



COMPOTEMENT RHÉOLOGIQUE DES SOLIDES ET PSEUDO-SOLIDES

Communication présentée au
Comité Technique de la Société Hydrotechnique de France
le 19 mars 1970

PAR D. RADENKOVIC *

Dans son ensemble la *rhéologie* est une science de l'ingénieur; comme toute discipline technique elle s'appuie quant aux notions et aux méthodes de recherche sur plusieurs sciences de base (mécanique des milieux continus, différentes autres branches de la physique, chimie, géologie, etc.) et doit son unité surtout à un but commun qui est de préciser (et d'expliquer) la réponse (déformation, écoulement et rupture éventuelle) d'un matériau donné sous l'effet des contraintes appliquées. Ainsi on voit se développer la rhéologie du béton, des élastomères, la mécanique des sols ou celle des roches (et aussi la biorhéologie) comme disciplines indépendantes, dont le souci commun est la connaissance des propriétés mécaniques en vue des applications technologiques diverses.

Lorsque l'on parle des bases théoriques de la rhéologie, il est en fait difficile, voire impossible d'établir une distinction précise entre *solides* et *fluides*. Du point de vue théorique la question le plus souvent n'a même pas de sens. Devrait-on considérer un béton au moment de la coulée comme pseudo-liquide et quelques heures après comme pseudo-solide ?

Dans les applications, les problèmes principaux qui concernent les *solides* sont la sécurité par rapport à la rupture et l'intensité de la déformation globale (instantanée ou retardée), tandis que les problèmes typiques concernant les *liquides* sont la résistance à l'écoulement et la force nécessaire pour le transport. Lorsqu'il s'agit des problèmes de vibrations ou de propagation des ondes, la distinction entre solides et liquides perd son intérêt même du point de vue pratique.

Les études en rhéologie se situent sur trois voies :

— l'étude générale des lois de comportement est fournie par la mécanique des milieux continus;

— l'examen de la *structure* à différentes échelles (grains, molécules, réseau cristallin) permet d'expliquer le comportement des matériaux sinon de le définir;

— enfin, la recherche *expérimentale* constituée surtout par la mise en œuvre de nouvelles expériences et par leur interprétation est la partie essentielle de la rhéologie proprement dite.

C'est l'ensemble de ces trois aspects qui donne une base théorique à la discipline complexe de la rhéologie.

1. — Lois de comportement

Pour donner une description mathématique précise du comportement mécanique macroscopiquement observé, on suppose que toutes les grandeurs qui caractérisent la réponse de la matière : déformations, forces intérieures, densité, etc., sont réparties d'une manière *continue*. D'où le terme mécanique des milieux continus pour la partie de la physique qui s'en occupe. Une telle conception repose en fait sur certaines hypothèses statistiques implicites : le comportement global des nombreux éléments d'une structure discrète est exprimé par les relations entre certaines moyennes.

1.1. Dans la discussion qui suivra nous utiliserons le système de quinze variables représenté sur le tableau 1.

La *déformation* est décrite ici, comme on le fait souvent, par les trois coordonnées cartésiennes du vecteur déplacement \bar{u} . La vitesse \bar{v} est la dérivée du déplacement par rapport au temps; toutes les autres grandeurs qui servent à exprimer la déformation locale, ainsi que la variation de la densité ρ peuvent être déduites par des raisonnements géométriques simples. Autrement, on peut dire qu'à chaque point matériel X (coordonnées lagrangiennes) correspond au moment t la position spatiale x (coordonnées eulérien-

* Directeur de recherches au Laboratoire de Mécanique des Solides de l'École Polytechnique, Paris.

(repère spatial cartésien)	
3 déplacements	$\bar{u} \equiv u_i \rightarrow$ vitesses $\bar{v} \equiv \dot{u}_i$
	↓
déformations	vitesses de déformation
$\bar{\epsilon} \equiv e_{ij} =$	$\bar{d} \equiv d_{ij} = \frac{1}{2}(v_{ij} - v_{ji})$
	↓
	vitesses de rotation
	$\bar{w} \equiv w_{ij} \equiv \frac{1}{2}(v_{ij} + v_{ji})$
6 contraintes	$\bar{\sigma} \equiv \sigma_{ij} \quad (\sigma_{ij} = \sigma_{ji})$
6 variables thermodynamiques	énergie libre $\psi = \varphi - \eta \vartheta$ température ϑ entropie η flux de chaleur \bar{q}

Tableau 1/
Variables.

Equilibre	$\sigma_{ij,j} + \rho f_i - \rho \dot{v}_i = 0$	3
Conservation de l'énergie	$\rho \dot{\varphi} = \sigma_{ij} d_{ij} - q_{i,i} + r$	1
		4
EQUATIONS DE COMPORTEMENT		
$\Psi(t, X) = \Psi[\bar{\epsilon}(\frac{t}{\rho_0}, X), \vartheta(\frac{t}{\rho_0}, X), t]$		1
$\bar{\sigma}(t, X) = \bar{\sigma}[\bar{\epsilon}(\frac{t}{\rho_0}, X), \vartheta(\frac{t}{\rho_0}, X), t]$		6
$\eta(t, X) = H[\bar{\epsilon}(\frac{t}{\rho_0}, X), \vartheta(\frac{t}{\rho_0}, X), t]$		1
$\bar{q}(t, X) = \bar{q}[\vartheta(\frac{t}{\rho_0}, X), \text{grad.} \vartheta(\frac{t}{\rho_0}, X), t]$		3
		11

Tableau 2/
Equations de conservation.

