine, ce qui est gênant pour la résolution numérique de l'équation aux dérivées partielles. Sur une idée de Lighthill [6], on lève cette difficulté en intégrant analytiquement l'équation simplifiée valable au voisinage de l'origine :

$$y^+ \frac{\partial C}{\partial x^{++}} = \frac{\partial^2 C}{\partial y^{+2}} \quad (9)$$

où :

$$x^{++} = \frac{u_0 x}{v \text{Pr}} \leq 50$$

et où on suppose :

$$\varepsilon_\tau = 0 \text{ et } u^+ = y^+$$

et la solution s'écrit :

$$C(x^{++}, y^+) = \frac{1}{3^{1/3} \Gamma(2/3)} e^{-(y^+/3x^{++})} (x^{++})^{-(2/3)} \quad (13)$$

Cette solution a été effectivement prise comme solution de l'équation (12) pour $x^{++} = 50$.

3. Méthodes aux différences finies.

C'est la méthode semi-implicite de Crank-Nicholson qui a été retenue; une méthode explicite eût conduit à des instabilités à cause de la condition $u(0) = 0$. Les indices I et J servant à désigner les mailles dans le sens des abscisses et du rayon respectivement, le passage des mailles (I, J) aux mailles (I + 1, J) s'écrit sous forme matricielle :

$$\vec{A}\vec{C} = \vec{d}$$

où : $\vec{d}$ peut être considéré comme le vecteur colonne des concentrations (*) de même premier indice I (section x);

$\vec{C}$ est le vecteur colonne des concentrations (*) de même premier indice I + 1 (section $x + \Delta x$);

A est une matrice « tridiagonale » dont les éléments s'expriment en fonction de u , r et ε . La première et la dernière ligne de A sont données par les conditions aux limites à la paroi et au centre.

L'inversion de A ne présente aucune difficulté particulière, l'algorithme utilisé étant très classique.

Il faut cependant signaler une originalité apportée à ce calcul : le changement du pas H en y : le calcul commence à la section $x^{++} = 50$ avec 200 pas en y de valeur :

$$H = \frac{R}{200} \times \frac{1}{2^N} \quad (N = 3 \text{ par exemple}).$$

Lorsque, au cours du calcul, le rapport :

$$\frac{C(I, 200)}{C(I, 1)}$$

devient inférieur à une valeur donnée M ($M = 10^{-6}$ par exemple) le nombre N est diminué d'une unité. De la sorte on peut, avec un maillage en y à nom-

(*) Ce ne sont pas en fait les concentrations, mais des grandeurs qui s'en déduisent simplement.

3/ Variation du coefficient de diffusion en fonction du rayon.

Diffusion factor vs. radius.

bre constant de mailles, améliorer la précision du calcul en limitant celui-ci à la zone où la concentration de CO_2 n'est pas négligeable. Pour $N = 0$, le calcul intéresse toute la section du tuyau.

V. — Discussion des résultats

Les tableaux 3 et 4 donnent les valeurs C des concentrations mesurées (tableau 3) et calculées (tableau 4) pour 19 valeurs de l'abscisse x et de l'ordonnée y ($y = 0$ à la paroi).

Pour en faciliter la lecture, on a représenté un faisceau de courbes (fig. 4) $C = C(x)$ pour 8 valeurs de y , ainsi que des courbes (fig. 5 à 9) $C = C(y)$ pour 5 valeurs de x comprises entre 2 et 6 m. Les valeurs C_p de la concentration à la paroi peuvent être confondues avec les valeurs de C pour $y = 0,5$ mm tant que x est supérieur à 1 m environ. La figure 10 donne les valeurs $(C_p - C_\infty)$ en fonction de l'abscisse en coordonnées semi-logarithmiques (ce mode de représentation de C_p met particulièrement en évidence les écarts entre les résultats expérimentaux et la courbe calculée, pour les grandes valeurs de x). Dans toutes ces figures, les courbes sont relatives aux résultats du calcul, et $y = R - r$.

On peut noter, au vu de ces résultats, que les points expérimentaux aberrants sont peu nombreux et se situent en quasi-totalité dans les régions où la concentration est faible (inférieure à 0,02 %). L'analyse de l'ensemble des résultats appelle les remarques suivantes :

1. Le modèle de diffusion donne de bons résultats au voisinage de l'injection. Ce fait peut paraître surprenant, car la justification de ce modèle repose

Tableau 3

Valeurs expérimentales de la concentration (en % de CO₂)
 abscisse x : distance (en mm) à partir de la section d'injection; ordonnée y : distance (en mm) à partir de la paroi

