

**DÉTERMINATION THÉORIQUE  
ET VISUALISATION DE LA LIGNE DE JET  
D'UN ÉCOULEMENT PLAN A  
SURFACE LIBRE SUR UNE SINGULARITÉ  
EN FORME DE MARCHÉ**

PAR J. PICHON \*

**I. — Simulation d'un écoulement par une répartition de tourbillons**

**1. Généralités.**

Soit l'écoulement d'un fluide parfait limité par un tube de courant (s) (fig. 1).

Remplaçons, à présent, cette surface par une nappe de tourbillons dont la densité superficielle au point J est exprimée par le vecteur  $\vec{\gamma}_J$ . Le potentiel vecteur, en un point M de l'espace, est donné par la formule :

$$\vec{A}_M = \frac{1}{4\pi} \int_s \frac{\vec{\gamma}_J}{JM} dS_J \quad (1)$$

L'existence d'une telle distribution permettant la simulation de l'écoulement est difficile à établir dans le cas général. Mais ce problème est aisé à résoudre dans le cas d'un écoulement plan.

**2. Cas de l'écoulement plan.**

Considérons un écoulement limité par les deux lignes de courant  $+\psi_0$  et  $-\psi_0$ , tel que représenté sur la figure 2. Les écoulements à l'infini amont et à l'infini aval sont uniformes et de même direction.

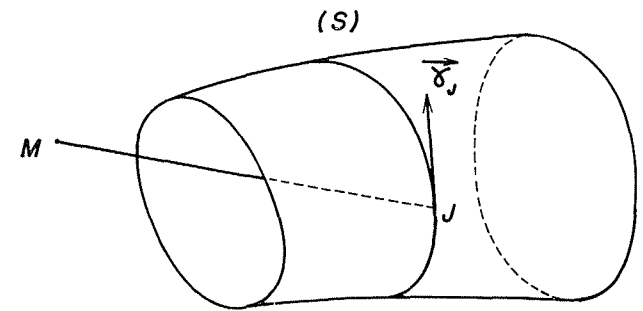
La ligne fermée (C) est composée de deux portions de lignes de courant DA et A'D', ainsi que de deux portions d'équipotentielles AA' et DD'.

$f(z)$  est une fonction analytique dans le domaine

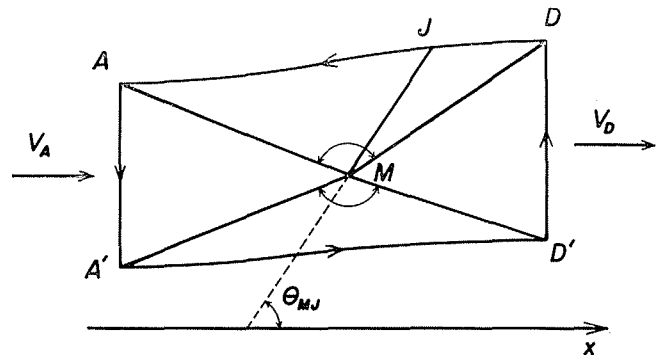
(D) limité par (C), qui ne possède pas de points singuliers dans cette région.

Si on connaît  $f(z)$  sur le contour (C), la formule de Cauchy nous donne  $f(z)$  en un point quelconque M appartenant au domaine (D) :

$$2i\pi f(z_M) = \int_{C^+} \frac{f(z_J)}{z_J - z_M} dz_J \quad (2)$$



1/



2/

\* Ing. E.I.M., Doc. Ing. en Hydraulique (Toulouse), Professeur adjoint au Département de Génie civil de la Faculté des Sciences Appliquées. Université de Sherbrooke (Québec) (Canada).

Nous avons d'une part :

$$f(z) = \varphi(z) + i\psi(z)$$

et d'autre part :

$$z_J - z_M = R e^{i\theta_{MJ}}$$

R désignant la distance MJ et  $\theta_{MJ}$  l'angle du vecteur MJ avec l'axe des x.

