ÉQUATIONS ET MODÈLES MATHÉMATIQUES POUR LE CALCUL DES TRANSFERTS D'EAU DANS LA ZONE DE SOL NON SATURÉE

Communication
présentée au Comité technique
de la Société Hydrotechnique de France
le 12 juin 1969

PAR G. VACHAUD * ET
P. GUÉLIN *

Présentation des équations de l'écoulement

Définition du potentiel.

L'on peut disposer de trois méthodes pour présenter ces équations :

a) soit considérer le mélange sol-eau-air comme une mixture polyphasique continue et rechercher les équations permettant de définir les transferts globaux. Chaque phase est alors considérée comme intimement liée aux autres. C'est la méthode choisie pour aborder ce problème de transfert à partir de la thermodynamique des processus irréversibles (Guélin, 1968; Bolt-Groenevelt, 1969) ou de la mécanique des milieux continus (Raats, 1965).

b) soit considérer que le milieu est formé d'un squelette fixe, sa « matrice », et de deux phases, l'une mouillante (l'eau), l'autre non mouillante (l'air). En recherchant séparément pour chacune de ces phases — indépendamment — les équations de transferts, on obtient deux systèmes d'équations indépendants, les seules relations entre ces équations provenant de l'équation de Laplace :

$$p_c = p_{nw} - p_w$$

déterminant la « pression capillaire » p_c , égale à la différence de pression entre le fluide non mouillant et le fluide mouillant, et de l'équation d'état

des deux phases liquide et gaz. C'est généralement la méthode utilisée par les pétroliers.

c) soit, enfin, négliger complètement l'écoulement de la phase air. Les seules forces agissant sur l'écoulement de la phase liquide sont alors la gravité et les forces de tension superficielle créées au niveau des interfaces eau-air (capillarité). On obtient un système d'équation unique. Cette méthode a été employée par un nombre important de chercheurs en physique des sols (Gardner, 1958; Philip, 1957, ...).

Il est évident que la première méthode est la plus complète et la plus satisfaisante. Elle conduit cependant à une série d'équations généralement assez complexes, mais c'est la seule permettant de saisir et d'analyser toutes les possibilités de transfert.

On peut ainsi montrer que, si l'on définit l'état énergétique de la mixture sol-air-eau par le potentiel chimique μ_i de chaque constituant i du système donné par :

$$\mu_i = \frac{\partial G}{\partial m_i} \quad (1)$$

où :

G est l'énergie de Gibbs du système;

m_i est la masse de constituant i dans le système;

la variation d'énergie de l'eau entre deux points du système peut s'exprimer par :

$$d\mu_w = -\bar{S}'_w dT + \bar{V}'_w dp_w + g dz + \sum_k \frac{\partial \mu_w}{\partial c_k} dc_k \quad (2)$$

où :

$\bar{S}'_w dT$ représente l'effet des variations de températures sur les variations

* Chercheurs au C.N.R.S. Laboratoire de Mécanique des Fluides, Domaine Universitaire, 38 - Saint-Martin d'Hères.

d'énergie, $\bar{\mathcal{S}}_w$ étant l'entropie partielle massique de l'eau;

$\bar{\mathcal{V}}_w dp_w$ représente l'effet de pression, $\bar{\mathcal{V}}_w$ étant le volume partiel massique de l'eau et dp_w la différence de pression d'eau entre les deux points considérés;

gdz représente l'effet de la pesanteur;

$\sum_K (\partial \mu_w / \partial c_k) dc_k$ représente, enfin, les effets osmotiques, c_k étant la concentration massique de sel k dans l'eau.

D'après la définition de μ_i , il est évident que l'équilibre général (état neutre) se produira quand, et seulement quand, on aura entre deux points :

$$\sum_i d\mu_i = 0 \quad (2')$$

Toutes les fois que l'identité (2') ne sera pas réalisée, il se produira des transferts dans le milieu. Si l'on ne s'intéresse qu'au cas de l'eau, il est clair d'après (2) que ces transferts pourront être dus non seulement à l'effet de la gravité ou à des gradients de pression d'eau, mais aussi à des gradients de températures ou de concentrations salines.

Si, dans un premier stade, l'on néglige l'influence de ces deux derniers termes, c'est-à-dire si l'on considère un échantillon isotherme où la phase liquide est constituée par de l'eau pure, on peut montrer en application de (2') que, si la phase gazeuse dans l'échantillon est à la pression atmosphérique, l'on a :

$$\bar{\mathcal{V}}_w dp_w = gd\psi \quad (3)$$

où ψ , défini comme la succion, est égale à la dépression — en hauteur d'eau — mesurée à l'équilibre dans un réservoir lié à l'échantillon par une membrane semi-perméable assurant la continuité en phase liquide entre l'échantillon et ce réservoir. Ce système réservoir-membrane semi-perméable est normalement désigné comme « tensiomètre ». Pour que (3) soit valable, il faut que l'eau dans le réservoir soit en contact avec de l'air à la pression atmosphérique.

Dans ces conditions, on pourra définir entre deux points la variation de potentiel total de l'eau du sol par :

$$d\mu_w = gd(\psi + z) = gd\Phi \quad (4)$$

avec :

$$\Phi = \psi + z \quad (5)$$

Il est cependant bon de signaler deux limitations importantes de cette définition de μ :

a) Si l'air dans l'échantillon de sol est à une pression supérieure à la pression atmosphérique — ce qui se produit notamment dans une cellule de pression — l'identité (3) ne sera pas valable. On montre dans ce cas (Guélin, 1968) que le tensiomètre donnera une information sur la valeur du potentiel chimique total du mélange sol-eau-air, sans qu'il soit cependant possible d'obtenir indépendamment μ_w et μ_g .

Si l'on affecte l'échantillon de sol de l'indice 1, le réservoir de liquide de l'indice 2, l'équilibre entre les deux côtés de la membrane correspondra à :

$$\sum_i \mu_{i,1} = \sum_i \mu_{i,2}$$

En prenant comme valeurs de référence du potentiel chimique de l'eau et du gaz celles correspondantes à l'eau libre et au gaz à la pression atmosphérique on aura donc :

$$(\mu_w + \mu_g)_1 = \mu_{w,2}$$

le terme $\mu_{w,2}$ étant l'analogie de $g\psi$ défini par (3).

b) S'il y a dans le sol des variations de concentration saline, (4) s'écrira :

$$d\mu_w = gd(\psi + z) + d\pi'$$

avec :

$$d\pi' = \sum_k \frac{\partial \mu_w}{\partial c_k} dc_k$$

La mesure de μ_w avec un manomètre ou un capteur ne donnera donc la composante $\bar{\mathcal{V}}_w p_w$ que si l'air du sol est à la pression atmosphérique, et si l'on peut négliger les effets osmotiques.

