

CALCULS D'ÉCOULEMENTS EN FLUIDE RÉEL

PAR J.-P. HUFFENUS *

Depuis ses débuts, l'hydrodynamique théorique a consacré une grande partie de ses développements aux calculs d'écoulements irrotationnels de fluide parfait. L'avènement des ordinateurs a renforcé les possibilités en cette matière, permis certaines extensions sur le fluide parfait en écoulement rotationnel, et suscité quelques tentatives dans le domaine des fluides visqueux. Ces dernières visent essentiellement à dépasser le stade où certaines hypothèses simplificatrices, ou cas particuliers, permettent une intégration quasi analytique des équations générales.

La prise en compte des équations complètes de Navier-Stokes se heurte à deux difficultés essentielles :

- la complexité de ce type d'équation non linéaire, qui nécessite un traitement numérique particulièrement délicat et coûteux;
- l'instabilité fondamentale de certaines solutions, instabilité qui est à la base des phénomènes turbulents.

De nos jours, la physique de la turbulence constitue une branche essentielle de la mécanique des fluides, mais on peut dire que, malgré des efforts et des succès notoires, elle n'en est encore qu'au stade d'une recherche très spécialisée. Aussi, malgré l'importance des résultats obtenus, les nombreux techniciens qui gravitent autour de ce domaine ont-ils plus volontiers recours à des méthodes empiriques, plus ou moins cohérentes, qui ne donnent pas toujours entière satisfaction.

En regard de ces difficultés, il faut noter le besoin sans cesse croissant qu'éprouve le physicien de dis-

poser de supports théoriques très élaborés, lui permettant de compléter les informations qu'il tire de la technique du modèle réduit. Ce dernier s'appuie en effet sur des critères de similitude et sur des moyens de mesure limités, qui ne permettent pas toujours d'apporter des solutions complètes et raisonnables à certaines classes de problèmes d'actualité.

Il était donc logique que, munie de puissants moyens de calcul numérique, une société comme SOGREAH, dont la mécanique des fluides est la préoccupation constante, tente de promouvoir l'utilisation de techniques numériques pour résoudre des problèmes d'écoulement en fluide réel, à partir des équations de Navier-Stokes. En ce qui concerne la turbulence, une optique « industrielle » est indispensable. Compte tenu de la complexité et des imperfections des théories fondamentales, un certain empirisme est obligatoire en cette matière.

Après une longue période d'élaboration, une nouvelle famille de programmes a ainsi vu le jour. Sans prétendre donner une réponse à tous les problèmes de mécanique des fluides, PETULA (Programme d'Écoulements TURbulents et LAminaires) constitue, dès maintenant, un premier jalon sur cette nouvelle voie d'approche. Il permet d'aborder l'étude de nombreux cas complexes avec l'éventuelle collaboration du modèle physique, et sert de base pour de futures extensions dans le cadre d'une recherche soutenue.

Il serait trop long de tenter ici une description complète des travaux effectués pour parvenir à ce résultat. Nous nous contenterons d'évoquer les grandes lignes de la méthode et d'ajouter quelques exemples, nous réservant la possibilité de décrire, dans des articles ultérieurs, les solutions retenues sur chaque problème particulier soulevé.

* Ingénieur à la SOGREAH, Grenoble.

Fondements et hypothèses

Equations du mouvement.

Sans préjuger des divers perfectionnements qui peuvent, dès maintenant ou à plus long terme, être envisagés, nous conviendrons d'attribuer pour l'instant le vocable « fluide réel » à tout fluide qui peut être caractérisé par une viscosité apparente ν_a scalaire, dépendant éventuellement du point considéré et du temps, ses variations étant parfaitement définies par ailleurs en fonction de paramètres ayant trait ou non à l'écoulement calculé (géométrie, vitesses, gradients de vitesse, températures, etc.).

Dans un souci de clarté, nous limiterons de plus les développements ci-dessous à des fluides incompressibles, homogènes, de masse spécifique ρ constante et uniforme, dont l'écoulement s'effectue en charge en l'absence de tout champ de force extérieur autre que le champ de pesanteur. Or, si l'on écarte toute possibilité de surface libre ou de variation de la masse spécifique, ce dernier n'a pas d'action véritable sur l'écoulement.