Différencions cette dernière équation :

$$dz_J = e^{i\theta} (dR + iRd\theta)$$

L'équation (2) devient :

$$2 i\pi f(z_M) = \int_{C^+} \frac{(dR + iRd\theta)}{R} (\varphi + i\psi)$$

En séparant les parties réelle et imaginaire, nous obtenons les équations :

$$2 \pi\varphi(M) = \int_{C^+} \psi \frac{dR}{R} + \int_{C^+} \varphi d\theta \quad (3)$$

$$2 \pi\psi(M) = \int_{C^+} \psi d\theta - \int_{C^+} \varphi \frac{dR}{R} \quad (4)$$

La seconde intégrale du second membre de l'équation (4) peut se mettre sous la forme :

$$\int_{C^+} \varphi \frac{dR}{R} = - \int_{C^+} \log R d\varphi = - \int_{C^+} \log R \frac{\partial\varphi}{\partial s} ds$$

L'intégrale  $\int_{C^+} \psi \frac{dR}{R}$  se transforme de la même manière. L'équation (3) devient :

$$2 \pi\varphi(M) = \int_{C^+} \varphi d\theta - \int_{C^+} \log R \frac{d\psi}{\partial s} ds$$

L'équation (4) donne, de même :

$$2 \pi\psi(M) = \int_{C^+} \psi d\theta - \int_{C^+} \log R \frac{\partial\varphi}{\partial s} ds \quad (5)$$

La première intégrale du second membre s'écrit :

$$\int_{C^+} \psi d\theta = \psi_0 x \text{ angle}(\vec{MD}, \vec{MA}) - \psi_0 x \text{ angle}(\vec{MA'}, \vec{MD'})$$

quand les deux sections DD' et AA' s'éloignent, l'une vers l'infini aval, l'autre vers l'infini amont, les angles  $(\vec{MD}, \vec{MA})$  et  $(\vec{MA'}, \vec{MD'})$  tendent vers  $\pi$ .

$\int_{C^+} \psi d\theta$  tend donc vers 0.

L'équation (5) prend ainsi la forme :

$$2 \pi\psi(M) = \int_{\Gamma} \log R \frac{\partial\varphi}{\partial s} ds \quad (6)$$

La courbe  $\Gamma$  est composée de la ligne de courant  $\psi_0$  parcourue de l'aval vers l'amont et de la ligne de courant  $-\psi_0$  parcourue en sens opposé.

Si maintenant nous transposons la formule (1) au cas bidimensionnel, nous obtenons l'équation :

$$\psi(M) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \gamma_J \log JM ds_J \quad (7)$$

La fonction de courant  $\psi$  est, en effet, la composante du potentiel vecteur  $\vec{A}$  selon un axe orthogonal au plan.

Les équations (6) et (7) sont identiques si la densité de tourbillons  $\gamma$  est égale à la vitesse tangentielle  $(\partial\varphi/\partial s) = v$ .

L'équation (6) peut s'écrire :

$$2 \widehat{\pi\psi}(M) = \int_{\Gamma} \log(JM) v_J ds_J \quad (8)$$

Nous supposons que les points A et D sont à distance finie, mais suffisamment éloignés, l'un vers l'amont, l'autre vers l'aval, pour que l'écoulement puisse être considéré comme uniforme en ces points. Séparons le champ d'intégration ( $\Gamma$ ). L'équation (8) devient :

$$2 \widehat{\pi\psi}(M) = \int_{A'}^{D'} \log MJ' v_J ds_J - \int_A^D \log MJ v_J ds_J + g(M)$$

avec :

$$g(M) = \int_D^{+\infty} \log \frac{MJ'}{MJ} v_D ds_J - \int_A^{+\infty} \log \frac{MJ'}{MJ} v_A dx_J \quad (9)$$

### 3. Calcul de la fonction g (M) et de ses dérivées partielles (fig. 3).

Appelons  $g_D(M)$  la première intégrale de l'équation (9). Celle-ci peut être considérée comme la partie réelle de la fonction complexe :

$$g_D(M) = \int_{z_D}^{+\infty} \log \left( \frac{z - h_D - z_M}{z - z_M} \right) dz \quad (10)$$

L'intégration de  $g_D(M)$  donne :

$$g_D(M) = v_D [(z_M - z_{D'}) \{ \log(z_{D'} - z_M) - 1 \} - (z_M - z_D) \{ \log(z_D - z_M) - 1 \}]$$

Il ne nous reste qu'à en tirer la partie réelle pour obtenir :

$$g_D(M) = v_D \left[ \begin{aligned} & (x_M - x_D) \log \frac{MD'}{MD} \\ & - (y_M - y_{D'}) \text{arc tg} \frac{y_M - y_{D'}}{x_M - x_D} \\ & + (y_M - y_D) \text{arc tg} \frac{y_M - y_D}{x_M - x_D} \end{aligned} \right]$$