$y \backslash x$	89,5	139,5	257	439,5	657	839,5	1 239,5	1 639,5	2 039,5	2 439,5	2 839,5	3 239,5	3 640	4 039,5	4 432,5	4 832,3	5 239,5	5 639,5	6 039,5
0,5	3,4327	1,9044	1,088	0,733	0,4637	0,4503	0,2958	0,2663	0,2110	0,188	0,1687	0,1575	0,1446	0,1331	0,1278	0,1213	0,1183	0,1152	0,1127
5	0,7711	0,9746	0,8232	0,6287	0,4207	0,425	0,2827	0,2461	0,2063	0,181	0,1632	0,1561	0,1433	0,1325	0,1294	0,1219	0,118	0,1147	0,112
10	0,0372	0,2295	0,4336	0,4578	0,3515	0,3752	0,2594	0,2312	0,1962	0,18	0,1565	0,1543	0,1408	0,1315	0,1268	0,1188	0,1166	0,1136	0,111
20	0	0	0,0516	0,129	0,2124	0,2217	0,1978	0,1895	0,1696	0,1639	0,1434	0,1376	0,1319	0,1279	0,1242	0,1157	0,1146	0,1115	0,1089
30	0	0	0,0032	0,0137	0,0853	0,0925	0,1343	0,1428	0,1406	0,1368	0,129	0,1263	0,1222	0,1217	0,12	0,1136	0,1108	0,1086	0,107
40	0	0	0	0	0,0387	0,0238	0,0859	0,0975	0,1063	0,115	0,1104	0,1099	0,1097	0,1114	0,1123	0,1079	0,1065	0,105	0,1038
50	0	0	0	0	0,0129	0,0011	0,0555	0,0727	0,0861	0,0948	0,0904	0,0925	0,0959	0,1037	0,1035	0,1017	0,1012	0,1005	0,1
60	0	0	0	0	0,0048	0	0,0342	0,0531	0,0691	0,0759	0,0812	0,0852	0,0885	0,0939	0,0942	0,0949	0,0952	0,0953	0,0954
70	0	0	0	0	0	0	0,0182	0,0298	0,05	0,0665	0,0719	0,0755	0,0811	0,081	0,0833	0,0862	0,0879	0,0895	0,0906
80	0	0	0	0	0	0	0,0107	0,0184	0,0351	0,0465	0,0579	0,0632	0,0704	0,0722	0,075	0,078	0,0804	0,0827	0,0846
90	0	0	0	0	0	0	0,0079	0,0114	0,0242	0,032	0,0466	0,0511	0,0589	0,0603	0,0642	0,069	0,0733	0,077	0,0799
100	0	0	0	0	0	0	0,0061	0,0071	0,016	0,0295	0,0354	0,0408	0,0483	0,0505	0,0548	0,061	0,0659	0,0707	0,0745
110	0	0	0	0	0	0	0	0,0053	0,0106	0,0135	0,0263	0,0322	0,038	0,0413	0,0476	0,0553	0,0614	0,0664	0,071
120	0	0	0	0	0	0	0	0	0,0079	0,008	0,0204	0,0241	0,0321	0,0351	0,0409	0,048	0,0537	0,0592	0,0645
130	0	0	0	0	0	0	0	0	0,0074	0,0063	0,0162	0,019	0,0274	0,0284	0,0352	0,0429	0,0491	0,055	0,0601
140	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,0025	0,0143	0,0171	0,0235	0,0237	0,031	0,0373	0,0439	0,0504	0,0566
150	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,0128	0,0158	0,0211	0,0217	0,0285	0,034	0,0407	0,0475	0,054

Tableau 4

Valeurs calculées de la concentration (en % de CO₂)

