Communication
présentée au Comité Technique
de la Société Hydrotechnique de France
le 19 mars 1970

LES PRINCIPES EN MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

PRINCIPE D'ISOTROPIE DE L'ESPACE D'OBJECTIVITÉ, DES REPÈRES RHÉOLOGIQUES

PAR P. ANGLÈS D'AURIAC *

Principe des propriétés locales

Nous ne considérons ici que des corps dont la loi de comportement se laisse traduire sous forme de propriétés locales. Cette loi peut faire intervenir la déformation et la contrainte en un point matériel, ainsi que leur variation dans le temps, mais non leur gradient dans l'espace.

Un tel principe n'est pas universel. Il sert simplement à définir une classe de corps.

Loi de comportement.

Pour de tels corps, une loi de comportement s'exprime, dans le cas le plus général, par une relation fonctionnelle de :

$$\mathrm{T} \rightarrow \mathrm{C} \tag{1}$$

T étant la transformation linéaire pour passer de la forme à l'instant 0 à celle à l'instant t, et C la contrainte. Nous disons relation *fonctionnelle,* c'est-à-dire que si l'on se donne un *chemin* dans l'espace des T, le chemin dans l'espace des C est déterminé.

Nous supposons T adiabatique. Il peut y avoir ou non des variations de température. De toute façon, elles sont déterminées par T.

La relation (1) peut se simplifier dans des cas particuliers.

Pour l'élasticité pure, de fonctionnelle, la relation devient ponctuelle.

La relation peut même dégénérer. Par exemple, pour un fluide incompressible, on ne peut plus envisager un chemin quelconque des T. Il faut rester dans les transformations à volume constant, etc.

* Professeur à la Faculté des Sciences de Grenoble.

Principe d'isotropie de l'espace

Soit deux échantillons d'un même corps identiques par définition à l'instant 0 et notamment ayant même état de contrainte.

Le premier suit un chemin T (t) auquel correspond le chemin C (t), le second T′ auquel correspond C′.

Le principe affirme que si l'on a :

$$\mathrm{T}' = \mathrm{R}\,.\,\mathrm{T} \tag{2}$$

on a aussi :

$$\mathrm{C}' = \mathrm{R}\,.\,\mathrm{C}\,.\,\mathrm{R}^{-1} \tag{3}$$

R (t) étant une rotation fonction quelconque du temps.

Un tel principe énonce une propriété des corps. Mais il se trouve que tous les corps sans exception lui obéissent. C'est pourquoi on peut le considérer comme une propriété de l'espace. Il est connu depuis fort longtemps sous le nom de principe d'isotropie de l'espace.

Conséquence.

Prenons comme chemin T (t), $0 \leqslant t$ une constante, à savoir la transformation identique; il en résultera pour C un certain chemin que nous supposons continu, qui part du point C_0 pour $t = 0$.

Considérons maintenant un chemin T′ qui serait une rotation instantanée R_0 suivie du chemin T :

$$\mathrm{T}' = \mathrm{TR}_0$$

Du fait que T est la transformation identique, nous avons :

$$\mathrm{TR}_0 = \mathrm{R}_0\mathrm{T}$$

et, en appliquant le principe, nous trouvons pour C' :

$$C' = R_0 C R_0^{-1}$$

Il en résulte qu'au temps 0 nous avons :

$$C'_0 = R_0 C_0 R_0^{-1}$$

D'où l'énoncé :

Une rotation *instantanée* d'un corps provoque la même rotation *instantanée* de la contrainte.

Isotropie d'un corps.

Soit un corps dans un certain état à l'instant 0 avec la contrainte C_0. Soit toujours deux échantillons de ce corps identiques par définition.

Le premier suit le chemin $T(t)$ auquel correspond l'accroissement de contrainte $\Delta C(t)$ avec $\Delta C = C - C_0$. Le second : T' et $\Delta C'$.

On dit que le corps a une loi isotrope si :

$$T' = TR_0 \tag{4}$$

entraîne :

$$\Delta C' = \Delta C \tag{5}$$

R_0 étant une rotation *instantanée* faite avant le chemin T.

On remarque que R_0 de (4) est une rotation constante tandis que R, de (2), est une fonction du temps.

On remarque aussi que la définition même de l'isotropie d'un corps comporte le choix d'un état initial et cette isotropie peut avoir lieu ou non.