Enfin, pour rester dans les limites de ce qui peut être raisonnablement envisagé avec les ordinateurs actuels, nous supposons que l'écoulement considéré peut être valablement traité dans une géométrie bidimensionnelle (problèmes plans ou à symétrie de révolution).

Ces diverses hypothèses ne sont pas toutes impératives. Ainsi, certaines extensions ont pu déjà être faites qui touchent le domaine de la convection naturelle ou de la convection mixte, sans toutefois aborder simultanément les problèmes turbulents. Quoi qu'il en soit, pour rester dans le cadre défini plus haut, nous écrirons les équations du mouvement sous la forme :

$$(1) \quad \frac{\partial V}{\partial t} + V \text{ grad } V = - \frac{1}{\rho} \text{ grad } P + 2 \nu \text{ div } f DV \\ \text{div } V = 0$$

la fonction f est utilisée pour représenter l'influence de tout phénomène intervenant sur la viscosité apparente locale $\nu_a = \nu f$. Pour l'écoulement laminaire d'un fluide newtonien, on a évidemment $f = 1$ partout.

P est la pression étoilée ($p + \rho gz$) à laquelle peut s'ajouter éventuellement le terme correctif classique lié à la turbulence $2E/3$.

Simulation de la turbulence.

La turbulence est simulée à partir de son action sur la viscosité locale apparente ν_a , considérée en première approximation comme un scalaire. Il est illusoire de prétendre ainsi obtenir une représentation des phénomènes turbulents conforme à la réalité, en particulier dans certaines zones fortement anisotropes; mais là n'est pas le but recherché (ceci serait d'ailleurs parfaitement utopique dans l'état actuel des connaissances). Beaucoup plus prosaïquement, on se propose d'aboutir à une reproduction satisfaisante des effets de la turbulence sur les champs de vitesse et de pression en respectant un ordre de grandeur correct de l'amplitude des fluctuations.

Dans cette optique, l'état de la turbulence en un point et à un instant donné est décrit de façon globale et schématique par deux paramètres E et l qui déterminent la valeur de f .

E est l'énergie turbulente : $\overline{v^2}/2$.

l est une longueur caractérisant l'échelle de la turbulence.

De façon plus précise, si l'on reprend les développements classiques conduisant aux relations sur l'énergie dans les écoulements turbulents, on peut écrire vectoriellement l'équation du mouvement moyen :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \text{ grad } V = - \frac{1}{\rho} \text{ grad } P \\ + \text{div} (2 \nu DV - \overline{v \times v}) \quad (2)$$

et l'équation relative au mouvement fluctuant décrivant le bilan d'énergie turbulente :

$$\frac{\partial E}{\partial t} + V \text{ grad } E = - DV \dots (\overline{v \times v}) - 2 \nu \overline{DV \dots DV} \\ + \text{div} \left[\nu \text{ grad } E + \nu \text{div} (\overline{v \times v}) - \overline{v \left(\frac{v^2}{2} \right)} - \frac{P}{\rho} \overline{v} \right] \quad (3)$$

On trouve dans la littérature diverses propositions permettant d'exprimer les termes :

$$\overline{v \times v}, \quad \overline{v \left(\frac{v^2}{2} \right)}, \quad \overline{pv}, \quad \overline{DV \dots DV}$$

semi-empiriquement en fonction de DV , E et l . Par exemple, on peut poser :

$$\overline{v \times v} = \frac{2}{3} E \overline{I} - 2 k_1 \nu \mathcal{R}_T DV$$

ce qui conduit à écrire (2) sous la forme :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \text{ grad } V = - \frac{1}{\rho} \text{ grad} \left(P + \frac{2}{3} E \right) \\ + 2 \nu \text{div} [(1 + k_1 \mathcal{R}_T) DV]$$

on retrouve ainsi (1) avec :

$$\nu_a = \nu f = \nu (1 + k_1 \mathcal{R}_T) = \nu + k_1 \sqrt{E} l$$

La longueur l est en principe déterminée par une équation aux dérivées partielles d'une forme analogue à celle de l'équation (3). Cependant, il est préférable d'utiliser des formulations plus simples en reliant par exemple l à la distance à la paroi, à la forme du profil des vitesses, et à la structure du champ des énergies turbulentes.