$y \backslash x$	89,5	139,5	257	439,5	657	839,5	1 239,5	1 639,5	2 039,5	2 439,5	2 839,5	3 239,5	3 640	4 039,5	4 432,5	4 832,3	5 239,5	5 639,5	6 039,5
0,5	3,4012	2,193	1,2444	0,764	0,5386	0,4393	0,3217	0,2605	0,2229	0,1974	0,1789	0,165	0,1541	0,1455	0,1384	0,1325	0,1274	0,1231	0,1194
5	0,7137	0,8568	0,7691	0,6069	0,4661	0,3933	0,2999	0,2479	0,2142	0,1915	0,1745	0,1616	0,1514	0,1432	0,1366	0,131	0,1261	0,122	0,1185
10	0,0827	0,2428	0,3988	0,4085	0,3611	0,3244	0,2652	0,227	0,1999	0,1816	0,1673	0,1561	0,1469	0,1395	0,1335	0,1283	0,1239	0,1202	0,1169
20	0,0005	0,0099	0,1448	0,1571	0,1948	0,203	0,1958	0,1831	0,1703	0,1591	0,1499	0,1425	0,1362	0,1308	0,1262	0,1222	0,1186	0,1156	0,1129
30	0	0	0,0099	0,0526	0,0966	0,1188	0,1395	0,1431	0,1411	0,1371	0,1328	0,1286	0,1246	0,1213	0,1181	0,1154	0,1128	0,1106	0,1086
40	0	0	0,0009	0,0143	0,0414	0,0623	0,0921	0,1062	0,1122	0,1144	0,1143	0,1134	0,1122	0,1106	0,109	0,1075	0,1061	0,1048	0,1035
50	0	0	0	0,0031	0,0156	0,0296	0,057	0,0752	0,0861	0,0924	0,0961	0,0981	0,0990	0,0995	0,0993	0,0991	0,0987	0,0983	0,0978
60	0	0	0	0	0,0047	0,0118	0,0315	0,049	0,0619	0,071	0,0773	0,0818	0,0849	0,087	0,0885	0,0897	0,0904	0,091	0,0913
70	0	0	0	0	0,0013	0,0044	0,0167	0,0309	0,0435	0,0535	0,0614	0,0673	0,0719	0,0755	0,0782	0,0805	0,0823	0,0837	0,0849
80	0	0	0	0	0	0,0014	0,0082	0,0184	0,0291	0,0389	0,0471	0,054	0,0597	0,0643	0,068	0,0713	0,0739	0,0763	0,0782
90	0	0	0	0	0	0,0004	0,0036	0,0102	0,0185	0,027	0,035	0,042	0,0482	0,0537	0,0582	0,0622	0,0658	0,0688	0,0715
100	0	0	0	0	0	0	0,0014	0,0052	0,0111	0,018	0,025	0,0318	0,0383	0,044	0,0491	0,0538	0,0579	0,0616	0,065
110	0	0	0	0	0	0	0,0005	0,0024	0,0063	0,0114	0,0173	0,0236	0,0297	0,0355	0,0409	0,046	0,0508	0,055	0,0589
120	0	0	0	0	0	0	0,0001	0,001	0,0033	0,0068	0,0114	0,0167	0,0224	0,0282	0,0337	0,039	0,0442	0,0489	0,0531
130	0	0	0	0	0	0	0	0,0004	0,0017	0,0042	0,0079	0,0123	0,0175	0,0231	0,0286	0,0341	0,0394	0,0444	0,049
140	0	0	0	0	0	0	0	0,0002	0,001	0,0028	0,0057	0,0097	0,0145	0,0198	0,0252	0,0308	0,0361	0,0412	0,0462
150	0	0	0	0	0	0	0	0,0001	0,0007	0,0022	0,0049	0,0087	0,0133	0,0185	0,0239	0,0294	0,0349	0,0401	0,045

sur l'hypothèse que les variations du vecteur $\vec{C}$ restent négligeables dans un espace de grande dimension par rapport aux longueurs de corrélation lagrangiennes [1], ce qui ne semble généralement pas être le cas au voisinage d'une injection. Mais il s'agit ici d'une injection pariétale : les échelles de turbulence sont alors petites, et, par ailleurs, les profils de concentration ont une allure qui se rapproche assez vite de celle des profils obtenus dans les expériences à flux constant qui ont justement servi à étalonner le modèle de diffusion. En résumé, on peut dire qu'il y a un bon accord au voisinage d'une source placée à la paroi, alors qu'il est connu [7] que cet accord serait mauvais au voisinage d'une source placée au sein même de l'écoulement.

2. Pour les grandes valeurs de l'abscisse, l'accord est en revanche moins bon. On peut le voir en particulier sur la figure 10 où on constate que la courbe théorique est moins proche de l'horizontale C_∞ que l'ensemble des points expérimentaux, et, d'une façon plus générale, sur la figure 4, où les points expérimentaux, tout en restant assez voisins des courbes calculées, présentent une tendance commune à converger plus rapidement vers C_∞ . En d'autres termes, le modèle théorique ne « diffuse » pas suffisamment.

On peut alors penser à incriminer la fonction $\varepsilon = \varepsilon(r)$, compte tenu de la considération suivante : en considérant l'expression de l'équation de la diffusion en coordonnées cylindriques :

$$u \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \varepsilon \frac{\partial C}{\partial r} \right)$$

on voit que multiplier ε par un facteur constant k revient à multiplier x par ce même facteur en laissant ε inchangé; la solution $C(x, r)$ obtenue avant cette multiplication devient alors la solution au point : $(x/k, r)$.

5/

Cela revient à effectuer sur les courbes de la figure 4 une affinité d'axe Oy et de rapport $1/k$. En prenant pour k une valeur voisine de 1,1 on améliore en fait sensiblement la concordance entre les résultats du calcul et les résultats expérimentaux.

4/

3. Nous avons vu au § IV que la transformée de Laplace de la fonction $F(x, R)$, soit $K(\lambda, R)$, est liée au nombre de Stanton par l'égalité :

$$St = \frac{1}{U_{\infty} K(\lambda, R)} \quad (11)$$

On peut alors déterminer directement la fonction $K(\lambda, r)$ qui, d'après le modèle de diffusion, est solution de l'équation :

$$U(r) \cdot (C_{\infty} - \lambda K) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\varepsilon \frac{\partial K}{\partial r} \right) \quad (14)$$

On a représenté, sur la figure 11, les valeurs du nombre de Stanton obtenues à partir de la formule (14) — après la résolution numérique de l'équation — ainsi que celles obtenues à partir de la transformée de Laplace de la courbe expérimentale des concentrations à la paroi. On voit que l'accord est bon, mais que subsiste un écart systématique. On montre facilement que, en multipliant ε par un rapport k , la courbe $St(\lambda)$ est transformée en la courbe homothétique dans l'homothétie de rapport k centrée à l'origine. Il semble donc qu'une valeur de

k légèrement supérieure à l'unité améliorerait la aussi la comparaison. Il faut noter qu'on trouverait ici une valeur plus voisine de l'unité que précédemment, mais, par ailleurs, le calcul de la transformée de Laplace de la courbe expérimentale ne peut être fait correctement, faute de valeurs, dans la zone très voisine de l'injection : ce sont en fait des valeurs calculées qui ont été utilisées dans cette zone.