Le fait d'être isotrope par rapport à une origine implique en général de ne pas l'être par rapport à une autre.

Au contraire, l'isotropie de l'espace a toujours lieu donc ne fait pas intervenir l'état initial du corps.

Autre expression de l'isotropie d'une loi.

En remplaçant R_0 par R_0^{-1} nous pouvons écrire :
si à :

$$T \to \Delta C$$

à :

$$T' = TR_0^{-1} \to \Delta C' = \Delta C$$

En appliquant le principe d'isotropie de l'espace où l'on fait $R(t) = \text{Cte} = R_0$ il vient :
à :

$$T'' = R_0 T' \to \Delta C'' = R_0\, \Delta C'\, R_0^{-1}$$

On peut conclure :
si à :

$$T \to \Delta C$$

à :

$$T'' = R_0 T R_0^{-1} \to \Delta C'' = R_0\, \Delta C\, R_0^{-1} \tag{6}$$

ce qui peut se traduire ainsi : si l'on transmue le chemin T par une rotation constante quelconque, le chemin ΔC sera transmué par la même rotation. Cet énoncé est équivalent au précédent.

Changement de repère.

Dans ce qui précède T, R, C désignent des tenseurs dont on n'a pas encore précisé le repère d'expression.

Introduisons maintenant des repères, *tous orthonormés.*

Soit d'abord $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ fixes l'un par rapport à l'autre, décalés de la rotation R_0.

Si, dans $\mathcal{R}$ la loi de comportement s'écrit :

$$C_{ke} = \mathcal{F}_{ke}(T_{ij}) \tag{7}$$

C et T ont pour expressions dans $\mathcal{R}'$: E' et T' avec :

$$C_{ke} = C'_{k'e'}\, \alpha_{k'k}\, \alpha_{e'e} \tag{8}$$

α étant la rotation R_0

$$T_{ij} = T'_{i'j'}\, \alpha_{i'i}\, \alpha_{j'j} \tag{8}$$

En portant ces expressions dans (7) il vient :

$$C'_{k'e'}\, \alpha_{k'k}\, \alpha_{e'e} = \mathcal{F}_{ke}(T'_{i'j'}\, \alpha_{i'i'}\, \alpha_{j'j})$$

ce qui constitue une relation implicite de la forme :

$$C'_{k'e'} = \mathcal{F}'_{k'e'}(T'_{i'j'}) \tag{9}$$

$\mathcal{F}'$ *n'est pas identique* à $\mathcal{F}$; par contre il s'en déduit nécessairement par les lois de la variance (orthovariance, co = contra) et cela quelle que soit la loi du matériau.

On exprime parfois ce fait en disant que $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}$ sont *formellement* les mêmes.

Supposons maintenant que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ coïncident à l'instant 0 mais soient en rotation l'un par rapport à l'autre. Prenons pour cette rotation le R des formules (2) et (3). On voit que l'expression de T' dans $\mathcal{R}'$ est identique à l'expression de T dans $\mathcal{R}$; de même C' dans $\mathcal{R}'$ a même expression que C dans $\mathcal{R}$.

Le principe d'isotropie de l'espace permet donc d'énoncer : La relation fonctionnelle :

$$C_{ke} = \mathcal{F}_k(T_{ij})$$

est *identique* dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$

Il en résulte que la relation fonctionnelle de T à C restera dans tous les repères soit identique (pour les repères coïncidant dans l'état initial) soit formellement identique.

Appelons ceci l'énoncé E_1.

Le principe d'isotropie de l'espace a pour conséquence qu'une loi de comportement ne peut pas faire intervenir de repère $\mathcal{R}_0$ défini *a priori.*

En effet si un tel $\mathcal{R}_0$ existait, soit $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ deux repères d'expression coïncidant à l'instant initial et mobiles l'un par rapport à l'autre, le mouvement de $\mathcal{R}_0$ par rapport à $\mathcal{R}'$ n'est pas le même que le mouvement de $\mathcal{R}_0$ par rapport à $\mathcal{R}$, or l'écriture de la loi est la même dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ donc $\mathcal{R}_0$ ne peut intervenir.

Réciproque.

Nous admettons sans démonstration que si une loi ne fait pas intervenir de repère défini *a priori,* elle satisfait au principe d'isotropie de l'espace.

Exemples.