Ces diverses formulations empiriques font apparaître des coefficients dont le réglage préalable est indispensable. Celui-ci a été effectué de façon à retrouver par intégration la plupart des grandes lois connues de la dynamique des fluides turbulents.

On a ainsi apporté un soin particulier à la reproduction de phénomènes essentiels tels que :

- décroissance de la turbulence en l'absence de production;
- description de la courbe de vitesse au voisinage d'une paroi lisse ou rugueuse, couches limites et conduites, problème de la transition laminaire-turbulent;
- création de turbulence libre, confluence de deux écoulements parallèles, problèmes de jets et de sillages.

Sur ces différents sujets, la qualité des résultats obtenus diffère : si les deux premiers points ont reçu à l'heure actuelle des solutions que l'on peut estimer satisfaisantes, par contre, le troisième donne lieu à quelques difficultés en cours d'examen. Les études de développement se poursuivent donc pour forger un instrument de travail suffisamment général permettant une restitution satisfaisante des champs de vitesse et de pression ainsi qu'une approximation valable de l'amplitude des fluctuations turbulentes.

Principes de résolution numérique

Le traitement des équations aux dérivées partielles décrivant la structure du champ d'écoulement (V, P) peut s'effectuer en conservant le paramètre temps comme paramètre d'évolution à partir d'un régime initial quelconque satisfaisant l'équation de continuité et les conditions aux limites. Chaque grandeur est alors discrétisée dans un maillage orthogonal qui couvre l'ensemble du domaine étudié et l'on résoud :

$$V(t + \delta t) = V(t) + \frac{\partial V}{\partial t} \delta t$$

avec :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -V \operatorname{grad} V + 2\nu \operatorname{div} fDV - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} P$$

P est donné par l'écriture de l'équation de continuité sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} V = 0$$

qui se ramène à :

$$\frac{1}{\rho} \Delta P = \operatorname{div} (-V \operatorname{grad} V + 2\nu \operatorname{div} fDV)$$

Ainsi, connaissant un état initial V_0 , on peut résoudre l'équation de Poisson donnant P et en tirer en tout point $(\partial V / \partial t)$, d'où un nouvel état V , etc.

Parallèlement, les équations permettant de calculer E et l sont traitées de la même manière évolutive, si bien que l'ensemble du calcul progresse vers la description du régime permanent s'il existe.

Un tel procédé est classique et de nombreuses recherches ont déjà été accomplies sur ce sujet. Néanmoins, il faut souligner qu'une telle résolution des équations de Navier-Stokes par la méthode des différences finies se heurte à plusieurs obstacles importants.

Termes de transport.

Une première difficulté réside dans le traitement des termes non linéaires représentant le transport des quantités de mouvement ou de tout scalaire lié aux particules fluides. La discrétisation dans un maillage eulerien d'un problème élémentaire du type :

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

sous la forme classique :

$$F_i^{n+1} = F_i^n - \frac{u \delta t}{4 \delta x} (F_{i+1}^n + F_{i+1}^{n+1} - F_{i-1}^n - F_{i-1}^{n+1})$$

conduit en effet à des solutions s'écartant assez notablement de la solution analytique dès que δx est assez grand; au transport pur, s'ajoute une diffusion D_N d'origine numérique qui, avec la discrétisation ci-dessus, peut être positive ou négative, et plus ou moins importante selon l'allure du profil $F(x)$ local. La valeur absolue de cette diffusion peut être considérée comme proportionnelle à $u \delta x$.

Si nous revenons maintenant au calcul d'un écoulement laminaire, on peut voir que lorsque le nombre de Reynolds augmente, D_N prend une importance de plus en plus grande et finit par éclipser complètement la diffusion physique ν . Des calculs réalisés dans de telles conditions ne seraient évidemment plus significatifs. On doit donc limiter la valeur de D_N en choisissant des mailles extrêmement fines qui permettent de décrire avec une grande précision toute variation spatiale des grandeurs transportées. Les ordres de grandeur sont malheureusement tels que, si l'on s'en tient à ce seul remède, les calculs d'écoulement pour des nombres de Reynolds élevés restent impraticables avec les ordinateurs actuels.