INEGALITÉ FONDAMENTALE

$$\rho \vartheta \dot{\eta} \leq \rho (\vartheta \dot{\eta} - \dot{\varphi}) + \sigma_{ij} \cdot d_{ij} - \frac{1}{\vartheta} q_i \vartheta_{,i} \geq 0$$

CONDITIONS D'INVARIANCE

a) Tensorielle

b) Matérielle

Ex. fonction tensorielle isotrope-CAYLEY-HAMILTON

$$a_{ij} = M_0 \delta_{ij} + M_1 b_{ij} + M_2 b_{ik} b_{kj}$$

c) Spatiale (principe d'objectivité)

Ex. vitesse de contrainte objective-JAUMANN

$$\hat{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} + \sigma_{im} w_{mj} + \sigma_{jm} w_{mi}$$

AUTRES RESTRICTIONS

(i) Invariance dimensionnelle

(ii) Absence du dual de la viscosité :

$$\bar{\epsilon} \text{ indépendant de } \bar{\sigma}$$

Tableau 3/
Restrictions sur les lois de comportement.

Variables: 3 déplacements \bar{u} , 6 contraintes $\bar{\sigma}$

Equations: équilibre (3), comportement (6)

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}[\bar{\epsilon}(t), \bar{d}(t), \bar{\epsilon}(\frac{t}{\rho_0}, t)]$$

ou $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}[\bar{\sigma}(t), \bar{\sigma}(\frac{t}{\rho_0}, t)]$

ou $\bar{d} = \bar{d}[\bar{\sigma}(t), \bar{\sigma}(t), \bar{\sigma}(\frac{t}{\rho_0}, t)]$

(petite déformation: $d_{ij} \approx \hat{e}_{ij} ; \hat{\sigma}_{ij} \approx \hat{\sigma}_{ij}$)

Tableau 4/
Système simplifié de variables et d'équations.

nes); la description spatiale a été utilisée dans le tableau 1; les deux systèmes se confondent dans le cas où les déplacements sont petits. Notons encore en passant que l'on peut attribuer aux points matériels des degrés de liberté supplémentaires pour tenir compte de la structure plus fine (milieux de Cosserat).

Puisque l'on suppose les forces entre les particules réparties d'une manière continue sur les surfaces de séparation imaginaires, le passage à la limite par lequel on définit les contraintes a toujours un sens. En fait l'élément « infiniment petit » est toujours considéré « suffisamment grand » pour que l'on puisse établir les moyennes utilisables; l'échelle dépend de la finesse de la structure physique observée. On arrive ainsi à définir l'état de contraintes par les six composantes du tenseur $\bar{\sigma}$.

D'autre part les phénomènes mécaniques et thermiques étant intimement liés entre eux par les transformations de l'énergie, une description complète exige l'introduction des variables thermodynamiques: l'énergie libre ψ (ou bien un autre des potentiels que l'on déduit à partir de l'énergie interne φ), la température absolue θ , l'entropie η et le flux de chaleur \bar{q} .

Enfin, on suppose que la répartition de la densité initiale ρ_0 , les forces de masse \bar{f} et les forces extérieures \bar{p} ainsi que la distribution de la densité des sources de l'énergie r sont données.

1.2. Les relations entre les variables dans un processus mécanique sont montrées sur le tableau 2. Elles sont de deux espèces.

Les équations de conservation reposent en fait sur des considérations géométriques et ne dépendent pas des propriétés du milieu qui subit le processus. Dans le système de variables introduit ici il n'y en a que quatre: les trois conditions de l'équilibre indéfini et la loi de conservation de l'énergie.

Les équations de comportement complètent le système des équations correspondant au système des variables adopté, il y en a onze dans le cas envisagé. Les équations (par leur forme et par les paramètres qui y entrent) expriment les propriétés mécaniques de différents matériaux. On pourrait les appeler les équations rhéologiques puisque la rhéologie a justement pour objet d'établir ces relations — autrement dit de formuler les modèles mathématiques — pour les différents matériaux réels. Notons que l'étude des différents critères de rupture (soit fragile, soit par fatigue) entre dans le domaine de la rhéologie, pour ainsi dire d'une manière marginale, en déterminant les limites de validité des lois de comportement.

L'écriture des équations de comportement dans le tableau 2 indique que l'énergie, les contraintes et l'entropie de l'élément matériel X, au moment t, dépendent de toute l'histoire de la déformation et de la température dans l'élément, en particulier, d'une manière spéciale, de leurs valeurs actuelles, et, peut-être explicitement du temps t. On dit qu'elles sont données sous forme de fonctionnelles. D'une manière semblable la valeur du flux de chaleur est une fonctionnelle de la température et du gradient de température.