Dans le cas de l'élasticité pure la relation fonctionnelle de T à C devient ponctuelle si nous supposons cette relation linéaire. En prenant pour origine un état neutre nous pourrons écrire :

$$\sigma_{ij} = A_{ij,\,ke}\, \varepsilon_{ke} \tag{9}$$

ceci dans un certain repère $\mathcal{R}$. Si nous prenons un autre repère $\mathcal{R}'$ ne coïncidant pas avec $\mathcal{R}$ dans l'état initial, la constante A change (voir plus haut $\mathcal{F}' \# \mathcal{F}$) et devient $A' \# A$:

$$A'_{i'j',\,K'e'} = A_{ij',\,ke}\, \alpha_{ii'}\, \alpha_{jj'}\, \alpha_{kk'}\, \alpha_{ee'}$$

La formule n'est pas identiquement la même mais on dit qu'elle reste « formellement » la même.

Si maintenant nous prenons $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ coïncidant dans l'état initial mais non dans l'état final, la formule 9 s'applique aussi bien dans $\mathcal{R}$ que dans $\mathcal{R}'$. Elle montre simplement que la contrainte pour ε fait dans $\mathcal{R}'$ est celle pour ε fait dans $\mathcal{R}$ transmuée par la rotation pour passer de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}'$. Mais cela n'impose aucune condition à A.

Si nous supposons en outre que la loi élastique est isotrope, on déduit facilement les formules (6) que l'on à $A' = A$.

Supposons maintenant une relation entre la contrainte et la vitesse de déformation (viscosité pure). Pour un liquide incompressible nous pouvons poser, dans le cas d'une loi linéaire :

$$S_{ij} = A_{ij,\,kl}\,\mathcal{D}_{kl} \qquad (9\ bis)$$

S étant le déviateur de contrainte et $\mathcal{D}$ la vitesse de déformation pure.

Prenons deux repères $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ coïncidant à l'instant initial. La formule (9 *bis*) est donc la même dans les deux repères. Or, quand $\mathcal{R}'$ a tourné par rapport à $\mathcal{R}$, S et $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{R}'$ sont ceux dans $\mathcal{R}$ transmués par une rotation d'où l'on tire $A' = A$. D'où cette conclusion qu'une loi de viscosité *pure* ne peut être qu'isotrope en vertu de l'isotropie de l'espace.

S étant un déviateur, on en déduit que A est un simple scalaire (viscosité newtonienne).

L'impossibilité de (9 *bis*) pour A non isotrope se voit donc immédiatement par les formules 2 et 3. On peut également la tirer du paragraphe précédent intitulé « réciproque » mais cela est beaucoup moins évident.

Principe d'objectivité

Ce principe, fort invoqué actuellement, est, nous allons le voir, étroitement lié au principe de l'isotropie de l'Espace.

Tout d'abord, le mot objectivité, pris dans son sens *strict,* signifie simplement que l'on suppose l'existence d'une réalité physique indépendante de nous.

Il nous autorise à varier le procédé de description pourvu que la chose décrite reste la même.

Il faut donc rejeter toute formule qui exprimerait non pas une réalité mais plusieurs réalités contradictoires.

Il est patent que le mot objectivité a pris de nos jours une acception *plus large* et qu'il contient en outre l'idée d'isotropie de l'espace.

Une définition classique est la suivante :

Le principe d'objectivité stipule que les équations de comportement sont formellement les mêmes dans tout repère (orthonormé). Appelons cet énoncé E_2.

E_2 ressemble à E_1, pourtant, on remarque que E_1 précise que les seules variables intervenant sont T et C, ce qui exclut l'intervention du mouvement d'un trièdre défini *a priori* par rapport au trièdre choisi pour écrire la loi.

Cette chose-là n'est pas dite explicitement dans E_2. En général, elle est sous-entendue et alors E_2 exprime l'objectivité au sens large. Mais si on ne la sous-entend pas, E_2 exprime simplement l'objectivité au sens strict.