On sait que ψ est liée à la concentration massique d'eau, ou teneur en eau volumique θ , par une loi à hystérésis définie comme étant la courbe de succion d'un matériau.

Cette loi $\psi(\theta)$ s'obtient généralement en mettant un échantillon sur une plaque semi-perméable et en imposant une certaine dépression à l'eau contenue dans le réservoir en aval de la plaque. Lorsque l'équilibre de pression d'eau est réalisé entre l'échantillon de sol et le réservoir, la pesée de l'échantillon permet d'obtenir sa teneur en eau θ et la mesure de la dépression imposée détermine immédiatement ψ . ψ est une grandeur négative.

Le terme Φ tel qu'il a été défini par (5) pourra donc caractériser dans certaine condition l'état énergétique d'un sol non saturé. On sera naturellement tenté de rapprocher cette valeur de la charge hydraulique ϕ donnée, pour un sol saturé, par :

$$\phi = \frac{p_w}{\rho_w g} + z \quad (5')$$

Equations des transferts.

Afin d'obtenir la valeur quantitative des transferts, on est amené à formuler une hypothèse de linéarité entre le flux et la force généralisée produisant ce transfert. Dans le cas d'un transfert unique, cette relation prend la forme :

$$\bar{J} = L\bar{X} \quad (6)$$

$\bar{J}$ et $\bar{X}$ étant les vecteurs flux et champ de forces généralisées, et le scalaire L représentant le coefficient de transfert (on reconnaîtra ainsi la loi de Darcy, la loi de diffusion, etc.). Lors de phénomènes de transferts couplés, on écrira cette équation sous la forme :

$$\begin{aligned} J_1 &= L_{11}X_1 + L_{12}X_2 \\ J_2 &= L_{21}X_1 + L_{22}X_2 \end{aligned} \quad (7)$$

où les coefficients L (coefficients de Onsager) représentent : les L_{ii} les coefficients de transfert; les L_{ij} les coefficients de couplage.

La valeur des forces généralisées s'obtient à partir des équations de bilans (bilan de masse, d'éner-

gie, et équations d'équilibre). On montre ainsi (Cary, 1965) que, dans le cas d'un transfert couplé d'eau et de chaleur dans un échantillon non saturé, on obtient le système :

$$\begin{aligned} J_w &= -L_{ww} \left(\frac{\partial \mu_w}{\partial x} \right)_T - L_{wq} \frac{d \ln T}{dx} \\ J_q &= -L_{qw} \left(\frac{\partial \mu_w}{\partial x} \right)_T - L_{qq} \frac{d \ln T}{dx} \end{aligned}$$

où J_w et J_q représentent respectivement les flux d'eau et de chaleur, et $(\partial \mu_w / \partial x)_T$ et $(\partial \ln T / \partial x)$ les gradients de potentiels chimiques massiques (à température T donnée) et de température imposés entre les deux faces de l'échantillon.

Les différents termes représentent :

- $L_{ww} (\partial \mu_w / \partial x)_T$ le transfert d'eau qui se produirait à la température T sous le seul effet du potentiel chimique massique [qui peut, dans certains cas, être directement lié à Φ (cf. eq. 4)];
- $L_{wq} (\partial \ln T / \partial x)$ le transfert d'eau induit par gradient de température;
- $L_{qw} (\partial \mu_w / \partial x)_T$ le transfert de chaleur induit par transfert d'eau;
- $L_{qq} (\partial \ln T / \partial x)$ le flux de chaleur produit par conduction dans le sol;

(se reporter à Cary, 1965, pour plus de détails).

On peut ici aussi, comme pour la définition des potentiels, obtenir une simplification importante des équations de transferts si l'on considère uniquement le cas simplifié correspondant au transfert de l'eau pure dans un milieu isotherme et indéformable, avec la phase gazeuse à la pression atmosphérique.

Il n'y a en effet plus de transferts couplés et (7) se ramène alors à :

$$J_w = -L_{ww} \text{grad } \mu_w \quad (8)$$

que l'on peut écrire sous la forme :

$$q = -k(\theta) \text{grad } \Phi \quad (9)$$

avec :

$$k = \frac{L_{ww}}{\rho_w} g$$

L'expression (8) est connue sous le nom de « loi de Darcy généralisée ». La section d'écoulement dans le milieu variant avec la concentration massique d'eau, k — coefficient de conductivité hydraulique — décroît fortement à mesure que la teneur en eau diminue (Richards, 1931; Gardner, 1957, etc.). q est un flux au sens de Darcy.

Pour obtenir l'équation de l'écoulement, il faut également considérer l'équation de bilan massique, qui s'écrit classiquement :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\text{div } q \quad (10)$$

En regroupant (9) et (10), on obtient :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \text{div } [k \text{grad } (\psi + z)] \quad (11)$$

Dans cette expression k et ψ sont des fonctions à hysteresis de θ .

On peut enfin se ramener à une classe d'équations plus connue en introduisant une nouvelle variable (Klute, 1952) :

$$D = k \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (12)$$

définie comme « coefficient de diffusivité ».

L'équation des transferts d'eau se ramène alors à la classe des équations de diffusion, avec coefficient de diffusivité variable :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \text{div } [D(\theta) \text{grad } \theta] + \frac{\partial k(\theta)}{\partial z} \quad (13)$$

dont la résolution nécessite naturellement la détermination de $D(\theta)$ et $k(\theta)$ dans le domaine correspondant à l'histoire du matériau.

Il est bon d'insister sur le fait que l'équation (13) ne représente qu'une partie des transferts possibles. Qu'elle n'est, en outre, qu'une dégénérescence de l'équation plus générale constituée par (7) et les équations générales de bilans, puisque l'on n'a considéré pour l'établir que le premier terme de (7).

Nous reviendrons sur ces équations à la fin de cette communication en étudiant, à titre d'exemple, le système complet formé par la zone non saturée et la zone saturée.

Solutions analytiques simples

La seule solution analytique exacte du problème a été donnée par J.R. Philip, 1955, 1957, et D. Swartzendruber, 1966. Elle est relative à l'étude de l'infiltration dans une colonne horizontale de sol sec.