Ce problème a été abordé par de nombreux auteurs qui ont pu proposer diverses solutions sous la forme de schémas aux différences particulièrement élaborés. A partir de ces travaux, un traitement numérique approprié a été mis au point. Il élimine pratiquement toute limitation en nombre de Reynolds, au prix d'une approximation qui s'est révélée jusqu'ici satisfaisante moyennant quelques précautions.

Stabilité et convergence du calcul.

Une seconde difficulté est introduite par le respect des conditions de stabilité du calcul numérique. Celles-ci imposent en effet des valeurs du pas de temps δt souvent très petites, ce qui entraîne une longueur exagérée du calcul, surtout si l'on vise en premier lieu la détermination du régime permanent.

Or, c'est bien le régime permanent qui dans la majorité des cas constitue le but du calcul. Par ailleurs, la mise au point des procédés de simulation de la turbulence s'appuie sur une comparaison des résultats du calcul avec des observations expérimentales qui portent presque toujours sur des régimes permanents. Il est donc indispensable que ces derniers puissent être calculés par les voies les plus rapides.

Des aménagements ont donc été apportés à la méthode brièvement décrite plus haut. Ils consistent à ajouter aux équations certains termes correctifs d'évolution qui, sans modifier la solution permanente, permettent une accélération très importante de la convergence du calcul. Les coefficients qui affectent ces termes correctifs peuvent également être choisis de façon à respecter la solution transitoire réelle dans ses évolutions basse fréquence. Bien entendu, plus la fréquence de coupure choisie est élevée, plus la convergence du calcul vers l'état permanent se trouve ralentie.

Conditions aux limites.

Les conditions imposées sur chaque frontière du domaine traduisent les conditions physiques qui

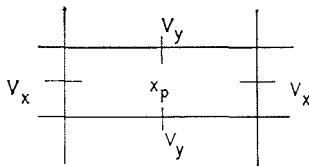
déterminent l'écoulement étudié. On peut, par exemple, se fixer la vitesse et les paramètres qui permettent la simulation de la turbulence.

Ainsi, pour une paroi solide, on imposera une vitesse et une énergie turbulente nulles. S'il y a lieu, la rugosité de cette paroi pourra être prise en compte par l'intermédiaire d'un paramètre k_s (rugosité équivalent sable) agissant directement dans l'expression empirique de l'échelle de la turbulence l au voisinage de cette paroi.

Discrétisation spatiale.

Position des variables.

Le maillage dans lequel s'effectue la discrétisation des équations aux dérivées partielles rendant compte des phénomènes peut être, dans un premier stade, un maillage rectangulaire quelconque. Tout vecteur est alors décrit par chacune de ses composantes localisée sur le milieu du côté du carreau qui lui est perpendiculaire, tandis que tout scalaire est directement calculé au centre du carreau.



Outre la compacité de la discrétisation ainsi effectuée, ceci permet une écriture particulièrement claire de l'équation de continuité sur chaque carreau (chaque vitesse V_x ou V_y visualisant en fait un débit moyen $V_x \delta y$ ou $V_y \delta x$ traversant la frontière du carreau). En contrepartie, les caractéristiques de l'écoulement calculé (V, P) sont relatives à chaque carreau, le carreau étant « l'élément » réel de la discrétisation.

Maillages curvilignes.

En fait, dans un grand nombre de problèmes intéressants, les parois solides sont représentées

dans le plan de travail par des courbes dont la forme a été soigneusement tracée et constitue par conséquent une donnée primordiale. Il serait alors dangereux de vouloir en rendre compte par une simple succession de « marches d'escalier », si bien que l'on est tout naturellement conduit à utiliser des maillages curvilignes orthogonaux.

Ceux-ci peuvent être « fabriqués » par une transformation conforme analytique, comme c'est le cas dans les exemples qui suivent. Dans le cas général, où la forme des parois est définie numériquement, un programme particulier élabore le maillage orthogonal qui sera utilisé pour le calcul de l'écoulement et définit tous les éléments de la métrique correspondante. La figure 1 donne un exemple de système de coordonnées curvilignes défini numériquement pour le calcul d'un écoulement de confluence.