Il nous est paru utile de souligner la différence séparant les deux idées contenues dans le mot objectivité et nous pouvons citer, à ce propos, un texte de M. Jean Ullmo, tiré du Colloque de l'UNESCO 1965 consacré à Einstein :

« Ce sont deux choses tout à fait différentes de dire que le système de référence n'agit pas sur ce qu'on repère et de dire que l'espace, comme contenant, n'agit pas sur ce qu'il contient. »

Il s'établit souvent une confusion entre ces deux idées. Cette confusion — pour regrettable qu'elle soit sur le plan intellectuel — est sans conséquence *pratique* (c'est ce qui explique pourquoi on la commet). En effet, les deux idées différentes contenues dans le mot « objectivité » sont l'une et l'autre exactes. En les fusionnant, on reste dans la vérité.

Grandeurs objectives.

Il faut se rappeler que les repères servent à deux choses différentes : soit *définir* des grandeurs physiques, soit les *exprimer* (par leurs composantes).

Une vitesse, par exemple, se définit par rapport à un certain trièdre dit fixe. Soit T_1. Pour exprimer cette vitesse, on peut évidemment prendre ses composantes dans T_1, qui sera à la fois repère de *définition* et repère d'*expression.*

Mais, on peut aussi prendre ses composantes dans un autre repère T_2 mobile par rapport à T_1. La chose est fréquente en mécanique.

Si nous changeons le repère d'expression T_2 sans changer le repère de définition T_1, nous ne changeons pas la vitesse, mais simplement le procédé pour la décrire.

On dit qu'une grandeur est objective quand elle est définie *unique* c'est-à-dire qu'elle n'est pas sujette à changer selon le repère qui sert à la définir.

Ceci se produit dans deux cas :

La grandeur reste *la même* pour tous les repères de définition. De telles grandeurs sont dites *naturellement* objectives.

Mais il y a aussi des grandeurs qu'on *a rendues* objectives, tout simplement en fixant le repère de définition.

Une vitesse tout court, ce n'est pas objectif. Une vitesse par rapport à un certain repère c'est objectif.

Parlons des naturellement objectives :

Un scalaire n'a pas de repère d'expression. Il peut ou non être lié à un repère de définition. La masse est objective, le travail et la force vive non. Toutes les grandeurs tensorielles ont besoin d'un repère d'expression. Mais elles sont liées ou non à un repère de définition.

Une force proprement dite (action d'un corps sur un autre) est un vecteur objectif, qu'elle soit à distance ou de contact. Par voie de conséquence le tenseur contrainte est objectif.

Une force dite d'inertie n'est pas objective.

Toutes les transformations linéaires d'un espace en lui-même (notamment les déformations pures et les rotations) sont des tenseurs objectifs. Car, par définition, on prend le *même* repère pour fixer les coordonnées initiales et finales d'un point matériel et c'est un simple repère d'expression.

Définissons vitesse de transformation par :

$$\mathcal{C}_{ij} = \partial V_j / \partial x_i$$

Appelons :

- V' et x' vitesse absolue et coordonnées dans le repère fixe;
- V, x vitesse relative et coordonnées dans le repère mobile;
- $\mathcal{V}$ vitesse d'entraînement du mobile par rapport au fixe, exprimé dans le mobile.

On démontre en cinématique la formule suivante :

$$\frac{\partial V'_j}{\partial x'_i} = \alpha_{ik}\left[\frac{\partial V_l}{\partial x_k} + \frac{\partial \mathcal{V}_l}{\partial x_k}\right]\alpha_{jl} \qquad (10)$$

α étant la rotation pour passer d'un repère à l'autre (même expression dans les deux repères).

Cette formule montre que $\mathcal{C}_{ij}$ n'est pas objectif à cause du terme en $\mathcal{V}$. $\mathcal{C}_{ij}$ a donc besoin d'un repère de définition.

Si maintenant nous définissons vitesse de déformation pure par :

$$\mathcal{D}_{ij} = \mathcal{D}_{ji} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i} + \frac{\partial V'_i}{\partial x_j}\right)$$

le terme en $\mathcal{V}$ s'élimine dans (7) parce que antisymétrique. On a alors :

$$\mathcal{D}'_{ij} = \alpha_{ik}\, \mathcal{D}_{lk}\, \alpha_{jl} \qquad (11)$$

$\mathcal{D}$ est objectif. Il a besoin d'un repère d'expression mais reste le même pour tous les repères de définition.

Repère rhéologique

Soit un écoulement décrit dans un repère quelconque R (orthonormé) par $V_j(x_i, t)$.