L'équation de l'écoulement et les conditions aux limites sont alors :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)$$

$$t < 0 \quad \theta = \theta_i \quad x > 0$$

$$t \geq 0 \quad \theta = \theta_0 \quad x = 0$$

De plus $D(\theta)$ est biunivoque.

Par séparation de variable, on peut ramener cette équation à une équation différentielle linéaire, de la forme :

$$\frac{d}{d\theta} \left(D \frac{d\theta}{d\lambda} \right) = -\frac{\lambda}{2} \quad (14)$$

où :

$$\lambda = x t^{-1/2}$$

répondant aux conditions :

$$\lambda(\theta_0) = 0; \quad \lambda(\theta_i) \rightarrow \infty$$

Le changement de variables de θ à λ est connu sous le nom de *transformation de Boltzman*. La solution de cette équation peut s'énoncer ainsi :

« Si l'on suit l'évolution d'une zone de teneur en eau donnée θ , cette évolution correspondra à la loi $x = \lambda t^{1/2}$. »

1/ Infiltration, « Columbia ». Influence de la gravité
 $x = \lambda t^{1/2} \pm \chi t \pm \omega t^{3/2} \dots \pm f_n t^{n/2}$.
«Columbia» infiltration. Effect of gravity.

2/ Infiltration horizontale « Mont-Cenis ». «Mont-Cenis» horizontal infiltration.

3/ Infiltration horizontale « Mont-Cenis ». Relation entre débit unitaire et gradient de succion. Paramètre: teneur en eau $\theta \%$.
Relationship between flux and suction gradient with water content θ as a parameter.

4/ Silt « Mont-Cenis ». Courbe $k(\theta)$. «Mont-Cenis» silt. $k(\theta)$ curve.

5/ Coefficient de diffusivité $D(\theta)$. Diffusivity coefficient $D(\theta)$.

Cette loi est généralement confirmée par des essais d'infiltration. Une fois $\lambda(\theta)$ connu, on peut obtenir :

a) La position de tout point de teneur en eau θ en tout temps t_k par :

$$x_k = x_1 \left(\frac{t_k}{t_1} \right)^{1/2}$$

b) L'évolution du volume d'eau infiltré par :

$$V_w = A f x d \theta$$

soit :

$$V_w/A = S t^{1/2} + C \quad (15)$$

6/ Silt du Mont-Cenis. Valeur de $\Psi(\theta)$ en humidification et en drainage.

"Mont-Cenis" silt. $\Psi(\theta)$ curves for humidification and drainage.

où S est le coefficient de « sorptivité » et A une unité de surface.

C'est un des résultats remarquables : les volumes d'eau infiltrés doivent varier en $t^{1/2}$, et les débits en $t^{-1/2}$.

Dans le cas d'un écoulement vertical, il faut tenir compte du terme $(\partial k / \partial z)$. Philip propose une solution approchée, obtenue par approximations successives, sous la forme :

$$x = \lambda t^{1/2} \pm \chi t + \omega t^{3/2} \pm \dots \pm f_n t^{n/2}$$

et :

$$V_w/A = S t^{1/2} \pm B t \pm C$$

le signe $+$ étant relatif à l'infiltration verticale, la gravité jouant alors dans le même sens que la capillarité.

Il faut noter que λ est extrêmement sensible aux valeurs de la masse volumique, pour un sol donné.

On trouvera figures 1 et 2 des résultats expérimentaux (Vachaud, 1968) permettant de vérifier cette approche théorique. Ces résultats ont été obtenus sur des échantillons de silt (silt « Columbia » et silt du « Mont-Cenis »). La figure 1 permet d'apprécier l'influence de la gravité lors d'un processus d'infiltration. On notera que l'on a bien : $x = \lambda t^{1/2}$ pour une infiltration horizontale (courbes paramétrées en teneur en eau θ). La figure 2 donne l'évolution des volumes d'eau et débits infiltrés

pendant une infiltration dans une colonne horizontale.

Les résultats reportés figure 3 sont une confirmation de la validité de la loi de Darcy généralisée, écrite sous la forme donnée par l'équation (9). La relation $q = f(\text{grad } \Phi)$ est bien linéaire pour chaque teneur en eau θ ; la pente des demi-droites donne la valeur de $k(\theta)$ reportée figure 4. Afin de saisir l'importance de la non-linéarité de l'équation (13) et celle de l'hystérésis de la loi $\Psi(\theta)$ nous donnons également figures 5 et 6 les valeurs expérimentales obtenues pour $D(\theta)$ et $\psi(\theta)$ (Vachaud, 1966).

Solutions numériques

Les difficultés rencontrées dans la résolution numérique de l'équation (11) ou (13) proviennent essentiellement, d'une part de la très forte non-linéarité de ces équations, les lois $D(\theta)$ ou $k(\theta)$ variant facilement dans un rapport de 10^3 dans la gamme de variations normales des teneurs en eau (fig. 4, 5) et, d'autre part, de la forte variation temporelle des vitesses d'évolution, le phénomène pouvant être très rapide au début, puis devenir extrêmement lent par la suite.

Les travaux numériques effectués sur les modèles mathématiques sont relativement peu nombreux et rarement assortis de vérification expérimentale.

Les premiers essais de résolution numérique semblent dus à Day-Luthin (1956). Parmi les travaux particulièrement intéressants, signalons ceux de Hanks - Bouwers (1962); ceux de Rubin, ayant commencé en 1963 par une étude de l'infiltration suivie de simulations numériques portant sur les infiltrations liées aux précipitations (1964), puis sur l'influence de l'hystérésis (1966) et tout dernièrement sur l'infiltration bidimensionnelle (1968).

Se sont également intéressés à la résolution de problèmes faisant intervenir l'hystérésis : Whisler et Klute (1965), Ibrahim - Brutsaert (1968) et Guélin (1969).

Les différents schémas proposés diffèrent essentiellement par la méthode de discrétisation adoptée, mais surtout par la détermination de la valeur de la variable k ou D à choisir durant le pas de temps considéré.

Il est en effet clair que si l'on considère le terme $(\partial/\partial x) [k(\partial\psi/\partial x)]$ ou son analogue $(\partial/\partial x) [D(\partial\theta/\partial x)]$ les valeurs k ou D pourront être affectées soit à ψ_k ou θ_k au début du pas, soit à ψ_{k+1} ou θ_{k+1} à la fin du pas, soit à $1/2(\psi_k + \psi_{k+1})$ ou $1/2(\theta_k + \theta_{k+1})$.