4. Nous avons examiné au paragraphe précédent l'allure de la fonction $St(\lambda)$. La figure 12 donne de façon plus complète cette fonction $St(\lambda)$ après la résolution numérique de l'équation 14 : on peut constater qu'elle s'annule pour les valeurs $\lambda_1 = -0,282$ et $\lambda_2 = -0,85$ qui sont donc des pôles de $K(\lambda, R)$.

Ceci correspond à l'existence d'un développement asymptotique de $C(x, r)$ sous la forme :

$$C(x, r) = C_{\infty} + C_1(r) e^{\lambda_1 x} + C_2(r) e^{\lambda_2 x} + \dots$$

où $C_1(r)$ est d'ailleurs la fonction $K(\lambda, r)$ (normée différemment).

Par la méthode de Prony, nous avons recherché à partir des valeurs expérimentales la valeur la plus probable de λ_1 . Les résultats sont donnés, dans le

10/ Concentrations à la paroi ($C_p - C_{\infty}$).
Concentration at the wall ($C_p - C_{\infty}$).

11/ Variation du nombre de Stanton en fonction de λ .
Stanton number vs. λ .

12/ Variation du nombre de Stanton en fonction de λ (courbe calculée).
Stanton number vs. λ (calculated data).

tableau ci-dessous, pour plusieurs valeurs de $y = R - r$:

y (mm)	$-\lambda_1$ (m)
0,5	0,50
5	0,48
10	0,47
20	0,40
30	0,30
40	0,14
50	0,59
60	1,1
70	0,53
80	0,38
90	0,33
100	0,30
110	0,28
120	0,33
130	0,32
140	0,24
150	0,22

Les valeurs de λ_1 sont dispersées, mais il convient de remarquer, au vu du tableau 3 et de la figure 4, que cela n'a rien d'étonnant pour ce qui concerne les valeurs de y comprises entre 40 et 70 mm car, dans cette zone, les points expérimentaux sont rapidement très voisins de C_∞ . Par ailleurs, au voisinage du centre de la conduite ($y = 140$ et 150 mm), les points expérimentaux sont peu nombreux. Cela dit, presque toutes les autres valeurs de λ_1 sont inférieures à la valeur $-0,282$ (*), ce qui ne fait que traduire le fait que l'ensemble des courbes expérimentales converge plus vite vers C_∞ que l'ensemble des courbes calculées (§ 2).

Par ailleurs, la figure 13 permet de comparer la courbe donnant la fonction $K(\lambda_1, R)$ et la courbe $(C - C_\infty)$ obtenue dans la dernière section. Cette comparaison est satisfaisante, mais il faut se rappeler que les deux courbes ont été normées.

5. En conclusion, on peut dire que le modèle de diffusion donne d'assez bons résultats asymptotiques, et qu'on peut les améliorer en remplaçant ε par $k\varepsilon$, ou k est voisin de 1,1 ($k = 1,08$ semble être la meilleure valeur). En particulier, la courbe de concentration à la paroi ou sa transformée de Laplace — et donc $St(\lambda)$ — est très correctement prédite.

On peut donc en conclure que, pour les problèmes d'échangeurs où on utilisera cette courbe, le modèle de diffusion est un outil sûr tant qu'on se limite à des valeurs de λ inférieures au premier pôle λ_1 . La multiplication de ε par k n'améliore en rien la dispersion constatée sur les valeurs λ_1 et détériore légèrement la qualité de la prédiction au voisinage de l'injection.

Pour juger de la qualité du modèle dans le cas d'une injection au sein du fluide (ce que nous n'avons pas fait) il faudrait utiliser la même présentation, c'est-à-dire faire porter la comparaison sur la transformée de Laplace $K(\lambda)$.

(*) Cette valeur est d'ailleurs celle que trouvent Siegel et Sparrow [8] pour une conduite de même diamètre, mais avec un nombre de Reynolds de 5.10^5 . Son inverse vaut 3,54 m, soit environ 11 D.