On appelle repère rhéologique un repère $R_h = R'$ tel que $\partial V_j/\partial x_i$ soit, à tout instant symétrique c'est-à-dire dans lequel la vitesse de transformation est une vitesse de déformation pure.

On peut même s'affranchir de la notion de temps pourvu que l'on conserve la notion de transformation *continue* se faisant par une *succession* de transformations infinitésimales.

On dira alors : un repère est rhéologique si les transformations finies envisagées sont le produit infini de déformations pures infinitésimales faites dans un certain ordre.

Bien entendu ces transformations finies ne sont pas en général irrotationnelles. Tout repère attaché à un point matériel et fixe par rapport à un repère rhéologique est lui-même rhéologique.

Il n'y a aucune raison pour qu'il existe un même repère qui soit rhéologique pour tous les points matériels considérés.

Les repères rhéologiques sont en général des repères *locaux* attachés à chaque point matériel.

On remarque enfin que les repères rhéologiques ne sont pas définis *a priori* mais par le mouvement lui-même.

Dérivée de la contrainte par rapport au temps.

Soit une contrainte qui s'exprime par σ dans le repère R et σ' dans le repère R'. Désignons les dérivées par rapport au temps par un point ($\dot{\sigma}$). On démontre la formule :

$$\dot{\sigma}'_{ij} = \alpha_{ik}\left[\dot{\sigma}_{km} + \frac{\partial \mathcal{V}_K}{\partial x_e}\,\sigma_{lm} + \sigma_{kl}\,\frac{\partial \mathcal{V}_m}{\partial x_e}\right]\alpha_{jm} \quad (12)$$

où $\mathcal{V}$ est la vitesse d'entraînement de R par rapport à R'.

L'existence du terme en $\mathcal{V}$ dans (12) montre que la dérivée de la contrainte n'est pas une grandeur objective (naturellement).

Dérivée de Jaumann.

On peut rendre objective la dérivée de la contrainte en précisant le repère dans lequel on la définit.

Comme repère de définition on prend un repère rhéologique. La chose ainsi définie reste la même quel que soit le repère rhéologique choisi.

Le problème se pose d'écrire dans un repère *d'expression* quelconque la dérivée de la contrainte ayant un repère de *définition* rhéologique.

On démontre que cette expression est :

$$\dot{\sigma}_{ij} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_k}{\partial x_i} - \frac{\partial V_i}{\partial x_k}\right)\sigma_{kj} + \frac{1}{2}\,\sigma_{ik}\left(\frac{\partial V_k}{\partial x_j} - \frac{\partial V_j}{\partial x_k}\right) \quad (13)$$

C'est ce qu'on appelle la dérivée de Jaumann.

On peut appliquer le même calcul à la dérivée de $\mathcal{D}$ vitesse de déformation pure. On trouve alors l'expression :

$$\dot{\mathcal{D}}_{ij} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_k}{\partial x_i}\frac{\partial V_k}{\partial x_j} - \frac{\partial V_i}{\partial x_k}\frac{\partial V_j}{\partial x_k}\right) \qquad (14)$$

Cette expression est plus simple que (13) et ne contient que trois termes au lieu de cinq mais elle montre, du fait qu'elle ne se réduit pas à $\dot{\mathcal{D}}$, que cette dérivée, elle non plus, n'est pas objective.

Donnons maintenant des exemples de lois pour illustrer les deux idées différentes contenues dans la notion d'objectivité.

Exemples.

Considérons l'équation :

$$S_{ij} + t_0\dot{S}_{ij} = 2\,\mu\,\mathcal{D}_{ij} \qquad (15)$$

dans laquelle S est le déviateur de contrainte, $\dot{S}$ sa dérivée par rapport au temps,

$$\mathcal{D}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i} + \frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right)$$

la vitesse de déformation pure, t_0 et μ des constantes (cette équation étant censée valable dans tout repère).

Une telle loi viole l'objectivité au sens strict, en effet, $\dot{S}$ n'est pas objectif. La loi (15) est donc absurde non pas en raison de l'isotropie de l'espace, mais tout simplement parce qu'elle est contradictoire.

Soit maintenant l'équation :

$$S_{ij} + t_0\,(\dot{S}_{ij} + w_{ik}S_{kj} + w_{jk}S_{ik}) = 2\,\mu\,\mathcal{D}_{ij} \qquad (16)$$

dans laquelle :

$$w_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathcal{V}'_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathcal{V}'_i}{\partial x_j}\right) \qquad (17)$$

où $\mathcal{V}'$ est la vitesse d'entraînement d'un repère R' défini *a priori* (disons, par exemple, un repère Galiléen) par rapport au repère d'expression de la loi.