Compte tenu de la forte variation de $k(\psi)$ ou $D(\theta)$, ce choix est assez important.

On pourrait, *a priori*, songer à utiliser un schéma explicite qui permet seul une détermination immédiate de θ au point j et à l'instant $t + 1$ en fonction θ aux instants précédents, et quelle que soit la forme de D .

Il est ainsi courant d'utiliser comme approximation de $D(\theta)$ une loi exponentielle. L'équation (13) peut alors s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[b e^{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right]$$

qui peut se discrétiser sous la forme :

$$\frac{\Delta x^2}{\Delta t} (\theta_j^{t+1} - \theta_j^t) = \exp(\theta_{j+1}^t) (\theta_{j+1}^t - \theta_j^t) - \exp(\theta_{j-1}^t) (\theta_j^t - \theta_{j-1}^t)$$

permettant donc le calcul immédiat et direct de θ_j^{t+1} .

Il faut cependant noter une restriction fondamentale à ce type de schéma; il n'est stable que si l'on a :

$$D(\Delta t / \Delta x^2) \leq 1/2$$

si bien que l'on est conduit à des pas de temps très nombreux, et très petits, sitôt que le pas spatial est faible.

Si l'on considère ainsi une colonne de 36 cm découpée en 360 tranches de 0,1 cm, si D est de l'ordre de 1/2 cm²/mn, il faut :

$$\Delta t \leq 0,01 \text{ mn}$$

Un essai durant 1 h exigerait ainsi 6 000 pas de temps.

On rencontre également des problèmes importants lorsque D varie rapidement, puisqu'il faut procéder à une variation simultanée du pas de temps.

Il devient obligatoire pour résoudre des systèmes d'équations à coefficient variable d'effectuer une relaxation par itération, ce qui allonge le temps de calcul. Il faut donc veiller à ce que le nombre de pas temporels ne soit pas trop élevé, tout en ayant la possibilité de faire varier rapidement ce pas. Les schémas *implicites* supportent sans défaillance de stabilité un pas de temps croissant très rapidement, ou même des sauts de temps prédéterminés. Plus la variation de D est importante, plus le schéma demande naturellement une grande finesse.

Un des schémas implicites classiques est celui donné par Rubin. La discrétisation de l'équation (13) est effectuée en :

$$-p_j \theta_{j+1}^{t+1} + q_j \theta_j^{t+1} - r_j \theta_{j-1}^{t+1} = s_j \quad (17)$$

avec :

$$p_j = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} D_{j+1/2}^{t+1/2}$$

$$q_j = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} D_{j+1/2}^{t+1/2}$$

$$r_j = 2 + p_j + q_j$$

$$s_j = p_j \theta_{j+1}^t + (2 - p_j - q_j) \theta_j^t + q_j \theta_{j-1}^t - 2 \frac{\Delta t}{\Delta x} (k_{j+1/2}^{t+1/2} - k_{j-1/2}^{t+1/2})$$

Pour estimer la valeur de $D_{j+1/2}^{t+1/2}$ et $k_{j+1/2}^{t+1/2}$, Rubin calcule D et k à partir des valeurs suivantes : on forme d'abord :

$$\theta_{j-1}^{t+1/2} = \frac{3}{2} \theta_{j-1}^t - \frac{1}{2} \theta_{j-1}^{t-1}$$

$$\theta_j^{t+1/2} = \frac{3}{2} \theta_j^t - \frac{1}{2} \theta_j^{t-1}$$

$$\theta_{j+1}^{t+1/2} = \frac{3}{2} \theta_{j+1}^t - \frac{1}{2} \theta_{j+1}^{t-1}$$

puis :

$$\theta_{j+1/2}^{t+1/2} = \frac{1}{2} [\theta_j^{t+1/2} + \theta_{j-1}^{t+1/2}]$$

$$\theta_{j-1/2}^{t+1/2} = \frac{1}{2} [\theta_j^{t+1/2} + \theta_{j+1}^{t+1/2}]$$

et l'on prend $D = D(\theta)$ et $k = k(\theta)$. On peut voir que ce schéma se ramène à celui de Crank - Nicholson (Richtmeyer, 1957).

La difficulté du schéma réside essentiellement sur le calcul de θ , que Rubin qualifie de « estimated value ». Dans un schéma analogue Whisler et Klute (1965) parlent même de « arbitrarily » pour qualifier la valeur de $k'(\theta)$.

Pour lever cette ambiguïté, Guélin (1969) a récemment proposé la méthode de la « double grille », consistant en deux grilles imbriquées dont l'une est dite phénoménologique (P), et l'autre, grille des variables essentielles (V).

On montre, en effet, que les coefficients phénoménologiques tels que D ou K intervenant dans les équations envisagées précédemment relient les gradients des fonctions de la variable essentielle (teneur en eau ou succion) au flux (comme en mécanique classique, le gradient de température est lié au flux thermique par le coefficient de Fourier; le gradient de déplacement au flux de tension par le coefficient de Hook, etc.).

La discrétisation locale par le schéma de la double grille attache la variable essentielle θ de l'équation :

$$(\partial \theta / \partial t) = (\partial / \partial x) [D(\theta) \partial \theta / \partial x] = (\partial / \partial x) J(\theta)$$

à la grille (V) et les gradients aux points de la grille (P). On peut dès lors écrire :

$$[(\theta_j^{t+1} - \theta_j^t) / (\Delta t)] = [(J_k^{t+1} - J_{k-1}^{t+1}) / (\Delta x)]$$

avec :

$$J_k^{t+1} = D_k^{t+1} [(\theta_{j+1}^{t+1} - \theta_j^{t+1}) / (\Delta x)]$$

$$J_{k-1}^{t+1} = D_{k-1}^{t+1} [(\theta_j^{t+1} - \theta_{j-1}^{t+1}) / (\Delta x)]$$

et :

$$D_k^{t+1} = D(\theta_k^{t+1})$$

$$D_{k-1}^{t+1} = D(\theta_{k-1}^{t+1})$$

Le schéma est bien implicite du type le plus classique.

Cependant, dans les méthodes classiques, on remplace généralement la détermination implicite de la phénoménologie par une détermination explicite dont la plus simple consiste à écrire :

$$D_k^{t+1} \approx D(\theta_k^t)$$

$$D_{k-1}^{t+1} \approx D(\theta_{k-1}^t)$$

Ce qui détermine D avec les valeurs de θ données par le dernier pas de temps calculé.