On pourrait utiliser une écriture plus symétrique, c'est-à-dire on pourrait introduire l'histoire de la déformation dans la fonctionnelle du flux et celle du gradient de température dans les autres fonctionnelles, quitte à éliminer, après discussion, les termes inutiles. C'est un procédé acceptable du point de vue méthodique; le résultat définitif est toutefois le même.

Il est plus important de noter que l'on a adopté l'hypothèse selon laquelle l'énergie au point X ne dépend pas des valeurs des variables dans les autres points, même pas de

celles dans les points voisins (sans parler qu'elle n'est pas une fonctionnelle de la déformation du corps entier). C'est une hypothèse de portée très générale et on l'introduit parfois comme *le principe de l'action locale* : lorsqu'elle est satisfaite, on peut vérifier les équations de comportement dans les essais homogènes. Remarquons en passant que l'on s'est occupé dernièrement de l'étude théorique du comportement des corps, pour lesquels ce principe n'est pas valable, dont l'énergie dépend des dérivées de déformations jusqu'à l'ordre voulu (milieux multipolaires). Ces considérations se rattachent difficilement à la rhéologie, en ce sens que jusqu'à présent on n'a pas su identifier les matériaux réels correspondants.

1.3. Certains principes très généraux (tableau 3) limitent les formes possibles des équations de comportement.

Le second principe de la thermodynamique exige que la production de l'entropie dans un processus arbitraire doit être positive ou nulle. On a montré que moyennant certaines hypothèses de continuité de la fonctionnelle de l'énergie libre ψ (comme l'est par exemple le principe de la mémoire évanescence) il s'ensuit qu'à une expression donnée pour ψ correspondent d'une manière unique sous forme de dérivées fonctionnelles, les expressions pour les contraintes et l'entropie.

Inversement les expressions pour les contraintes et l'entropie ne sont jamais arbitraires, puisque certaines conditions d'intégrabilité doivent être satisfaites pour que le potentiel de l'énergie puisse exister. L'exemple classique en est l'exigence de la symétrie de la matrice des coefficients élastiques. Notons que ces conditions n'ont pas été étudiées sous une forme plus générale et que, de toute manière, lorsqu'elles sont satisfaites l'expression de l'énergie n'est pas déterminée d'une manière unique.

Les conditions d'invariance par changement d'axes imposent d'autres restrictions générales et très importantes sur les équations de comportement.

a) Elles impliquent tout d'abord l'écriture des équations sous forme tensorielle.

b) Le respect des symétries de la matière exige l'invariance par rapport à certains groupes de transformations de coordonnées matérielles. Ceci apporte des restrictions sur les formes possibles des équations. L'exemple connu en est le théorème de Cayley-Hamilton qui précise la forme explicite de la fonction tensorielle symétrique isotrope d'un tenseur symétrique de second ordre.

c) Les équations de comportement ne dépendent pas du mouvement de l'observateur. Ainsi la force dans un ressort est proportionnelle à son élongation quel que soit le mouvement qu'il subit. C'est le principe d'objectivité, qui exige l'invariance des équations par rapport aux transformations orthogonales, variables avec le temps, du repère spatial. Evidemment la question ne se pose pas si l'on utilise les variables de Lagrange; d'autre part en vertu de ce principe, l'utilisation des variables d'Euler entraîne l'isotropie matérielle. (Donc les équations proposées dans le tableau 2 ont une validité restreinte dans ce sens). Une autre conséquence en est le choix de variables qui peuvent apparaître dans les équations de comportement; elles doivent être *objectives*, c'est-à-dire indépendantes du mouvement du repère. Par exemple la vitesse de déformation est objective tandis que la vitesse de rotation ne l'est pas; la vitesse de la variation des contraintes par rapport à un repère quelconque n'est pas objective non plus.

On peut mentionner aussi la condition de l'*invariance dimensionnelle*; les équations aux dimensions peuvent rendre de grands services dans certaines études rhéologiques.

Les considérations physiques amènent à poser d'autres conditions complémentaires qui ont un caractère général et qui s'avèrent respectées dans toutes les lois étudiées jusqu'à présent.

Ainsi par exemple l'énergie interne ne dépend pas des vitesses de déformation. D'autre part la valeur de la contrainte peut dépendre de la vitesse de déformation au même instant, mais inversement la valeur de la déformation à un instant donné ne peut pas dépendre des accroissements des contraintes. Ces principes ont des conséquences importantes dans l'analyse générale des équations de comportement.

1.4. Supposons maintenant que la déformation soit petite (en ce sens que tous les déplacements sont petits); ceci allège les exigences du principe de l'objectivité. Admettons aussi que le processus est, au moins approximativement, isotherme (ou bien adiabatique) ce qui simplifie les considérations thermodynamiques et permet de négliger les variables correspondantes. Le système de variables et d'équations se réduit alors à celui du tableau 4, auquel on arrive dans les approches plus élémentaires de la rhéologie (des solides).