1. Les problèmes d'échangeurs (à flux croisés ou parallèles) forment une classe intéressante, car ils admettent tous des solutions exponentielles. Ces solutions sont caractérisées par le fait que le nombre de Stanton est indépendant de x . Nous avons vu en effet que pour les problèmes qui vérifient (A) ou (B) nous avons :

$$\theta_p - \theta_m = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x-u) q(u) du$$

Donc, si le nombre de Stanton est indépendant de x , nous avons :

$$q(x) \frac{1}{St U_\infty} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x-u) q(u) du$$

Les solutions en $q(x)$ de cette équation sont les fonctions propres de l'opérateur de convolution c'est-à-dire les exponentielles. On a alors l'équation déjà vue :

$$\frac{1}{St U_\infty} = K(\lambda, R)$$

Ainsi, en fonction de λ , nous aurons différentes valeurs de St . Résoudre le problème, c'est trouver λ en résolvant une équation implicite qui rend compte de la condition à la paroi, condition qui est indépendante de x . Nous allons passer en revue l'application de ce principe général aux échangeurs croisés, parallèles antiméthodiques, et parallèles méthodiques.

2. Dans un échangeur croisé, nous admettrons que chaque tube échange avec un écoulement à température constante T_∞ . On sait alors que si le tube était infiniment long, la température tendrait vers T_∞ . Nous poserons donc $\theta^* = \theta - T$ et nous serons donc dans le cas où $\theta^* \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow \infty$. Cela étant, l'équation des échanges à la paroi s'écrit (*) :

$$q = -A \theta_p^*$$

$$\theta_p^* = \left(K + \frac{a}{\lambda} \right) q$$

A : coefficient d'échange avec l'extérieur.

L'équation implicite qui donne la valeur de λ est donc :

$$-\frac{1}{A} = K(\lambda, R) + \frac{a}{\lambda} \quad (15)$$

La méthode utilisée généralement pour résoudre ce problème est de négliger la variation de $K(\lambda, R)$ et d'utiliser la valeur obtenue dans les expériences « à flux constant » $K(o) = 1/[U_\infty St(o)]$: c'est ce qui est représenté par la courbe en traits pointillés sur la figure 14.

Nous voyons donc sur cette figure :

— que, le coefficient A étant toujours positif, les

(*) En écrivant l'équation sous cette forme nous négligeons l'influence de la paroi que nous supposons infiniment mince. Il est facile de lever cette restriction et de traiter le cas général.

13/ Comparaison entre les valeurs expérimentales de $C - C_\infty$ obtenues dans la dernière section et la fonction $K(\lambda_1, R)$ obtenue après résolution de l'équation (14);
Experimental $(C - C_\infty)$ values for the final section and values of $K(\lambda_1, R)$ from equation (14).

14/

racines seront toujours négatives. On peut donc *a priori* se demander si le reste de la courbe $K(\lambda)$ a une réalité physique. Nous verrons aux paragraphes suivants que c'est bien le cas;

— lorsque A tend vers l'infini, on tend vers l'évolution à température de paroi fixée. La racine correspondante λ_0 donne l'allure asymptotique de l'évolution, si on ne tient pas compte de l'effet produit par la distribution de température à l'entrée (qui s'atténue rapidement);

— d'une façon générale, l'écart entre la solution approchée et la solution exacte est faible. Il est maximal pour le cas où $A = \infty$. Les valeurs λ_0 et λ_0^* sont alors données sur la figure 14 :

$$\lambda_0 = -0,028 \quad \lambda_0^* = -0,030$$

3. Nous étudierons le cas d'un échangeur constitué de deux tubes concentriques. Comme au paragraphe précédent, nous négligeons l'influence de la paroi. Si nous considérons l'écoulement dans le cylindre annulaire externe, nous voyons qu'il est possible de développer, relativement aux variations de température engendrées par un flux $q(x)$ à la paroi (commune) une analyse identique à celle effectuée pour le cylindre circulaire.

D'autre part, l'échangeur étant antiméthodique, on sait que les températures tendent lorsque $x \rightarrow \infty$ vers une asymptote commune T_∞ donnée par :

$$T_\infty = \frac{C_{p1}M_1\theta_{m1} + C_{p2}M_2\theta_{m2}}{C_{p1}M_1 + C_{p2}M_2}$$

Nous poserons donc :

$$\theta_1^* = \theta_1 - T_\infty \quad \text{et} \quad \theta_2^* = \theta_2 - T_\infty$$

et nous aurons bien : $\theta_1^* \rightarrow 0$ et $\theta_2^* \rightarrow 0$
pour $x \rightarrow +\infty$

L'équation des échanges à la paroi s'écrit :

$$\theta_p^* = \left(K_1 + \frac{a_1}{\lambda}\right) q_1$$

$$\theta_p^* = \left(K_2 + \frac{a_2}{\lambda}\right) q_2$$

$$Q_1 = \rho_1 C_1 q_1 = -Q_2 = -\rho_2 C_2 q_2$$

D'où, en définitive, si l'on pose :

$$\varepsilon = \frac{\rho_1 C_1}{\rho_2 C_2}$$

$$K_1 + \frac{a_1}{\lambda} = -\varepsilon \left(K_2 + \frac{a_2}{\lambda}\right)$$

La figure 15 c représente, pour diverses valeurs de ε , l'intersection des deux courbes. Nous avons supposé que, pour le fluide 2 (espace annulaire), le pôle v_2 de la fonction $K_2(\lambda)$ était grand, ce qui correspond à une différence $(D_2 - D_1)$ faible (d'après ce que nous avons vu au § 4 précédent. Note en bas de page).