La méthode utilisée par Guélin nécessite une relaxation du champ par itération, qui amène à des valeurs de $D(\theta_k^{t+1})$ et $D(\theta_{k-1}^{t+1})$ à condition d'estimer convenablement les valeurs initiales : $D(\theta_k^t)$ et $D(\theta_{k-1}^t)$.

Cette méthode permet notamment d'obtenir une définition plus raffinée qu'avec les méthodes classiques pour les fonctions θ ou D . Ce qui est notamment nécessaire pour les problèmes d'hystérésis.

Discussion et conclusion

L'exposé précédent trouve, en fait, tout son intérêt dans le traitement complet du problème des nappes à surfaces libres. On ne peut en effet pas dissocier zone saturée et zone non saturée, puisque tous les transferts de la surface du sol à la nappe, ou vice-versa, qui fixent la position de la nappe à tout instant, sont en fait conditionnés par les équations du mouvement dans la zone non saturée.

Traiter l'hydrodynamique des nappes à surface libre comme un problème propre à un domaine limité par la surface libre de la nappe et un fond imperméable nous semble relever d'un arbitraire peu logique, et devant certainement conduire à des solutions relativement erronées.

Les notions introduites dans les paragraphes précédents peuvent permettre, en reprenant des schémas développés par Liakopoulos (1965), Rubin (1966) et Freeze-Witherspoon (1966), d'établir une *équation unique* permettant de traiter d'une manière continue tout le domaine d'écoulement limité par la surface du sol et un fond imperméable. La zone saturée est alors considérée comme un sous-ensemble particulier de ce domaine.

Nous avons en effet, tout au long de l'exposé précédent, relevé les analogies entre la définition des variables et des lois caractéristiques dans la zone saturée et la zone non saturée.

Il en va ainsi de la charge hydraulique, qui peut se définir en tout point par :

$$\Phi = \frac{p_w}{\rho g} + z$$

($p_w/\rho g$) étant positif dans la zone saturée, négatif et égal à ψ dans la zone non saturée (et dans ce cas liée de plus à la teneur en eau θ), et z une cote arbitraire.

De même, la loi phénoménologique reliant le flux au gradient de potentiel (loi de Darcy) peut s'écrire en tout point :

$$q = -k \text{ grad } \Phi$$

avec $k = k_1$ dans la zone saturée, $k = k_2(\theta)$ dans la zone non saturée.

Enfin, l'équation de continuité peut s'écrire en tout point, si l'on suppose l'eau et le sol incompressible :

$$-\text{div } q = (\partial\theta/\partial t)$$

ce qui donne $\text{div } q_1 = 0$ dans la zone saturée, et $\text{div } q_2 = -(\partial\theta/\partial t)$ dans la zone non saturée.

Pour écrire l'équation générale de l'écoulement, il semble qu'il soit plus simple, dans ce cas, de choisir la charge Φ comme variable essentielle plutôt que la teneur en eau θ . Cette dernière variable est en effet constante, et identique à la porosité, dans toute la zone saturée.

Si l'on introduit une nouvelle variable :

$$C = (\partial\theta/\partial\psi)$$

définie par Richards (1931) comme la « capacité capillaire », il est facile de montrer que l'équation unique conditionnant tous les transferts d'eau (dans un régime isotherme et sans concentration saline), en dessous et en dessus de la surface libre d'une nappe — définie par le lieu des points où l'on a : $(p_w/\rho g) = 0$ — est donnée, dans un problème bidimensionnel, par :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial k}{\partial z} = c \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (18)$$

avec :

— dans la zone saturée :

$$k_1 = \text{cte}; \quad c_1 = 0 \quad (19 a)$$

— dans la zone non saturée :

$$k_2 = k_2(\psi); \quad c_2 = c_2(\psi); \quad \psi = \psi(\theta) \quad (19 b)$$

On voit ainsi sans difficulté que dans la zone saturée l'équation (18) se ramène à l'équation classique à laplacien nul.

L'équation (18) devra être résolue en utilisant par exemple le schéma donné par l'équation (17), en fonction des conditions suivantes :

- une condition initiale fixée : position de la nappe au temps $t = 0$, et répartition de $\Phi(z)$ au temps $t = 0$;
- des conditions aux limites connues :
 - débits d'évaporation ou de réalimentation imposés à la surface du sol, donc valeur de Φ_2 ou $\text{grad } \Phi_2$ à la surface du sol;
 - débits d'alimentation ou de fuite à la base de la nappe, donc valeurs de Φ_1 ou $\text{grad } \Phi_1$ à la base de la nappe;
 - la surface libre est à tout instant définie par $\psi = 0$.

On notera que la résolution du système (18)-(19) nécessite le recours à des méthodes d'itération, pour tester les conditions k_i et c_i à utiliser au point flottant (x_j, z_j), d'où l'intérêt de la méthode de la double grille.

Une des difficultés essentielles provient de la définition des conditions aux limites en pression à la surface du sol.

On trouvera, figure 7, un schéma purement formel, permettant d'estimer l'évolution des lois $\theta(z, t)$; $k(z, t)$; $\Phi(z, t)$ dans un problème de recharge de nappe.

Il apparaît ainsi que la zone de sol non saturée ne peut être prise en compte ni par l'introduction de concepts élémentaires, comme la rétention capillaire, la capacité au champ, le coefficient d'emma-

On suppose que sous l'effet d'une pluie entre t_1 et t_2 la nappe remonte de Δz

7/ Schéma de recharge de nappe.

Diagram for the recharge of a water-table aquifer.

gasinement, qui peuvent entre autres donner l'image d'un système figé, alors que cette zone est au contraire un champ de transferts permanents; ni au moyen de tout autre système simple.

Ce n'est, de toute façon, sûrement pas en négligeant purement et simplement l'influence de cette zone, comme cela est encore fait dans le traitement classique des problèmes d'hydrodynamique des nappes, que l'on pourra obtenir des résultats satisfaisants.

Certes, le problème est complexe, mais faut-il rappeler que cette zone de sol conditionne tous les transferts vers, ou à partir, des nappes : réalimentation, évaporation, mais aussi pollution; donc le bilan hydrique quantitatif et qualitatif et, également, tout le système végétatif de la vie sur terre.

Il serait exagéré d'avoir besoin d'un ordinateur pour programmer l'arrosage d'un pot de fleurs, et le vieil empirisme semble jusqu'alors avoir relativement bien réussi dans ce domaine.