On peut laisser de côté les cas où le comportement dépend du temps d'une manière explicite — par exemple le vieillissement du béton, la thixotropie de certaines argiles et des phénomènes semblables. Dans tous ces cas il s'agit des processus parallèles non-mécaniques (en général chimiques) que l'on n'introduit pas dans l'analyse d'une manière directe.

L'examen plus détaillé des équations de comportement (ainsi dépouillées de tous les effets non-mécaniques) montrerait qu'il existe trois types fondamentaux de comportement mécanique : élasticité, viscosité et plasticité. Tous les matériaux réels possèdent ces trois types de comportement à différents degrés et en combinaisons linéaires et non-linéaires.

Pour mettre en évidence les propriétés mécaniques essentielles et les différentes possibilités de leur combinaison, on

CORPS DE MAXWELL $\dot{\epsilon}(s) = \frac{1}{G} \dot{\sigma}(s) + \frac{1}{\eta} \sigma(s)$

$\sigma(t) = G e(t) - \frac{G^2}{\eta} \int_0^t e^{-\frac{G}{\eta}(t-s)} e(s) ds$

LOIS DE BOLTZMANN $f(u)$ fonction de fluage

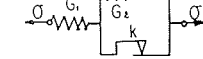
$r(u)$ de retard

$e(t) = f(0)\sigma(t) + \int_0^t f(t-s)\dot{\sigma}(s) ds$

$\sigma(t) = r(0)e(t) + \int_0^t r'(t-s)e(s) ds$

CORPS ELASTO PLASTIQUE

$\dot{\epsilon}(s) = \frac{1}{G_1} \dot{\sigma}(s) + z(s) \frac{1}{G_2} \sigma(s)$

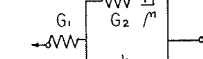


$z(s) = \begin{cases} \sigma(s) = Y_1(s); \dot{\sigma}(s) > 0 \\ \sigma(s) = Y_2(s); \dot{\sigma}(s) < 0 \end{cases}$
0 autrement

$Y_{1,2}(s) = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} \left[e(s) \pm \frac{k}{G_2} \right]$

CORPS DE SCHWEDOFF (élasto-visco-plastique)

$\dot{\epsilon}(s) = \frac{1}{G} \dot{\sigma}(s) + z(s) \left\{ \frac{1}{G_2} \dot{\sigma}(s) + \frac{\sigma - k}{\eta} \right\}$



$z(s) = Z \left[\dot{\sigma}(u), \sigma(u) \right]$

Tableau 5/
Exemples
des équations
de
comportement.

utilise les modèles symboliques — associations de ressorts, amortisseurs et patins — qui ne représentent nullement la structure intérieure réelle, mais permettent de trouver des lois de comportement complexes sous forme unidimensionnelle, quitte à obtenir, en les généralisant, les expressions du type indiqué sur le tableau précédent.

Quelques exemples élémentaires des équations de comportement pour le cas unidimensionnel sont donnés sur le tableau 5.

2. — Etudes de la structure

Le comportement des matériaux dépend évidemment de leur structure. Les forces entre les particules à différents niveaux (atomes, molécules et leurs agglomérations, grains, etc.), dépendent de la configuration qui est variable avec la déformation. Les essais d'explication du comportement mécanique en partant de la structure et en utilisant les lois physiques fondamentales font partie de l'étude des différents matériaux et ainsi de la rhéologie en tant que discipline complexe.

La théorie cinétique des gaz est l'exemple classique d'une approche de ce genre. En considérant les molécules comme de petites balles élastiques sans aucune sorte de liaison entre elles on arrive à retrouver les propriétés mécaniques et thermiques de certains gaz dans le domaine où un tel modèle physique est une bonne approximation de la structure réelle. Le développement de ces études dans le cadre des théories des fluides et des solides (réseau cristallin) est important de nos jours, mais n'entre pas dans le cadre de cet exposé.

Dans tous les cas, pour rendre les calculs possibles, la structure réelle est remplacée par un modèle schématisé qui représente plus ou moins bien la structure réelle et permet une formulation mathématique suffisamment précise et maniable. Dans ce sens la distinction même entre la macro- et la microstructure dépend de l'échelle à laquelle l'observation se fait.

Prenons comme exemple l'étude structurale bien développée de la déformation plastique des métaux. Le comportement de l'agrégat polycristallin (macrostructure) est déterminé par le comportement des grains monocristallins considérés comme éléments; à ce niveau on accepte comme donnée de base le fait que les glissements sur des plans préférés, soumis à la loi de Schmid constituent le mécanisme de la déformation des monocristaux. On peut aller plus loin et chercher à expliquer les glissements dans les grains par la présence des défauts dans le réseau cristallin, c'est-à-dire par la théorie des dislocations; mais il s'agit ici d'une autre échelle, l'atome étant l'élément de la structure observée. On a peu d'espoir d'arriver à des résultats valables en utilisant les théories qui mélangent les différents niveaux et essayent d'expliquer le comportement du polycristal à partir de la théorie des dislocations.