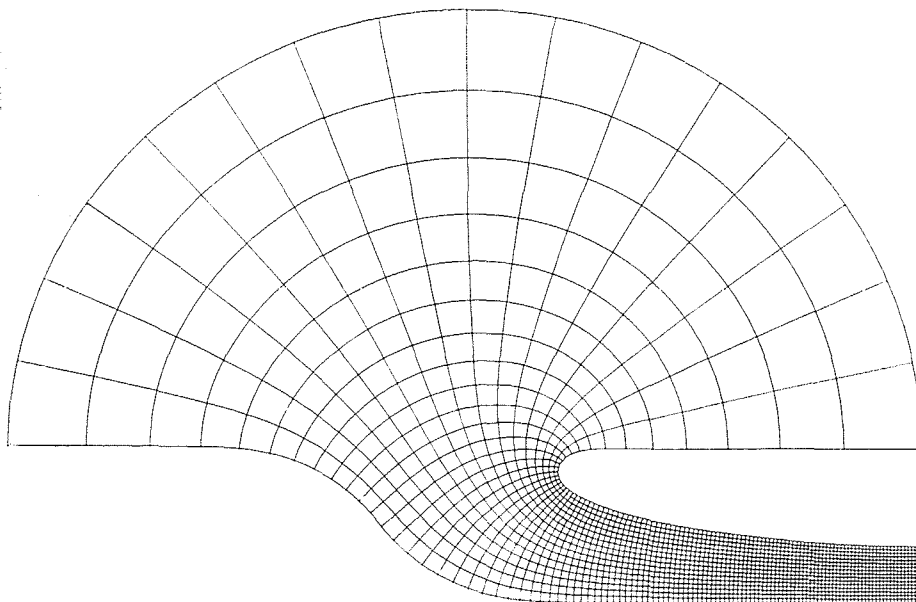
L'utilisation de tels maillages entraîne pour l'interprétation des résultats le recours obligatoire à des procédés de visualisation automatique (tracé de vecteurs vitesse, de lignes de courant, d'isobares, d'isoénergies turbulentes, etc.).

Exemples

Après ce rapide survol des principaux travaux qui ont abouti à l'élaboration du programme PETULA, nous donnerons maintenant quelques exemples d'écoulements permanents en charge qui illustrent certaines possibilités de la méthode dans son état actuel.

Divergent de révolution (fig. 2, 3 et 4).

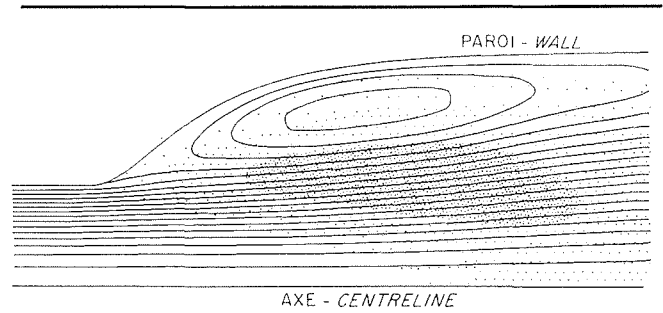
Diamètre amont (à gauche) :	9	cm
Débit :	3 000	cm ³ /s
Viscosité :	0,01	cm ² /s



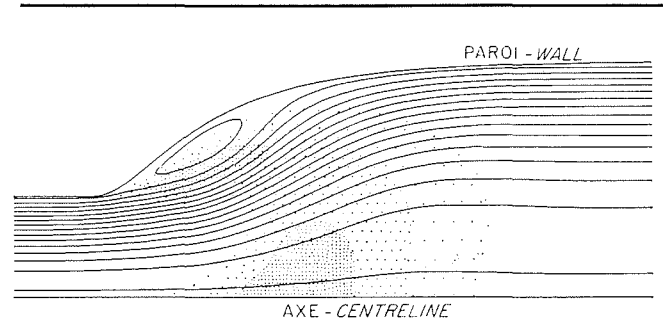
A l'écoulement méridien amont établi (nombre de Reynolds 42 000), on a superposé un écoulement tangentiel en rotation solide $V_\theta = \omega r$,

- $\omega = 0$ (fig. 2)
- $\omega = 10 \text{ s}^{-1}$ (fig. 3)
- $\omega = 20 \text{ s}^{-1}$ (fig. 4)