Il serait possible d'obtenir  $[\partial g_D(M)/\partial x_M]$  et  $[\partial g_D(M)/\partial y_M]$  par dérivation de  $g(M)$  mais il est aussi rapide de les calculer directement à partir de (10) :

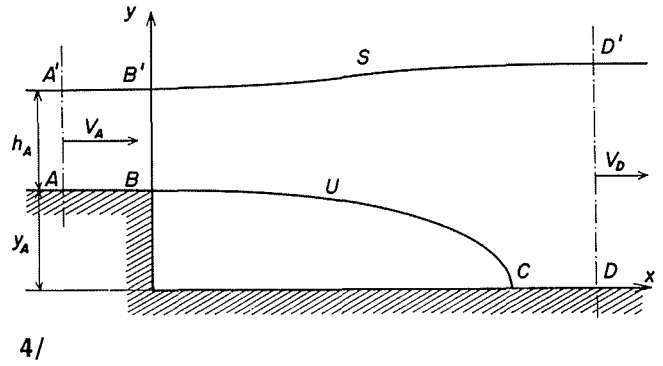
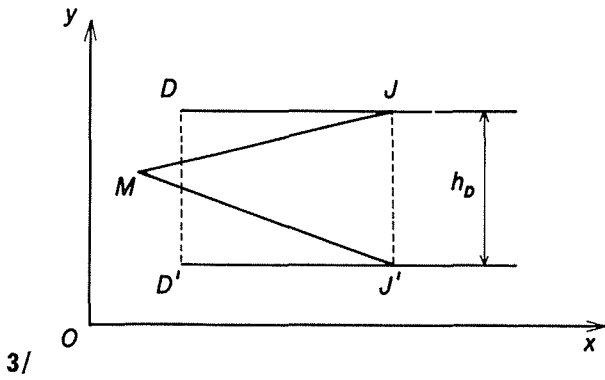
$$\begin{aligned} \frac{dg_D(M)}{dx_M} &= \int_{z_D}^{+\infty} \left( \frac{1}{z_M + h_D - z} - \frac{1}{z_M - z} \right) v_D dz \\ &= v_D \log \frac{z_M - z_{D'}}{z_M - z_D} \end{aligned}$$

En séparant partie réelle et partie imaginaire nous avons :

$$\frac{\partial g_D(M)}{\partial x_M} = v_D \log \frac{MD'}{MD}$$

$$\frac{\partial g_D(M)}{\partial y_M} = v_D \left( \text{arc tg} \frac{y_M - y_D}{x_M - x_D} - \text{arc tg} \frac{y_M - y_{D'}}{x_M - x_{D'}} \right)$$

La fonction  $g_A(M)$  et ses dérivées ont exactement la même forme.



4. Remarques générales sur le problème de la simulation d'un écoulement.

Nous avons montré qu'il était possible de simuler un écoulement, tel que représenté sur la figure 2, par une répartition de tourbillons distribuée tout au long des lignes de courant limitant le mouvement du fluide. Nous sommes arrivés à ce résultat en partant de la formule (5) appliquée à une courbe fermée AA' et D'D. La première intégrale tend vers zéro quand AA' et DD' s'éloignent indéfiniment.

Par contre, on ne peut, par le même procédé, obtenir un résultat analogue pour une distribution de sources. Ceci fait entrevoir certaines difficultés relatives au problème de la simulation d'un écoulement par une distribution de sources.

**II — Cas d'un écoulement plan à surface libre au-dessus d'une singularité en forme de marche**

Nous envisageons, à présent, l'écoulement plan à surface libre d'un fluide parfait dans un canal dont le radier est plan et horizontal. La largeur est supposée suffisamment grande pour que l'écoulement puisse être considéré comme plan. En un point B du radier, celui-ci subit un décrochement vertical de hauteur  $y_B$  (fig. 4).

En B, l'écoulement décolle et la ligne de jet qui se forme rejoint le radier en un point C. Nous supposons que le flux traversant la ligne de jet est nul, c'est-à-dire que cette dernière est une ligne de courant.