Les résultats remarquables obtenus dans l'étude de la déformation plastique des métaux sont dus surtout au simple fait que le cisaillement critique dans le plan de glissement ne dépend pas de la contrainte normale. Le développement des théories des milieux granulaires, où le frottement de Coulomb est le mécanisme principal de la dissipation de l'énergie, reste en arrière à tous les points de vue. On a essayé par exemple de représenter un milieu bidimensionnel de ce type comme un amoncellement de petits paquets d'empilages réguliers; la déformation globale serait le résultat des glissements dans les différents paquets élémentaires orientés au hasard (par analogie avec la théorie

du polycristal). Lorsque l'on observe la déformation d'un milieu bidimensionnel transparent en lumière polarisée on se rend compte que le processus réel est bien plus complexe.

La déformation des argiles où l'interaction des deux phases, solide et fluide, joue le rôle principal offre un aspect structural encore beaucoup plus compliqué. Un des modèles proposés est celui du château de cartes. Les particules solides sont reliées par des forces de natures différentes. Ces liaisons assurent un comportement quasi-élastique pour de faibles déformations; la consolidation secondaire est caractérisée par la rupture des liaisons actuelles et la formation de liaisons nouvelles, partiellement équivalentes.

Lorsqu'il s'agit du comportement des roches, la fissuration joue un rôle très important. Il est évident que dans ce cas on doit généralement envisager des éléments dont les dimensions dépassent largement le diamètre du grain cristallin. Quoique les calculs théoriques n'aient pas été poussés très loin dans ce sens, rien que la reconnaissance du rôle de la fissuration a permis des progrès importants dans la mécanique des roches, ou plus exactement dans la rhéologie des roches, en tant que science de l'ingénieur.

Les études de la structure permettent surtout des conclusions d'ordre qualitatif. Les résultats quantitatifs obtenus offrent en général une large marge d'incertitude. Prenons comme exemple la détermination du module d'élasticité d'un agrégat de deux matériaux dont les caractéristiques sont connues. Une première évaluation des bornes supérieure et inférieure de la valeur du module en fonction de la concentration du mélange est connue depuis longtemps. On a beaucoup travaillé dernièrement pour réduire l'écart considérable entre ces deux bornes. Toujours est-il que déjà la possibilité de l'appréciation de l'ordre de grandeur peut être très utile dans les applications.

Laissant de côté le bois, les élastomères et autres matériaux de construction, remarquons encore que les études structurales sont de première importance dans ce domaine marginal de la rhéologie qui concerne la rupture.

Pour expliquer pourquoi la résistance à la traction du verre effectivement observée est de plusieurs fois inférieure aux valeurs théoriques correspondant aux appréciations des forces intermoléculaires, Griffith a remarqué que la concentration des contraintes aux abouts des micro-fissures pré-existantes joue un rôle essentiel dans la rupture fragile. La première variante de cette théorie a été largement dépassée, remaniée et perfectionnée depuis; mais la remarque de Griffith a gardé sa valeur fondamentale dans ce domaine.

Elle permet entre autres, en liaison avec des considérations statistiques, de comprendre l'effet d'échelle.

Le phénomène de la fatigue est particulièrement complexe et doit se jouer simultanément à plusieurs niveaux de finesse de la structure (microfissures et défauts, polycristal, réseau cristallin). On trouve dans la littérature plusieurs explications structurales mutuellement contradictoires ce qui prouve que cette approche n'est pas toujours aussi intuitivement évidente que l'on pourrait l'espérer au premier abord.

3. — Recherches expérimentales

En rhéologie, comme dans les autres branches de la physique, le but essentiel des recherches expérimentales est :

a) d'examiner la validité d'une idéalisation (ou approximation) donnée;

b) de préciser le domaine de son application et les paramètres qui la caractérisent. Donc, normalement, une conception ou bien une idée intuitive, sinon une théorie élaborée et les calculs correspondants, précède l'expérience.

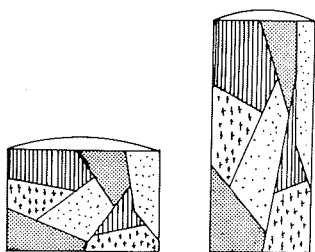
Par exemple certaines observations géologiques ont montré depuis longtemps que les roches, normalement connues comme matériaux fragiles, peuvent supporter sous hautes pressions des déformations plastiques très importantes, comme des métaux, c'est-à-dire qu'elles deviennent ductiles. Sous quelles pressions, quelle est la vitesse du fluage, le processus demande-t-il de très hautes températures? Les expériences classiques de von Karman avec le marbre ont donné la première réponse précise à ces questions. Les expériences actuelles dans ce domaine, reliées avec l'étude du fluage sous pression atmosphérique, permettent une classification rhéologique des roches.

L'idéalisation proposée se révèle parfois fautive ou insuffi-

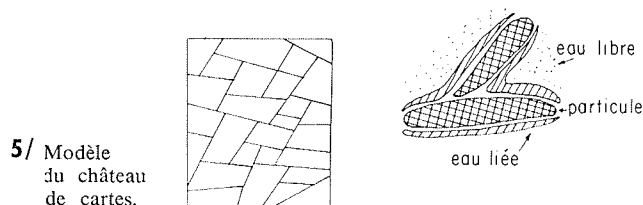
sante. L'expérience suggère alors des conceptions nouvelles; pour les vérifier et pour déterminer leur domaine de validité d'autres expériences sont nécessaires. Cette interaction entre la théorie et l'expérience est commune à toutes les sciences.