Il est cependant des domaines où seule la connaissance du mécanisme des transferts dans la zone non saturée permettra de remédier à des situations catastrophiques. Faut-il citer des exemples de remontées de sel provenant d'une irrigation mal conditionnée? La lutte contre la latérisation des sols tropicaux? La pollution des nappes? etc.

Des moyens de lutte efficace ne pourront être développés que par une concertation étroite entre physiciens, mathématiciens, hydrogéologues et agronomes. Nous espérons que ces journées d'études permettront d'établir cette concertation indispensable pour tous.

Bibliographie

- BOLT (G. H.), GROENEVELT (Ph.). — Coupling phenomena as a possible cause of "non-darcian" behaviour of water in soils. Colloque « Transferts dans les milieux poreux non saturés », Grenoble, mars 1969. Publié dans *Bulletin A.I.H.S.*, vol. XIV, 1-28, 1969.
- CARY (J. W.). — Water flux in moist soils. Thermal versus suction gradients. *Soil Sci.*, 100, 168-175 (1965).
- DAY (R.), LUTHIN (J. N.). — A numerical solution of the differential equation of flow for a vertical drainage problem. *Soil Sci. Soc. Am. Proc.*, 20, 443-447 (1956).
- FREEZE (R. A.), WITHERSPOON (P. A.). — Theoretical analysis of regional groundwater. I: Analytical and

numerical solutions to the mathematical model. *Water Resources Res.* 2, 641-656 (1966).

GARDNER (W. R.). — Mathematics of isothermal water conduction in unsaturated soils. *Highway Res. Board*, Spec. rep. 40, 78-87 (1958).

GUÉLIN (P.). — Une dynamique de filtration lente des mixtures polyphasiques continue. *C.R. Acad. Sciences, Paris*, 226, 576-578 (1968).

GUÉLIN (P.). — Intégration d'une équation de diffusion comme préliminaire à la simulation numérique des redistributions de fluides en milieux poreux non saturés. *C.R. Acad. Sciences, Paris*, 268, 1297-1299 (1969).

GUÉLIN (P.). — Milieux poreux non saturés et théorie des mixtures. Colloque « Transferts dans les milieux poreux non saturés », Grenoble, mars 1969. *Bulletin A.I.H.S.*, vol. XIV, 29-48 (1969).

HANKS (R. J.), BOUWERS (S. A.). — Numerical solution of the moisture flow equation into layered soils. *Soil Sci. Soc. Am. Proc.*, 26, 530-534 (1962).

IBRAHIM (H. A.), BRUTSAERT (W.). — Intermittent infiltration into soils with hysteresis. *Proc. A.S.C.E.*, Hy. 1, 113-137 (1968).

KLUTE (A.). — Some theoretical aspects of the flow of water in unsaturated soils. *Soil Sci. Soc. Am. Proc.*, 2, 641-655 (1952).

LIAKOPOULOS (A. C.). — Theoretical solution of the unsteady unsaturated flow problems in soils. *Bul. Int. Association of Scientific Hydrology*, X, 5-39 (1965).

PHILIP (J.). — Numerical solution of equations of the diffusion type with diffusivity concentration-dependent. *Trans. Faraday Soc.*, 51, 885-892 (1955).

PHILIP (J.). — The theory of infiltration, I. *Soil Sci.*, 83, 345-357 (1957).

RAATS (P. E.). — Development of equations describing transport of mass and momentum in porous media with special reference to soils. *Ph. D. Thesis*, University of Illinois (1955).

RICHARDS (L. A.). — Capillary conduction of liquids through porous mediums. *Physics*, I, 318-333.

RICHTMEYER (R. D.). — Difference methods for initial value problems. *Interscience Publishers, Inc.* New York (1931).

RUBIN (J.), STEINHARDT (R.). — Soil water relations during rain infiltration. I: Theory. *Soil Sci. Soc. Am. Proc.*, 28, 614-619 (1963).

RUBIN (J.). — Numerical analysis of ponded rainfall infiltration, Symp. on water in the unsaturated zone. Wageningen. Publication n° 82, *Bul. A.I.H.S.*, 440-451 (1966).

RUBIN (J.). — Theoretical analysis of two-dimensional, transient flow of water in unsaturated and partly unsaturated soils. *Soil Sci. Soc. Am. Proc.*, 32, 607-615 (1968).

SWARTZENDRUBER (D.). — Variable separate solution of the horizontal flow equation with non constant diffusivity. *Soil Sci. Soc. Am. Proc.*, 30, 7-11 (1966).

VACHAUD (G.). — Etude d'une redistribution après l'arrêt d'une infiltration horizontale. Symp. on water in the unsaturated zone, Wageningen. Publication n° 82, *Bul. A.I.H.S.*, 415-426 (1966).

VACHAUD (G.). — Vérification de la loi de Darcy généralisée et détermination de la conductivité capillaire à partir d'une infiltration horizontale. Symp. on water in the unsaturated zone, Wageningen. Publication n° 82, *Bul. A.I.H.S.*, 277-294 (1966).

VACHAUD (G.). — Contributions à l'étude des problèmes d'écoulement en milieux poreux non saturés. Thèse de Doctorat ès-Sciences Physiques, Laboratoires de Mécanique des Fluides, Grenoble (1968).

WHISLER (F. D.), KLUTE (A.). — The numerical analysis of infiltration, considering hysteresis, into a vertical column at equilibrium under gravity. *Soil Sci. Soc. Am. Proc.*, 29, 489-494 (1965).

Discussion

Président : Pr. L. ESCANDE

Cette communication est exposée par M. VACHAUD.

M. le Président félicite MM. VACHAUD et GUÉLIN pour leur excellente analyse critique des divers modèles mathématiques actuellement utilisés et pour les perfectionnements qu'ils ont apporté à ces derniers.