Il est facile de voir que le terme entre parenthèses représente la dérivée de S définie dans R' et exprimée dans R.

L'équation (16) est donc objective au sens strict. Elle signifie quelque chose. Mais elle n'est pas objective au sens large. Elle viole l'isotropie de l'espace.

C'est à ce titre qu'il faut la rejeter.

Considérons maintenant l'équation :

$$S_{ij} + t_0\dot{S}_{ij} = 2\,\mu\,\mathcal{D}_{ij} \qquad (18)$$

où l'on précise qu'elle est valable en *repère rhéologique.*

Cette équation est objective au sens strict puisque le repère est défini.

Et elle l'est au sens large puisque ce repère n'est pas défini *a priori.*

Si l'on veut traduire en repère quelconque l'équation (15) on trouve :

$$S_{ij} + t_0\,(\dot{S}_{ij} + w_{ik}S_{kj} + S_{ik}w_{jk}) \qquad (19)$$

dans lequel w au lieu d'être défini par (14) est défini par :

$$w_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i} - \frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right) \qquad (20)$$

Intérêt des repères rhéologiques.

Une loi de comportement étant définie par une relation fonctionnelle de T à C, il importe de voir quelle condition impose à T le fait que le repère est rhéologique.

T doit être le produit de transformations infinitésimales symétriques.

On sait qu'un tel produit n'est pas en général symétrique. Il le serait pour des déformations pures ayant toutes mêmes directions principales.

On n'a donc pas T = symétrique, mais la relation plus compliquée :

$$dT \times T^{-1} = \text{symétrique}$$

Malgré cela, dans la presque totalité des cas, l'écriture en repère rhéologique est beaucoup plus simple que celle en repère quelconque. Les équations (18) et (19) en sont un exemple.

Or, l'écriture en repère rhéologique suffit à exprimer la loi *physique*.

Le passage du repère rhéologique au repère quelconque est une simple question de *mathématique*.

On peut discuter une loi physique mais pas un calcul mathématique.

Il y a donc intérêt à écrire la loi en deux étapes pour séparer les choses discutables et celles qui ne le sont pas.

Pour vérifier une loi, on se livre parfois à des expériences fictives purement cérébrales. C'est-à-dire que l'on se donne telle et telle grandeurs et l'on calcule ce qui en résulte pour telle autre grandeur. On examine alors ce résultat au simple point de vue de l'intuition physique que l'on a, et on décide si cet effet est possible ou invraisemblable.

Bien souvent, ce procédé suffit pour écarter des lois que l'on avait envisagées *a priori*.

Il est bien évident qu'une telle vérification est infiniment plus facile à faire en repères rhéologiques.

Mais, il y a aussi les expériences réelles. Pour celles-ci, il faut distinguer deux cas :

— Premier cas : il s'agit d'une expérience pure où les variables intervenant dans l'équation sont constantes dans l'espace (éprouvette homogène), alors on a tout intérêt à se placer en repère rhéologique. Se placer en repère quelconque reviendrait à décrire *la même* expérience de façon plus compliquée;

— Deuxième cas : expérience complexe. L'état n'est pas homogène (appareil de Weissemberg, par exemple). Alors il n'existe pas de repère rhéologique commun à tous les points matériels et il est bien évident qu'il faut écrire la loi sous la forme plus compliquée.

Notons enfin que la notion de repère rhéologique est parfois sous-entendue dans certaines formules.

Si l'on écrit, par exemple, que la relation contrainte déformation est de la forme :

$$\mathcal{F}(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, \ddot{\varepsilon} \ldots \sigma, \dot{\sigma}, \ddot{\sigma} \ldots) = 0$$

une telle relation est un non-sens si l'on ne précise pas qu'on l'entend en repère rhéologique.

Discussion

Président : M. JOLY

M. ANGLES D'AURIAC complète comme suit son mémoire initial : « Après vous avoir dit à quoi servaient les repères rhéologiques, je voudrais dire à quoi ils ne servent pas.