En voici un exemple simple et connu. La théorie élémentaire prévoit que dans la torsion la longueur d'un fil ne varie pas; dans ses expériences avec certains métaux Poynting a constaté l'élongation du fil. Ce phénomène a été expliqué par la théorie des effets de second ordre; une application de l'équation de Caylen-Hamilton permet de voir de quoi il s'agit. Des effets semblables ont été constatés après dans de nombreuses expériences.

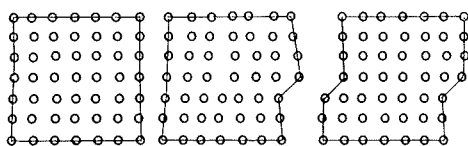
Les expériences de routine, très fréquentes dans les applications de la rhéologie, ont un rôle tout à fait différent. Leur but est souvent la détermination de certains paramètres: module d'élasticité des métaux, coefficient de



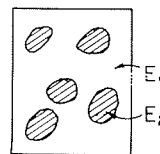
1/ Déformation du polycristal (grains comme éléments de structure).



5/ Modèle du château de cartes.



2/ Mouvement d'une dislocation (atomes comme éléments de structure).



Concentrations volumiques
 $C_1 = V_1/V$; $C_2 = V_2/V$

Borne supérieure (VOIGT)
 $E_v = C_1 E_1 + C_2 E_2$

$$|E_v - E_R| = \frac{(E_1 - E_2)^2}{\frac{E_1}{C_1} + \frac{E_2}{C_2}}$$

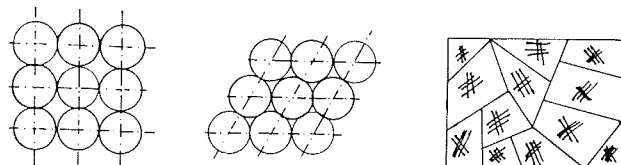
Borne inférieure (REUSS)

$$\frac{1}{E_R} = \frac{C_1}{E_1} + \frac{C_2}{E_2}$$

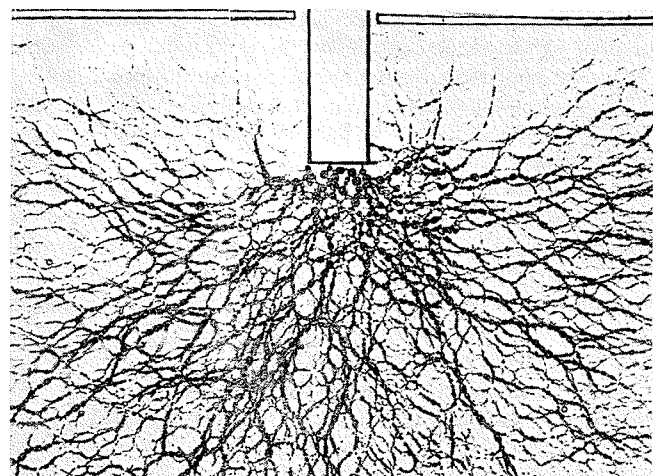
Exemple: $E_2 = 10 E_1$; $C_1 = 9/10$, $C_2 = 1/10$

$E_v/E_1 = 19/10$; $E_R/E_1 = 100/91$

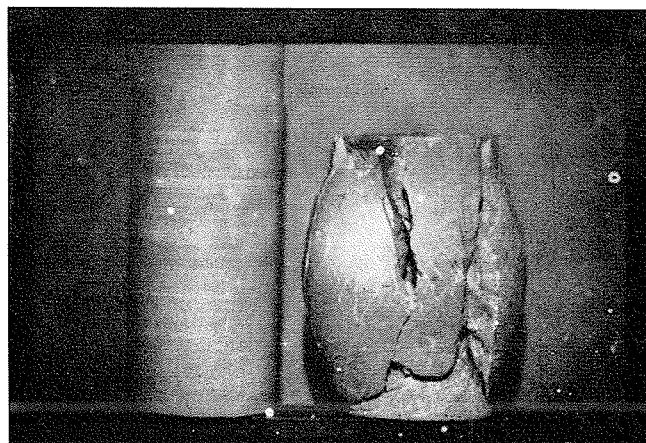
6/ Module d'élasticité d'un agrégat.



3/ Empilages réguliers et leur amoncellement.



4/ Transmission de contraintes dans un milieu granulaire.

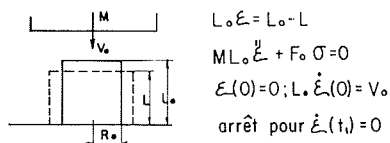


7/ Déformation du marbre sous haute pression.

$$\bar{\epsilon} = M_{11}\bar{\sigma} + M_{12}\bar{\sigma}^2$$

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma & 0 \\ \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\sigma}^2 = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

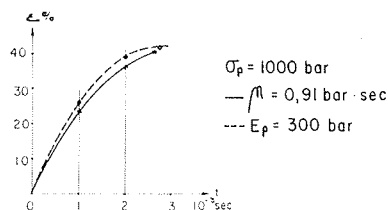
8/ Exemple de l'effet de second ordre.