Il ouvre la discussion en donnant la parole à M. DUBREUIL qui pose la question suivante :

« Au cours des vérifications expérimentales des équations de transfert couplés, quelle part relative a-t-on observé pour le flux de chaleur — ou pour le flux dû au potentiel osmotique — par rapport au flux dû au potentiel gravitaire ? »

Toute une série d'essais ont été effectués, dit M. VACHAUD, aux Etats-Unis (Taylor-Cary), aux Pays-Bas (Bolt), etc. Ils avaient pour objet de déterminer la valeur des coefficients caractéristiques dans divers cas de flux couplés : chaleur-eau, sel-eau, chaleur-sel, électricité-sel, électricité-eau. Dans chacun de ces cas, on soumet un échantillon de sol à des gradients bien déterminés ; dans ce cas du couple sel-eau, par exemple, on impose à l'échantillon des gradients de teneur en eau et des gradients de potentiel osmotique en plaçant l'échantillon de sol entre deux réservoirs à pressions différentes contenant deux solutions salines de concentration différentes. Pour plus de détail, on pourra se référer aux publications suivantes :

- W. L. HUTCHESON (1958). — Moisture flow induced by thermal gradients within unsaturated soils. *Highway Res. Board*, Spec. Rep. 40, p. 113-133.
- D. G. MILLER (1960). — Thermodynamics of irreversible processes. The experimental verification of the Onsager reciprocal relations. *Chem. Review*, v. 60, p. 15-37.
- M. A. QAYYAM, W. D. KEMPER (1962). — Salt concentration gradients in soils and their effects on moisture movement and evaporation. *Soil Sci.*, v. 93, p. 333-342.
- S. A. TAYLOR, J. W. CARY (1964). — Linear equations for the simultaneous flow of matter and energy in a continuous system. *Soil Sci. Soc. Am. Proc.*, v. 28, p. 167-172.
- M. H. ABD-EL-AZIZ, S. A. TAYLOR (1965). — Simultaneous flow of water and salt through unsaturated media. *Soil Sci. Am. Proc.*, vol. 29, p. 141-43.
- J. W. CARY (1965). — Water flux in moist soils. Thermal versus suction gradients. *Soil Sci.*, vol. 100, p. 168-175.
- R. D. JACKSON, D. A. ROSE, H. L. PENMANN (1965). — Circulation of water in soil under a temperature gradient. *Nature*, vol. 205, p. 314-316.
- J. W. CARY (1966). — Soil moisture transport due to thermal gradients. Practical aspects. *Soil Sci. Soc. Am. Proc.*, v. 30, p. 428-433.
- J. LÉREY, W. D. KEMPER (1969). — Movement of water and salt through a clay-water system. Experimental verification of Onsager reciprocal relation. *Soil Sci. Soc. Am. Proc.*, v. 33, p. 25-29.
- D. K. CASSEL, D. R. NIELSEN, J. W. BIGGAR (1969). — Soil water movement to imposed temperature gradients. *Soil Sci. Soc. Am. Proc.*, v. 33, p. 493-500.

On a pu dans certaines expériences du type « chaleur-eau » chiffrer l'importance des flux d'eau obtenus sous un gradient de pression et un gradient de chaleur déterminés. L'importance relative des deux flux est fonction de la suction du sol ; plus le sol est « désaturé », plus les gradients thermiques deviennent importants par rapport aux gradients de pression.

Si l'on se rapporte aux résultats expérimentaux donnés par J. W. CARY (1965) (article précité) — résultats qui ne sont valables que pour le sol considéré qui est un limon — on notera que :

- si le sol est porté à une suction de 67,5 cm d'eau, un gradient de température de 0,5° C/cm produit le même écoulement d'eau qu'un gradient de suction de 2 cm d'eau/cm.
- si le sol est porté à une suction de 450 cm d'eau, le même gradient de température produit un écoulement d'eau

identique à un gradient de suction de 250 cm d'eau par centimètre. Dans ce dernier cas, le transfert d'eau induit par gradient de température se fait essentiellement en phase vapeur.

M. DEGALLIER intervient en ces termes :

« Un exemple courant de flux couplé est celui utilisé fréquemment par les mécaniciens du sol : quand on applique une charge sur un sol, un tassement se produit. Les mécaniciens des sols appliquent des équations semblables à celles exposées tout à l'heure en superposant les flux de potentiels d'eau d'une part, et d'autre part, les potentiels de charge mécanique. C'est une simple superposition découlant de l'hypothèse que ces phénomènes obéissent à une loi linéaire. Cela donne d'ailleurs des résultats acceptables ; la méthode est donc bonne. Pourquoi ne pas l'appliquer à notre problème ? »

« L'équipe GUÉLIN-VACHAUD a mis au point un programme de traitement de l'écoulement en régime non saturé tenant compte de l'hystérésis.

« Je me demande s'il ne suffirait pas d'ajouter au même programme les différents effets, en introduisant les potentiels capillaires et les potentiels osmotiques. On ferait de même avec les potentiels thermiques, mécaniques ou de contre-pression d'air. Je crois qu'on arriverait ainsi à une solution.

« J'étais très pessimiste, tout à l'heure, en parlant des rares retombées de la « théorie » sur la « pratique » ; mais avec l'approche présentée par M. VACHAUD, je crois que désormais on dispose d'une méthode qui doit être directement applicable à de nombreux cas de terrain. »

D'autre part, M. DEGALLIER se montre insatisfait de la manière dont on traite jusqu'ici, les effets d'hystérésis dans les milieux non saturés ; peut-être, dit-il pourrions-nous chercher des analogies avec ce qui a été fait dans des domaines moins complexes. D'ailleurs, l'importance réelle de cette hystérésis est fort mal connue sur le terrain. Grande dans la zone agricole où l'humidité évolue d'une valeur très faible à une valeur très forte à la suite d'une pluie survenant après une longue période de sécheresse, cette importance doit être très réduite au-delà de 2 ou 3 m de profondeur où les variations de l'humidité sont généralement faibles.

M. DEGALLIER souligne, d'autre part, que les mesures effectuées à la sonde à neutrons donnent parfois des « profils » peu dispersés en période de drainage, d'assèchement et de descente de la nappe et montrent, au contraire, une grande dispersion des « profils » afférents à la phase d'humectation.

Sur ce dernier point, M. VACHAUD répond en rappelant que la sonde à neutrons permet de mesurer des variations de volume et non pas la perméabilité, et que pour passer de l'un à l'autre, il faut avoir des gradients. Or, toutes les données expérimentales qui ont été collectées jusqu'ici n'ont jamais montré l'hystérésis, ou n'ont montré qu'une hystérésis relativement négligeable.

D'autre part, dit M. VACHAUD, je suis un peu pessimiste en ce qui concerne le programme de calcul que vous avez proposé, l'ordinateur ne rend que ce qu'on lui a donné, et la grosse difficulté en ce qui concerne l'hystérésis, c'est de lui donner la bonne relation de $\Psi(\theta)$ et c'est le point sur lequel nous achoppons.