Le radier de l'infini amont au point B, et du point C à l'infini aval, constitue, avec la ligne de jet BUC, une ligne de courant. Soit  $-\psi_0$  la valeur de la fonction de courant sur cette ligne, et  $+\psi_0$  la valeur de la fonction de courant sur la surface libre (S).

Nous supposons le fluide parfait et incompressible entre les lignes de courant  $-\psi_0$  et  $+\psi_0$ . De plus, on considère l'écoulement irrotationnel et le fluide pesant.

Avant d'exposer la méthode de résolution proprement dite, nous allons étudier les paramètres caractérisant cet écoulement ainsi que leurs variations respectives.

1. Préliminaires.

Pour faciliter la lecture, nous avons désigné, dans ce chapitre, les quantités dimensionnelles par des lettres minuscules et les quantités adimensionnelles par des lettres majuscules.

L'écoulement est parfaitement déterminé si les trois paramètres suivants sont connus :

- la vitesse  $v_A$  à l'infini amont;
- la hauteur  $h_A$  de l'écoulement uniforme amont;
- la hauteur  $y_B$  de la marche.

Ils se réduisent aux deux paramètres adimensionnels :

$$F_A = \frac{v_A^2}{gh_A}$$

carré du nombre de Froude à l'infini amont

$$H_A = \frac{h_A}{y_B}$$

Les longueurs sont alors rendues adimensionnelles à l'aide de la grandeur la plus caractéristique : la hauteur  $y_B$  de la marche. Les vitesses le sont à l'aide de  $v_A$ .

Remarquons que, les deux paramètres  $F_A$  et  $H_A$  étant fixés, les grandeurs de référence  $v_A$  et  $y_B$  sont liées par la relation :

$$v_A = \sqrt{gy_B H_A F_A}$$

Étudions maintenant la relation qui existe entre le régime amont et le régime aval. À l'aide des équations de Bernoulli et de continuité, nous obtenons la relation :

$$y_B + h_A + \frac{v_A^2}{2g} = h_D + \frac{v_A^2}{2g} \frac{h_A^2}{h_D^2} \tag{12}$$

qui, sous forme adimensionnelle, devient :

$$1 + H_A + \frac{F_A}{2} H_A = H_D + \frac{F_A}{2} \frac{H_A^3}{H_D^2} \tag{13}$$

Désignons par  $\delta$  la dénivellation (dimensionnelle) de la surface libre. Nous avons :

$$\Delta = \frac{\delta}{y_B} = H_D - H_A - 1$$

soit :

$$z = \frac{\Delta}{H_A}$$

Nous supposons l'écoulement amont subcritique, soit  $F_A < 1$ . Le radier subissant un décrochement

vers le bas, l'écoulement ne peut que rester sub-critique à l'aval. Nous savons que, dans ce cas, la surface libre subit une élévation de niveau.  $\Delta$  est donc positif.

L'équation (13) peut se mettre sous la forme suivante :

$$F_A - 2Z = \frac{F_A}{[Z + 1 + (1/H_A)]^2}$$

Analysons les variations de  $Z$  en fonction de  $H_A$ ,  $F_A$  restant constant. Quand  $H_A$  tend vers l'infini,  $Z$  tend vers 0. En faisant un développement limité de l'équation (14), on trouve que  $\Delta$  tend vers  $F_A/(1 - F_A)$ .

Quand  $H_A$  tend vers 0,  $Z$  tend vers  $F_A/2$  et  $\Delta$  vers 0.

Nous en déduisons les relations :

$$0 < \Delta < \frac{F_A}{1 - F_A} \quad \text{et} \quad 0 < \frac{\Delta}{H_A} < \frac{F_A}{2}$$

Ces relations, ainsi que l'équation (14), peuvent nous éviter de résoudre l'équation (13) du troisième degré en  $H_D$ . Il suffit de substituer à l'un des paramètres  $F_A$  et  $H_A$ , le paramètre  $Z$ , et de tirer l'autre de l'équation (14).

2. Conditions de frontière.

Ce problème est un cas particulier de l'écoulement envisagé au paragraphe I2 et représenté par la figure 2. Toutes les équations de la partie simulative du problème restent valables.

Ici, deux lignes frontières ont une forme indéterminée. Pour que les données du problème soient complètes, nous devons fixer une loi de vitesse sur chacune de ces lignes.

a) Surface libre.