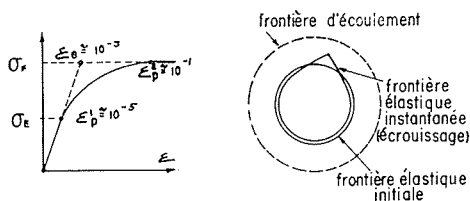
Résistance visqueuse
 $\mu \dot{\epsilon} = \sigma - \sigma_p \Rightarrow M L_0 \dot{\epsilon} + F_0 \mu \dot{\epsilon} + F_0 \sigma_p = 0$

Écrouissage plastique
 $E_p \epsilon = \sigma - \sigma_p \Rightarrow M L \dot{\epsilon} + F_0 E_p \dot{\epsilon} + F_0 \sigma_p = 0$

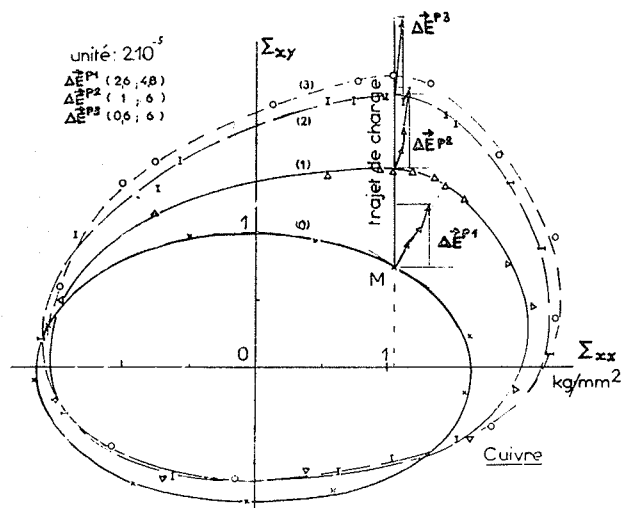
9/ Théorie linéaire du « crusher ».



10/ Evolution de la déformation du « crusher ».



11/ Limite d'élasticité et limite d'écoulement.



12/ Evolution de la limite d'élasticité.

viscosité des fluides, angle de frottement interne des sables; mais dans la plupart des cas il s'agit de l'appréciation comparative de qualité sur des échantillons selon des critères purement conventionnels : les limites d'Atterberg pour les argiles, résistance des cubes et des prismes des bétons, le module de déformation et la vitesse du son dans les roches. Le répertoire des expériences de routine joue toujours un rôle important dans la rhéologie d'un matériau spécifique. D'autre part le développement de la théorie en vue de nouvelles interprétations d'une expérience (considérée de routine) peut apporter des nouvelles connaissances sur le comportement du matériau en question.

Revenant à la recherche expérimentale on peut soulever deux questions essentielles : la *pureté* de l'expérience et la *précision* des mesures adaptée aux exigences de la théorie et à la pureté atteinte.

Les effets secondaires peuvent effectivement masquer le phénomène étudié. Il est connu, par exemple, que les essais effectués sur deux machines de fatigue différentes peuvent ne pas être comparables, justement à cause des effets secondaires dus aux machines. On invoque ce fait pour expliquer les contradictions dans les résultats de différents chercheurs. Lorsqu'il s'agit de la vérification des équations de comportement d'un matériau, l'expérience idéale est celle où les champs des contraintes et des déformations sont homogènes. Si ce n'est pas le cas, comme par exemple dans les expériences à grande vitesse de déformation, où les effets dynamiques ne sont pas négligeables, on est obligé de comparer les résultats théoriques (entachés des erreurs dues aux hypothèses simplificatrices) et les résultats expérimentaux (entachés des erreurs de mesure).

Citons comme un exemple le type d'expériences qui a pour but de vérifier les lois de comportement visco-plastique des métaux que l'on appelle « crusher ». Dans ces expériences un petit échantillon cylindrique est écrasé sous l'impact d'un marteau pilon.

On peut calculer l'évolution de la déformation avec le temps, pour deux idéalizations contraires du comportement : (i) matériau de Bingham, avec résistance visqueuse et sans écrouissage et (ii) matériau plastique avec écrouissage linéaire, sans résistance visqueuse.

La comparaison des résultats pour un cas concret montre que l'expérience du crusher seule ne permet pas de trancher entre les deux idéalizations.

La différence entre les effets de la viscosité et de l'écrouissage pourrait se montrer par exemple dans une expérience statique. Mais, puisque dans une déformation réelle la viscosité et l'écrouissage jouent simultanément et d'une manière complexe (sans parler de l'influence de la non-linéarité géométrique, de l'échauffement possible, etc.) on peut se demander quelle est la précision des mesures nécessaire pour tirer des conclusions quantitatives valables.