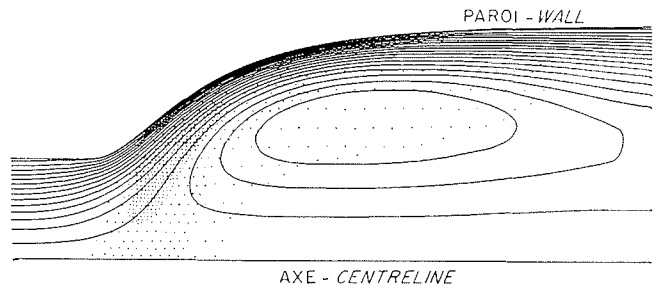
on a représenté les lignes de courant. Les pointillés ombrent les zones d'énergies turbulentes importantes.



2/



3/



4/

Divergent convergent de révolution (fig. 5).

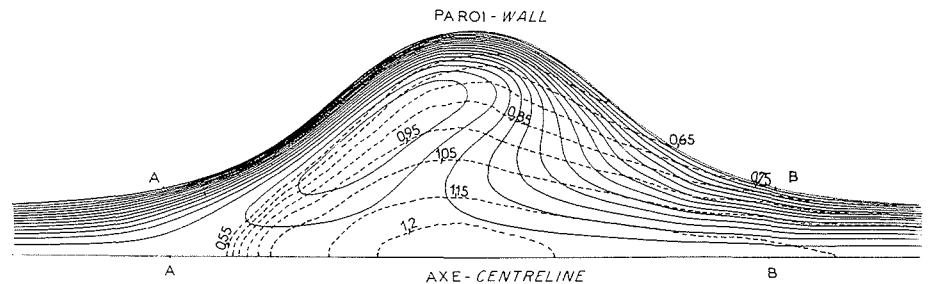
- Diamètre amont (à gauche) : 12,5 cm
- Débit : 4 000 cm³/s
- Viscosité : 0,01 cm²/s

Écoulement amont établi. Nombre de Reynolds : 42 000.

L'écoulement amont est de plus mis en rotation solide avec $\omega \approx 7 \text{ s}^{-1}$.

On a représenté les lignes de courant.

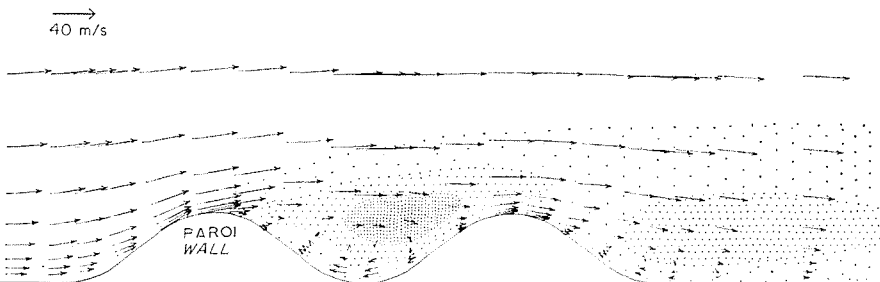
Étant donné un dégagement de puissance constant par unité de volume fluide entre les sections AA et BB, on a calculé le champ de température dont quelques isothermes sont figurées en tiretés. Les graduations concernent la valeur de la température réduite (écart de température entre un point et l'amont rapporté à l'écart total aval-amont).



5/

Ondulations de paroi (fig. 6).

Un écoulement d'eau (viscosité 0,01 cm²/s) de vitesse uniforme 40 m/s rencontre, après 25 cm de paroi lisse, deux ondulations de 1 mm de haut. L'écoulement est visualisé par les vecteurs vitesses. Les pointillés ombrent les zones d'énergies turbulentes importantes. L'étude de la structure interne d'un tel écoulement permet de comprendre l'ampleur des dégradations qu'il occasionne à la paroi par cavitation.



6/

Conclusion

Les exemples développés ci-dessus montrent quelques possibilités du programme PETULA. Dans son état actuel, ce programme permet d'aborder nombre de cas d'intérêt pratique. Il constitue une étape importante dans les recherches actuellement conduites pour généraliser l'utilisation des moyens de l'informatique dans l'étude des problèmes industriels complexes de mécanique des fluides.