Pour M. HABIB, il ne paraît pas évident que $K(\theta)$ soit bi-univoque. On peut avoir des transferts avec réversibilité tant qu'on ne change pas grand chose à la géométrie de l'eau dans le sol. Mais si on modifie cette géométrie à teneur en eau constante, il est tout à fait probable que K varie : le transfert de l'eau dans un sol est certainement beaucoup plus affecté par la forme géométrique de l'eau que par sa qualité. Les mesures de $K(\theta)$ qui ont été faites (lesquelles sont très difficiles) ont peut-être été placées dans une situation qui n'a pas modifié cette géométrie ?

Un échange de vue sur ce point entre M. Habib et Vachaud montre que les résultats expérimentaux disponibles peuvent être interprétés de façons parfaitement contradictoires.

Compte tenu de la complexité de la résolution numérique de l'équation de l'écoulement en milieu poreux, dit M. THIR-

rior, on peut examiner les possibilités offertes par le calcul analogique. En collaboration avec M. Riquemal, Maître de Recherche au C.N.R.S., nous avons envisagé l'emploi de la cuve rhéographique. Soit l'équation fondamentale:

$$\operatorname{div} [K(\Psi) \operatorname{grad} \Psi] + \frac{\partial K}{\partial Z} = \frac{\partial \theta}{\partial T}$$

On peut faire intervenir une fonction intermédiaire de calcul:

$$Y = \int_0^\Psi K(\Psi) d\Psi$$

Alors l'équation devient:

$$\nabla^2 Y = \frac{\partial K(Y)}{\partial Z} + \frac{\partial \theta(Y)}{\partial T}$$

Le premier membre peut être étudié directement par la mesure électrique sur cuve rhéographique ou papier télé-deltos.

Le deuxième membre sera simulé après discrétisation par des injections localisées de courant.

Sous forme plus physique, on peut simuler la variation de perméabilité en faisant varier dans le temps et de manière convenable la hauteur d'électrolyte:

- 1° soit, par la modification de la position d'une membrane supérieure;
- 2° soit, par la modification, à l'aide de vases communicants et noyaux flotteurs, du niveau dans des petits godets dans lesquels la hauteur d'eau représente la conductivité hydraulique.

Le réglage des courants d'injection et le mouvement des pistons peuvent être commandés par un ordinateur digital, muni d'entrée et de sortie analogiques. On effectue alors du calcul hybride moyen de traitement dont notre Laboratoire a déjà une brève expérience.

M. FREDOROFF apporte quelques résultats d'expérience:

Pour illustrer la discussion sur l'hystérésis de la relation tension-humidité, nous disposons, dit-il, de données obtenues sur le terrain depuis 5-6 ans. La relation expérimentale tension-humidité, est une courbe quasiment verticale, la tension variant de 0 à 300 mbar alors que la teneur en eau reste pratiquement constante. Il y a dans ce domaine, superposition des courbes en humectation et en drainage, et l'hystérésis n'apparaît donc pas.

Par ailleurs, la tension nulle ne correspond pas à un remplissage complet de la porosité. Seules les courbes obtenues en laboratoire correspondent aux courbes classiques s'infléchissant à partir de la saturation totale.

Ces résultats de terrain posent certainement des problèmes pour l'utilisation des schémas de calcul, à la résolution des problèmes d'infiltration *in situ*.

M. MULL intervient en ces termes:

« M. le Dr VACHAUD a présenté un mémoire sur la propagation unidimensionnelle, horizontale et verticale, de l'eau dans le sol. Son exposé repose principalement sur la théorie de Philip. Ma question est la suivante: « A-t-on étudié le problème qui consiste à décrire la propagation d'un liquide dans le sol par la théorie de la diffusion, avec l'hypothèse d'une source ponctuelle? Dans mon étude de la propagation des huiles minérales dans le sol à la suite d'accidents, j'ai résolu ce problème à l'aide de la théorie du potentiel, en supposant un « flux de piston » (Kolbenfluss). Il serait intéressant de savoir s'il existe des solutions basées sur la théorie de la diffusion. »

Actuellement, répond M. VACHAUD, nous avons étudié uniquement les problèmes d'écoulements horizontaux et verticaux; mais nous sommes en train de mettre au point un modèle à deux dimensions avec injection sur une partie de la surface du sol, puis sur toute la surface du sol, puis ponctuellement. Le modèle mesure à peu près 3 m sur 2 m de haut; il comporte un système de mesure automatique des pressions et un système de mesure des teneurs en eau dans tout l'ensemble. Une centrale de mesure permettra de traiter les informations sur les teneurs en eau en fonction du temps.

L'appareillage est en cours de construction, et nous sommes en train de résoudre numériquement la dernière équation à deux dimensions par analyse numérique.

M. le Président remercie, à nouveau, M. VACHAUD en soulignant le grand intérêt de la discussion qu'il a suscitée.

1/ Relations expérimentales entre la tension et l'humidité du sol :
T : mesures de terrain à l'aide de tensiomètre ;
L : mesures de laboratoire par pression sur échantillon non remanié.

Experimental relationships between pressure and soil water content :
T : field tensiometer measurements ;
L : laboratory pressure tests on an undisturbed sample.

2/ Relation expérimentale entre la tension et l'humidité du sol. Mesures de terrain avec enregistrement de la tension.

Experimental relationship between pressure and soil water content.
Field measurements, including pressure recordings.

Abstract

Equations and mathematical models used to calculate water transfer in unsaturated ground

If one attempts to approximate the study of flow in unsaturated porous media to the well-known and long-developed physical theory of flow in saturated porous media, one runs into three basic difficulties which notably concern the following:—

1. The definition and physical meaning of the system of generalised forces generating flow (in a saturated medium, this system reduces to friction and gravity forces).
2. The definition and measurement of transfer coefficients and their very considerable variation with the basic variable, i.e. the water content of the considered medium (in a saturated medium the transfer —i.e. permeability— coefficient is a constant).
3. The influence of hysteresis effects, as the “history” of the material directly governs its subsequent evolution.

A relatively complete system of transfer equations is developed, followed by a study confined to isothermal pure water movement between the ground surface and a water table. A simple case of an analytical solution is presented to begin with, namely unidimensional infiltration into dry ground. As the transfer equations are very distinctly parabolic, this limits to some extent the possibilities of an analytical solution. The numerical solution methods generally in use are described.

Finally, a schematic method of approaching the hydrodynamics of free-surface aquifers and flow in the unsaturated zone by means of a single equation is suggested, in which the boundary conditions are the ground surface and bottom of the aquifer. This method notably enables allowance to be made in aquifer recharge or evaporation problems for variations in the amount of water stored in the unsaturated zone and for their effect on the water table level.