En général, la précision des mesures doit aller de pair avec la théorie qui est à la base de l'expérience. En négligeant certains facteurs (on ne peut jamais faire autrement) on arrive à formuler des idéalizations qui à un moment donné sont satisfaisantes du point de vue théorique et pratique; la précision des mesures correspondantes, normalement, permet des vérifications expérimentales pertinentes. Un raffinement des méthodes de mesure est lié aux besoins de donner une description plus fine des phénomènes; c'est-à-dire une théorie plus approfondie.

Un bon exemple est fourni par le développement des théories de la plasticité. Dans les expériences classiques comme celles de Taylor-Quiney le seuil d'écoulement est déterminé par extrapolation à partir de courbes de charge où la partie plastique de la déformation dépasse d'un ou deux ordres de grandeur la partie élastique. Ceci corres-

pond à la notion du comportement rigide-plastique développée en son temps comme idéalisation et comme image de la structure.

A la limite élastique considérée dans les expériences modernes, la déformation plastique est environ de deux ordres de grandeur inférieure à la déformation élastique correspondante. Les théories structurales actuelles de « glissements » liées au comportement élasto-plastique, y trouvent des vérifications raisonnables.

Les approches théoriques usuelles soulignent souvent beaucoup l'importance des modèles symboliques pour l'étude des lois de comportement et introduisent des modèles structurels pour les liquides. En insistant sur les liens plus profonds avec la mécanique des milieux continus et en

mentionnant quelques aspects de la structure des solides, notamment les problèmes de rupture, nous avons voulu donner un tableau plus complet des problèmes et des possibilités de la science complexe de la rhéologie.

✱

Il serait difficile de donner une bibliographie qui couvre le sujet dans toute son ampleur. Les intéressés peuvent trouver les références nécessaires dans les traités de base comme le Cours de mécanique des milieux continus de M. J. MANDEL.

Nous voudrions seulement signaler avec reconnaissance quelques emprunts concernant les figures : 1 et 2 sont faites d'après les dessins classiques de G. I. TAYLOR (cf. *Scientific Papers*); 4 est due aux archives personnelles de M. P. DANTU et 7 à celles de M. P. HАВІВ; 12 est tirée des expériences de M. H. D. BUI (*Comptes rendus A*, t. 262).

Discussion

Président : M. MANDEL

M. le Président remercie M. le Professeur RADENKOVIC pour son bel exposé et remarquant que dans certains cas, les solides et les fluides ne se distinguent pas très facilement, il ouvre la discussion.

Existe-t-il, demande M. JOLY, des systèmes pour lesquels il est nécessaire d'introduire des gradients de contrainte ou de déformation pour rendre compte des déformations observées ?

Beaucoup d'études théoriques ont été faites sur de tels cas (milieux multipolaires, milieux de Cosserat) répond M. RADENKOVIC. Cet effet des gradients doit certainement exister dans des cas très spéciaux mettant en jeu, par exemple, des forces de capillarité dans une couche très mince de liquide, mais il n'a pas été possible de le déceler expérimentalement car il doit être très petit et facilement masqué par des actions de second ordre.

M. VAN GEEN (Université de Bruxelles) signale, en relation avec la réponse de M. RADENKOVIC, que dans l'étude du couplage entre le mouvement d'un milieu continu et un champ électromagnétique, les théories faisant intervenir dans les équations de comportement l'action de gradients de polarisation conduisent à des effets jusqu'ici inobservables.

M. HUG intervient en ces termes :

« M. RADENKOVIC a évoqué la question posée lors de la discussion de la communication de M. JOLY en précisant que le coefficient de viscosité devait se trouver compris entre deux bornes : moyenne arithmétique et moyenne harmonique. J'espère que vous voudrez

bien m'autoriser à revenir sur cette question. Si on accepte le modèle proposé par Eyring, la viscosité s'obtient par :

$$\eta = \frac{\sigma \lambda i}{\Delta u}$$

avec :

$$\Delta u = (f_1 - f_2) \lambda$$

on voit ainsi immédiatement que ce sont les nombres de sauts qui s'additionnent et que par conséquent on doit faire les moyennes des quantités η^{-1} .

Voilà, semble-t-il, un argument sérieux en faveur de l'emploi de la moyenne harmonique, observe M. le Président qui poursuit :

« Nous sommes tous d'accord pour reconnaître la difficulté de distinguer un fluide d'un solide; néanmoins, on peut trouver des définitions qui tranchent le problème : celle donnée par Noll me paraît assez satisfaisante; c'est une définition extrêmement élaborée que je ne pourrais expliquer en détail ici. *Grosso modo*, elle dit qu'un fluide est un corps pour lequel la contrainte culérienne dépend de la vitesse de déformation actuelle, de l'histoire relative c'est-à-dire de l'histoire de la déformation rapportée à l'état actuel. Tout est rapporté à l'état actuel sans aucune référence à l'état antérieur, sans aucune configuration de référence antérieure... »

« On pourrait peut-être dire, remarque M. RADENKOVIC, s'il existe une configuration privilégiée il s'agit d'un solide; s'il n'y a pas de configuration privilégiée, si chaque configuration actuelle est privilégiée instantanément, il s'agit d'un liquide. »

M. le Président conclut en remerciant M. RADENKOVIC de son intéressante communication.