Nous avons également figuré (en traits pointillés) la courbe approchée $K_1(o) + a_1/\lambda$ (les courbes $K_2(o) + a_2/\lambda$ sont pratiquement confondues avec les courbes exactes).

Par opposition au cas étudié au paragraphe précédent, on voit sur la figure 15 que les points d'intersection correspondent à $K_1 + a_1/\lambda > 0$ pour le tuyau (1), l'espace annulaire impose une condition aux limites qui paraissait impossible à réaliser physiquement. Pour une valeur positive du flux par exemple ($q_1 = +A\theta_p^*$), la température moyenne du fluide 1 est négative et croît vers 0 (ou T_∞) mais θ_p est positif et décroît vers 0 (ou T_∞). Dans toute cette zone l'écart entre la racine réelle et la racine approchée est grand.

En particulier, si le rapport ε tend vers l'infini

15/

(fluide externe à capacité calorifique très faible) ou si la vitesse dans l'espace annulaire tend vers zéro, le point d'intersection avec la courbe vraie tend vers le pôle ν_1 , ce qui signifie que le fluide externe ne joue plus aucun rôle et que l'évolution est semblable à celle observée dans un tuyau adiabatique.

16/

Au contraire, l'intersection avec la courbe approchée donne une valeur λ beaucoup plus élevée, qui est évidemment tout à fait inexacte.

4. Nous étudions un échangeur annulaire analogue à celui du paragraphe précédent, mais où les vitesses sont de sens contraires. Cela signifie que le sens des x croissant sera, pour le fluide 2 le sens opposé à l'écoulement. La courbe $K_2(\lambda)$ sera donc inversée et son pôle sera positif.

Nous définissons toujours :

$$T_\infty = \frac{C_{p1}M_1\theta_{m1} + C_{p2}M_2\theta_{m2}}{C_{p1}M_1 + C_{p2}M_2}$$

(le débit M_2 est négatif)

et nous posons :

$$\theta_1^* = \theta_1 - T_\infty \quad \text{et} \quad \theta_2^* = \theta_2 - T_\infty$$

Cela étant, on démontre facilement que θ_1^* et θ_2^* tendent vers 0 soit pour $x \rightarrow +\infty$, soit pour $x \rightarrow -\infty$. Nous sommes donc toujours dans le cas (A) pour un des fluides et dans le cas (B) pour l'autre. Nous aurons donc :

$$\theta_p^* = \left(K_1 + \frac{a_1}{\lambda}\right) q_1$$

$$\theta_p^* = \left(K_2 + \frac{a_2}{\lambda}\right) q_2$$

$$\rho_1 c_1 q_1 = -\rho_2 c_2 q_2$$

Soit encore :

$$\frac{B}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{a_1}{\rho_1 c_1} + \frac{a_2}{\rho_2 c_2} \right) = - \left(\frac{K_1}{\rho_1 c_1} + \frac{K_2}{\rho_2 c_2} \right)$$

Le problème est donc de couper la courbe :

$$\left(\frac{K_1}{\rho_1 c_1} + \frac{K_2}{\rho_2 c_2} \right)$$

par l'hyperbole du premier membre, dont le coefficient est positif ou négatif selon que $C_{p1}M_1$ est inférieur ou supérieur à $|C_{p1}M_2|$.

Si $M_1C_{p1} > M_2C_{p2}$ la solution λ est négative et les températures tendent vers T_∞ pour $x \rightarrow +\infty$.

Si $M_1C_{p1} < M_2C_{p2}$ la solution λ est positive et les températures tendent vers T_∞ pour $x \rightarrow -\infty$.

Les fluides étant de sens contraire, la racine correspond nécessairement, pour l'un des deux fluides, à une *croissance* exponentielle dans le sens de l'écoulement, c'est-à-dire à la branche de courbe qui paraissait sans utilité pratique. Sur la figure 16 on a figuré en pointillé la droite qui représente la valeur approchée :

$$\left(\frac{K_1(0)}{\rho_1 c_1} + \frac{K_2(0)}{\rho_2 c_2} \right)$$

on voit que les racines correspondantes sont très proches des racines exactes.

5. Remarque générale.

Dans ce qui précède, nous nous sommes toujours limités à la branche de courbe $K(\lambda)$ comprise entre le pôle λ_1 et $+\infty$. Si nous nous fions entièrement au modèle de diffusion, nous pouvons tracer la courbe complète avec tous ses pôles. Donc l'équa-

tion implicite (15) — pour prendre un exemple — aura pour solution une infinité de valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ sur les branches (1) (2) (3) ..., qui permettront de décrire entièrement l'évolution à partir d'une distribution quelconque de la température à l'entrée.