La pression est constante le long de la surface libre. La loi de vitesse sera fournie par l'équation de Bernoulli :

$$gy_s + \frac{1}{2} v_s^2 = gy_{sA} + \frac{1}{2} v_A^2$$

Nous en déduisons l'expression adimensionnelle de la vitesse en un point de la surface libre  $S$ , en fonction de l'ordonnée de ce point :

$$V_s = \sqrt{\frac{2}{F_A} + 1 - 2 \frac{Y_s}{H_A F_A}} \quad (15)$$

b) Ligne de jet.

Il se forme sous le jet une zone tourbillonnaire entraînée par le courant principal. Nous n'avons pas tenu compte de la perte de charge que cela occasionnait dans le courant principal, mais seulement de son influence sur la loi de vitesse le long de la ligne de jet.

Afin de choisir cette loi, nous faisons une hypothèse supplémentaire : la présence de la surface libre influence peu la loi de vitesse sur la ligne de jet.

L. Masbernat [1] a résolu le problème qui nous intéresse dans un écoulement en charge. Ses calculs aboutissent à la loi de vitesse suivante :

$$V_v = \frac{X_c + \frac{2}{\pi}}{\sqrt{X_c^2 + \frac{4}{\pi} \frac{X_v}{X_c - X_v}}} \quad (16)$$

Nous avons donc adopté cette variation. La formule (16) donne la vitesse tangentielle en un point de la ligne de jet en fonction de l'abscisse de ce point et de l'abscisse  $X_c$  du point de recollement.

3. Exposé de la méthode.

Les lettres « prime » sont utilisées pour la partie supérieure du contour. L'équation (8) se décompose de la façon suivante :

$$2\pi\psi(M) = \int_{AB+BC} \log MJ v_J ds_J + \int_{BC} \log MJ v_J ds_J - \int_{A'D'} \log MJ v_J ds_J + g(M) \quad (17)$$

a) Première étape.

Nous fixons arbitrairement la forme de la surface libre en imposant ses asymptotes amont et aval. Nous fixons de même la forme et le point de recollement  $C$  de la ligne de jet.

b) Deuxième étape.

Le point  $M$  étant sur l'un des segments  $AB$  ou  $CD$ , l'équation (17) peut se mettre sous la forme :

$$\int_{AB+CD} \log MJ v_J ds_J = \int_{A'D'} \log MJ v_s ds_J - \int_{BC} \log MJ v_v ds_J + g(M) \quad (18)$$

Les vitesses  $v_s$  et  $v_v$  sont calculées au moyen des formules (15) et (16). Le second membre de l'équation (18) se trouve être entièrement déterminé. L'équation (18) peut être considérée comme une équation intégrale de Fredholm dont la fonction inconnue est la vitesse  $v(J)$  définie sur les deux segments  $AB$  et  $CD$ .

b) Troisième étape.

Nous calculons les fonctions  $(\partial\psi_M/\partial x_M)$  et  $(\partial\psi_M/\partial y_M)$ , à la fois sur la ligne de jet et sur la surface libre.

Les deux relations :

$$y_{M'} = y_{A'} + \int_{x_{A'}}^{x_{M'}} \left( -\frac{\partial\psi_{M'}/\partial x_{M'}}{\partial\psi_{M'}/\partial y_{M'}} \right) dx_{M'} \quad (19)$$

$$y_M = y_B + \int_{x_B}^{x_{M'}} \left( -\frac{\partial\psi_M/\partial x_M}{\partial\psi_M/\partial y_M} \right) dx_M \quad (20)$$

nous permettent d'obtenir une nouvelle approximation de la ligne de jet et de la surface libre.

4. Résolution numérique.

Les différentes étapes du calcul ont été programmées sur un calculateur IBM 360 pour différentes valeurs de paramètres  $H_A$  et  $F_A$ .

Nous avons découpé les lignes  $AD$  et  $A'D'$  en 80 intervalles. La ligne de jet se trouve alors décou-

pée en une quarantaine d'intervalles, le nombre étant variable suivant les itérations. L'intervalle séparant les abscisses de deux points consécutifs a été pris égal à  $0,2 y_B$ .