Il faut cependant souligner que c'est là un domaine particulièrement difficile qui exige :

- la maîtrise de nombreux problèmes numériques;
- des ordinateurs puissants, en particulier si l'on veut aborder un jour les écoulements tridimensionnels;
- un support expérimental permettant des contrôles nombreux et une expérience suffisante dans cette matière pour éviter tout faux pas.

Du point de vue de la turbulence, la simulation actuelle présente quelques imperfections connues qui se manifestent plus nettement dans l'étude de certaines catégories de phénomènes. Elle fait l'objet d'un effort de recherche constant pour accroître le champ d'application du calcul. Cette recherche vise à utiliser au mieux les résultats acquis dans le domaine fondamental en comblant les lacunes existantes à l'aide de techniques plus ou moins empiriques inspirées directement des observations expérimentales.

Nous n'avons pas parlé ici des applications possibles de la méthode pour l'étude des écoulements de certains fluides non newtoniens ou des écoulements avec effet de densité. Ce programme peut aussi être utilisé dans des problèmes de transfert de chaleur ou de matière... Ces différents points seront repris dans des articles ultérieurs traitant soit de l'un des aspects particuliers de la méthode utilisée, soit d'applications nouvelles qui peuvent en être dégagées.

Notations

- D_N : diffusion numérique;
 E : énergie des fluctuations turbulentes
 $E = \overline{v^2}/2$
 F : fonction de x et de t ;
 f : fonction quelconque;
 g : accélération due à la pesanteur;
 i : indice d'espace (selon x);
 l : longueur caractérisant l'échelle de la turbulence;
 n : indice de temps;

- P, p : valeurs moyenne et fluctuante de la pression étoilée (pression statique + ρgz);
 $\bar{p} = 0$;
 \mathcal{R}_T : nombre de Reynolds turbulent
 $\mathcal{R}_T = \sqrt{E}l/\nu$;
 r : distance à l'axe;
 t : temps;
 V, v : valeurs moyenne et fluctuante du vecteur vitesse : $\bar{v} = 0$;
 V_θ : vitesse de rotation autour de l'axe;
 u : vitesse selon l'axe Ox ;
 z : cote au-dessus d'un plan de référence horizontal arbitraire;
 $\delta x, \delta y$: maille de discrétisation sur Ox ou sur Oy ;
 δt : pas de temps;
 ν : viscosité cinématique;
 ν_a : viscosité cinématique apparente;
 ρ : masse spécifique;
 ω : vitesse angulaire de rotation;
 \bar{A} : valeur moyenne de A dans le temps;
 $U \times U$: produit tensoriel du vecteur U par lui-même;
 DU : partie symétrique du tenseur grad U , U vecteur quelconque;
 $T \dots S$: produit doublement contracté des tenseurs T et S ;
 \bar{I} : tenseur unité.

Bibliographie

- HINZE. — Turbulence, McGraw Hill Book Company Inc, New York (1959).
 TOLLMEN (W.), SCHLICHTING (H.) und GÖRTLER (H.). — Ludwig Prandtl gesammelte Abhandlungen, Springer-Verlag (1961).
 SCHLICHTING (H.). — Boundary layer theory, McGraw Hill Book Company, New York (1968).
 ABRAMOVIC (GN.). — Théorie des jets turbulents, Fizmatgiz, Moscou (1960).
 ROTTA (J.). — Ing. Archiv., Vol. 18 (1950).
 ROTTA (J.). — Zeitschrift für Physik, Bd 129 (1951).
 BATCHELOR (GK) and TOWNSEND (AA.). — Proc. Roy. Soc. (London) A 194 (1948).
 BATCHELOR (GK). — Proc. Roy. Soc. (London) A 186, A 195 (1949).
 TOWNSEND (AA.). — The structure of turbulent shear flow. Cambridge, at the University Press (1956).
 HARLOW (FH.) and NAKAYAMA (PI.). — The Physics of fluids. Vol. 10, n° 11 (1967).
 AMSDEN (AA.) and HARLOW (FH.). — Journal of Computational Physics, 3 (1968).
 ROBERTS (KV.) and NEISS (NO.). — Math. of Computer (1966).
 CROWLEY (WP.). — Journal of Computational Physics, 1, (1967).
 RITCHMYER (RD.) and MORTON (KW.). — Difference methods for initial-value problems. Second edition (1967).