Malheureusement, ni la validité du modèle de diffusion, ni la précision des expériences faites ne suffisent pour que nous puissions fixer valablement l'allure des branches (2), (3) etc. de la courbe $K(\lambda)$. Il faut donc se limiter à connaître l'évolution dominante, qui est donnée par la première racine λ_1 .

Remerciements

Nous tenons à remercier tout particulièrement M. Estrade, qui a conçu et réalisé l'installation expérimentale, ainsi que M. Ronat dont la collaboration pour l'élaboration du modèle de diffusion nous a été précieuse, et Mlle Serieys qui a su mener à bien la conduite de l'expérimentation.

Liste des symboles utilisés

- α : température de référence, notée aussi θ_∞ .
Dans la 2^e partie : diffusivité thermique :
- $$= \frac{\lambda}{\rho C_p}$$
- A : coefficient de transfert thermique;
 α : coordonnée angulaire (coordonnées cylindriques);
 C : concentration (en volume) C_∞ : concentration à l'infini - C_p : concentration à la paroi - c' : fluctuation locale de concentration;
 ρC_p : chaleur volumique à pression constante;
 D : diamètre de la conduite - D : coefficient de diffusion (diffusivité) relatif à la grandeur scalaire Γ - D_m : diffusivité de masse. Dans la 2^e partie : diffusivité moléculaire;
 δ : distribution de Dirac;
 ε : coefficient de diffusion turbulente ($\varepsilon_H, \varepsilon_r, \varepsilon_\theta$ pour la chaleur, la quantité de mouvement et la masse);
 F : champ de même nature que T ($F = T - \alpha$);
 Φ : valeur du champ F à la paroi;
 Γ : grandeur scalaire désignant la température, la concentration ou la quantité de mouvement. Désigne la fonction eulérienne de 1^{re} espèce dans l'équation (13);
 K : fonction des variables λ et r , transformée de Laplace de $F(x, r)$;
 L : longueur de référence;
 λ : inverse d'une longueur, sauf dans l'équation (5) où λ désigne la conductivité thermique. Est utilisée comme variable de Laplace - λ_1, λ_2 : coefficients de x dans les deux premiers termes du développement exponentiel de Φ ;
 M : débit massique (M_1 et M_2 pour les fluides 1 et 2);
 μ : viscosité dynamique;

- ν : viscosité cinématique;
 $\overline{\omega}$: périmètre de la conduite $= 2 \pi R$;
 Pr : nombre de Prandtl;
 q : flux thermique normé (divisé par ρC_p) q_m : flux massique - q_p : flux à la paroi;
 Q : flux thermique - Q_0 : valeur de q à l'origine;
 r : rayon (coordonnées cylindriques);
 R : rayon de la conduite;
 ρ : masse volumique;
 S : section de la conduite ($= \pi R^2$) - S_c : aire minimale du col sonique;
 Sc : nombre de Schmidt;
 St : nombre de Stanton;
 t : temps;
 T : champ créé par une distribution de Dirac;
 θ : température - θ' : fluctuation locale de température - θ_m : température moyenne de l'écoulement - θ_∞ : température de référence (infini aval) notée aussi α - θ_p : température à la paroi;
 u : 1) vitesse de l'écoulement - U : vitesse moyenne locale - u' : fluctuation locale de vitesse - U_∞ : vitesse de référence (à l'infini) - U_m : vitesse moyenne dans la conduite - u_* : vitesse de frottement - u^+ : vitesse réduite $= u/u_*$;
2) variable de même nature que x dans l'équation [8];
 x : abscisse comptée sur l'axe de la conduite;
 x^{++} : abscisse réduite : $\frac{u_* x}{\nu Pr}$
 y : $R - r$;
 y^+ : ordonnée réduite : $\frac{y u_*}{\nu}$

Références bibliographiques

- [1] FORESTIER (A.). — Considérations théoriques sur l'emploi de la diffusivité turbulente. (Communication présentée à la S.H.F., session des 21 et 22 novembre 1968.)
- [2] Mécanique de la turbulence. — (Colloque C.N.R.S. de Marseille, 28 août-2 septembre 1961; Editions du C.N.R.S.)
- [3] LUFT (K.F.). — Une nouvelle méthode d'analyse de gaz par absorption dans l'infrarouge sans décomposition spectrale. *Zeitschrift für technische Physik*, Nr. 5, 97-104 (1943).
- [4] SPALDING (D.B.). — Contribution to the theory of heat transfer across a turbulent boundary layer. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 7, 743-761 (1964).
- [5] REICHARDT (H.). — The principles of turbulent heat transfer (article paru dans l'ouvrage de J. P. Hartnett: Recent advances in heat and mass transfer, McGraw Hill Book Co., 223-252, 1961).
- [6] LIGHTHILL. — Contribution to the theory of heat transfer through a laminar boundary layer. *Proceedings of the Royal Society*, 202 A, 359 (1950).
- [7] TOWNSEND (A.A.). — The diffusion behind a line source in homogeneous turbulence. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, vol. 224, No. 1159, 487 (1954).
- [8] SIEGEL (R.) et SPARROW (E.M.). — Turbulent flow in a circular tube with arbitrary internal heat sources and wall heat transfer. *Journal of heat transfer, Trans. of the A.S.M.E.*, vol. 81, Serie C, No. 4, 280-290 (novembre 1959).