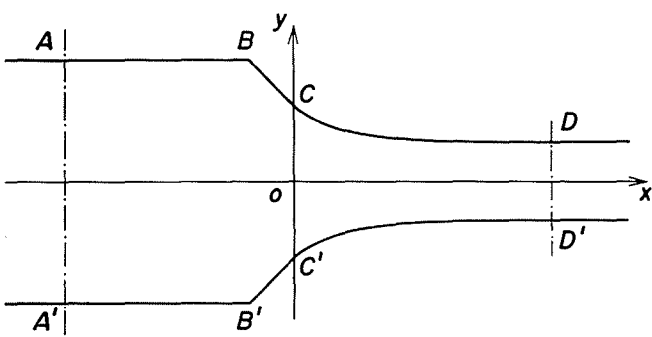
La précision est surtout fonction du nombre de points choisis. Il peut être facilement augmenté sans dépasser les capacités mémorielles de la calculatrice.

Nous pourrions également disposer plus adroitement les points, en les concentrant au voisinage du point de recollement de la ligne de jet.

### III. — Vérification de la méthode visualisation du phénomène

#### 1. Vérification de la méthode [2].

La méthode de simulation par une répartition de tourbillons a été appliquée à un cas simple, déjà résolu : celui de l'ajutage plan (fig. 5).



5/

Cet exemple a ensuite été traité par la transformation conforme.

Une comparaison entre la forme de la ligne de jet obtenue par la méthode de distribution de tourbillons et celle obtenue par la transformation conforme est donnée par la figure 6.

On note une variation de la demi-épaisseur du jet à l'infini de l'ordre de 2,1 %.

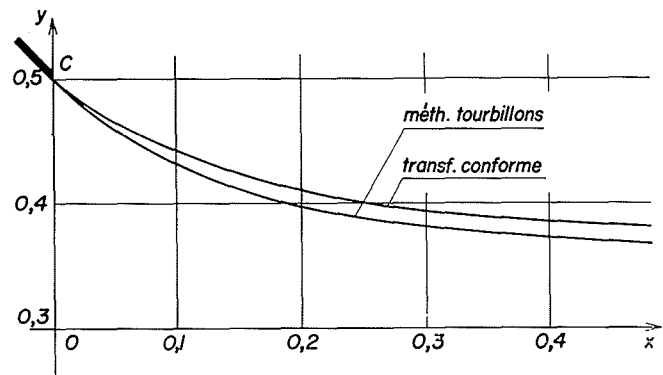
#### 2. Visualisation du phénomène.

Nous avons placé dans un canal horizontal de section carrée (51 cm × 51 cm) et de longueur 9 m une singularité en forme de marche.

La visualisation a été faite à l'aide de poudre d'aluminium injectée en amont de la marche.

Des photographies, prises toutes les demi-secondes, montrent bien l'évolution de particules et de groupe de particules.

La zone tourbillonnaire est très instable. Un temps de pose photographique suffisamment long permet de définir, avec assez de précision, la structure moyenne de l'écoulement.