M. le Président se déclare passionné par la communication de MM. CASEAU et DENIAU qu'il remercie très vivement.

Il fait remarquer que les auteurs ont admis un opérateur de diffusion linéaire, ce qui n'est pas tout à fait exact puisque le phénomène fait intervenir la structure de l'écoulement turbulent, laquelle n'est pas linéaire.

M. LASSAU pose les deux questions suivantes :

« 1° Si l'on calcule les quantités de mouvement, ($Q_1 V_1$) injectées et (Q_u) dans l'écoulement, leur rapport est environ 1/20; cette valeur modifie le profil de vitesse; avez-vous tenu compte de ce fait ?

« 2° Vous injectez du CO_2 ; est-ce que vos courbes sont symétriques (influence de la pesanteur) ? »

M. CASEAU répond :

« La vérification véritable réside dans le fait que la comparaison entre calcul théorique et résultats expérimentaux est bien meilleure au départ qu'à la fin. Notre régime d'injection s'est trouvé justifié *a posteriori* par le fait que les profils dans les premières sections étaient exactement ceux qu'on s'attendait à trouver. Sans aucun ajustement de coefficients, on a trouvé des courbes qui sont bien exactement celles qu'on espérait.

« D'autre part, les mesures ont effectivement vérifié la conclusion donnée par Townsend, à savoir qu'à l'aval, il n'y a pas de modifications de l'écoulement, autre qu'un léger déplacement des lignes de courant dû à l'injection ».

« En ce qui concerne la dissymétrie des courbes entraînée par l'injection de CO_2 , l'idée initiale était de s'affranchir de cette difficulté en faisant tourner le système de mesures. En utilisant le théorème de superposition, on peut montrer que si l'on prend une moyenne sur le cercle ainsi parcouru par la sonde de prélèvement, on a exactement la même chose que si l'on avait fait tourner l'injection, c'est-à-dire que si le système avait une symétrie parfaite.

« En fait, nous avons renoncé à cette contrainte qui multipliait le nombre de points de mesure car nous avons vu qu'elle n'était pas nécessaire. Comme l'a dit M. DENIAU, avec le schéma d'injection que nous avons utilisé, avec une suppression de CO_2 très importante, nous avons obtenu une injection très suffisamment symétrique ».

M. CASTELLANT (S.N.E.C.M.A., Villaroche) étudie des pro-

blèmes assez voisins de ceux abordés dans l'exposé de M. CASEAU à propos des chambres de combustion des fusées et réacteurs.

Dans son travail, observe-t-il, M. CASEAU s'intéresse aux concentrations loin en aval de la fente d'injection. Dans de nombreuses applications et notamment en aéronautique, on s'intéresse aux phénomènes près de la fente. Le but est de protéger une paroi du contact des gaz chauds (les gaz sont par exemple à 1500 °C et ils contiennent du gaz carbonique provenant de la combustion). Pour cela, on injecte par une fente, disposée à la paroi, de l'air frais dont la température peut être de quelques centaines de degrés. Le nombre de Reynolds de la fente est de l'ordre de 1000 à 10 000. Supposons que la paroi puisse être adiabatique en tout point, n'échangeant de chaleur, ni par rayonnement, ni par convection vers les sections voisines. Elle prend alors une certaine température. Le champ de diffusion est turbulent, sauf près de la paroi où il existe une sous-couche laminaire. Les conditions aux limites du problème thermique et du problème de diffusion sont les mêmes puisque la paroi est imperméable à la chaleur et à la matière. Peut-on, dans un tel cas, utiliser l'analogie entre transfert d'enthalpie et transfert de matière, et écrire qu'il y a une relation linéaire entre l'enthalpie spécifique et la fraction massique de gaz carbonique ?

La question ainsi posée donne lieu à une intéressante discussion à laquelle prennent part notamment, M. CASEAU et M. le Président.

Il semble en résulter que l'analogie n'est valable dans ce cas que s'il y a identité entre un nombre de Schmidt et un nombre de Prandtl judicieusement choisis. En régime turbulent, l'analogie serait complète; mais, tous les auteurs ne sont pas d'accord sur ce point en raison, sans doute, de la difficulté des mesures à haute température et de la non-linéarité des phénomènes.

M. TACCOEN voudrait savoir si l'on peut tirer des expériences relatées par M. CASEAU quelques indications sur l'influence de la diffusion moléculaire sur la diffusion turbulente.

M. CASEAU ne le pense pas, en raison des conditions aux limites trop mal définies (sauf peut-être dans la zone amont).