6/

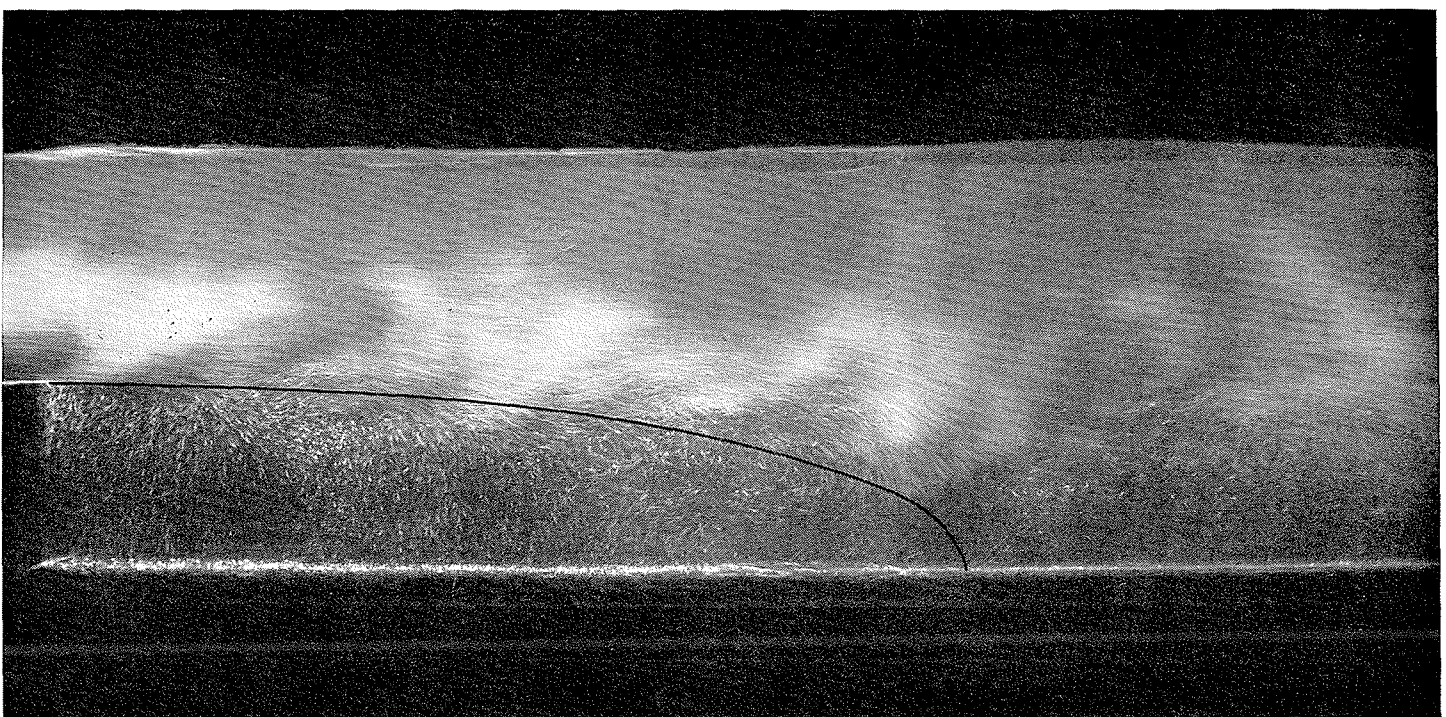


Photo 1/

$F_A = 0,5$      $H_A = 1$

$f = 1,8$      $1/15$  sec.

On distingue deux régions : la région tourbillonnaire et la région d'écoulement extérieur qui se raccordent le long de la ligne de jet. La région extérieure agit par frottement turbulent sur la région tourbillonnaire à travers la zone de mélange.

Nous avons tracé en trait plein sur la photographie présentée ici la ligne de jet théorique.

#### IV. — Conclusion

Nous avons à présent entrepris une étude approfondie de la turbulence dans l'écoulement, à l'aide d'une chaîne d'anémométrie à film chaud.

Nous pouvons déjà constater que la méthode de simulation par répartition de tourbillons donne une représentation de l'écoulement moyen au-dessus d'une singularité en forme de marche.

#### V. — Bibliographie

- [1] MASBERNAT (L.). — Contribution à l'étude du décollement dans les écoulements turbulents de fluides incompressibles. Thèse, Toulouse (1968).
- [2] GUREVICH (M. J.). — Theory of jets in ideal fluids. *Academic Press* (1965).
- [3] SCHLICHTING (H.). — Boundary layer theory. *McGraw Hill*.
- [4] ABRAMOVICH (G. N.). — The theory of turbulent jets. *M.I.T. Press* (1963).
- [5] BIRKHOFF (G.) et ZARANTONELLO (E. H.). — Jets, wakes and cavities. *Academic Press* (1957).
- [6] LAMB (H.). — Hydrodynamics. *Dover*.
- [7] DUSSOL (P.), VAUSSY (P.), PICHON (J.). — Détermination de la ligne de jet d'un écoulement plan à surface libre sur une singularité en forme de marche. *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 268, Série A.

#### Abstract

### Theoretical and experimental study of a jet line above a step in a two-dimensional flow with free surface

by J. Pichon \*

The flow has been simulated by a vortex distribution on the free surface and the jet line. The variation of jet line profiles with varying depths of fluid are shown in terms of Froude number.

For the sake of comparison, the method developed here has been applied to the classical case of Borda-nozzle.

The theoretical results have also been compared with the experimental investigation by aluminium particles, and is shown to be in good agreement.

\* Ing. E.I.M., Doc. Ing. en Hydraulique (Toulouse), Professeur adjoint au Département de Génie civil de la Faculté des Sciences Appliquées. Université de Sherbrooke (Qué) Canada.