D'abord, toutes les fois que l'on s'intéresse à des grandeurs objectives, en élasticité, par exemple, on ne s'en sert pas. Les résultats obtenus sont cependant tout à fait valables.

Ensuite, prenons le cas de la viscosité newtonienne : la vitesse de déformation qui intervient dans la loi de Newton est une grandeur objective; il n'y a pas besoin ici de parler de repères rhéologiques.

On peut même aller plus loin : prenons les liquides non newtoniens et remarquons tout d'abord que s'il n'y a qu'une seule façon d'être newtonien, il y a deux façons de ne pas l'être :

— ou bien, il s'agit de viscosité pure, comme disait M. JOLY ce matin et il existe alors une relation ponctuelle entre vitesse de déformation et contrainte;

— ou bien la relation est fonctionnelle.

Si la relation est ponctuelle, tout se passe comme dans le cas de la viscosité newtonienne. Inutile de s'embarrasser de questions de repères rhéologiques; les grandeurs sont objectives.

Si la relation est fonctionnelle, notamment dans le cas de visco-élasticité, attention !... Si vous n'écrivez pas des grandeurs objectives, vous risquez d'écrire des bêtises.

Mais on peut même aller encore plus loin dans certains cas de visco-élasticité (mes collaborateurs en parleront plus avant que moi) : dans certains cas, on peut faire une approximation et considérer comme repère rhéologique un repère qui ne l'est pas en réalité.

Si vous considérez, par exemple, des oscillations sur un liquide de Weissenberg, vous avez des vitesses de rotation. Théoriquement, il faudrait écrire l'équation en repères rhéologiques, et après cela traduire en repères quelconques. Mais du fait de cet aller et retour, on peut se contenter d'une approximation. Je crois que l'erreur n'est pas grande si on néglige la notion de repères rhéologiques.

Bien entendu, si au lieu d'oscillations vous avez une rotation continue, il n'est plus question de considérer les repères naturels comme repères rhéologiques. »

M. le Président remercie M. ANGLES D'AURIAC et ouvre la discussion :

A propos de l'utilisation par M. ANGLES D'AURIAC d'une dérivée de Jaumann, M. VAN GEEN évoque un problème un peu analogue que l'on rencontre en magnétohydrodynamique.

On rencontre dans les équations de comportement nécessaires à l'étude de la déformation d'un milieu continu en présence d'un champ électromagnétique, des dérivées par rapport au temps de grandeurs plus simples que les tenseurs, par exemple du *vecteur de polarisation diélectrique.*

Le calcul du taux de variation de cette polarisation doit être objectif, c'est-à-dire le même pour tous les observateurs.

La manière la plus simple d'y arriver — et sur ce point, je suis tout à fait d'accord avec M. ANGLES D'AURIAC — consiste à employer une dérivée de Jaumann, c'est-à-dire une dérivée calculée dans des repères rhéologiques, parce que cette dérivée a l'avantage d'être calculée dans des axes orthonormés. Je crois que c'est un des gros avantages de la dérivée de Jaumann.

En fait, c'est un calcul de taux de variation fait par rapport à la matière : c'est le point important à retenir. Lorsqu'on exprime que quelque chose change et lorsqu'il s'agit de propriétés de la matière qui sont invariantes par rapport à l'existence ou non d'un observateur, il faut les calculer par rapport à cette matière.

Or, cette matière se déforme. Les axes se déforment, et la manière la plus simple d'obtenir une donnée objective, consiste à choisir ces axes irrotationnels, en construisant à chaque endroit un repère orthonormé qui est celui qui a subi la rotation du milieu.

Le groupe de recherche en mécanique des milieux continus, à l'Université Libre de Bruxelles, a la réputation d'être un adversaire des dérivées de Jaumann. En fait, l'idée qui nous fait préférer la dérivée de Lie dans un certain nombre de cas est liée à sa signification physique.

Je voudrais d'abord préciser ce qu'est une dérivée de Lie par rapport à une dérivée de Jaumann.

Dans la dérivée de Lie, on part d'un système de repères noyés dans la matière. Il s'agit donc d'un repère figé dans la matière et se déformant avec cette matière lors de son mouvement. (« Sur la définition du taux de variation de contrainte et ses applications en rhéologie », G. MAYNE et R. VAN GEEN, *Cahiers du Groupe français de rhéologie,* n° 6, tome I, avril 1968.)

Par rapport aux repères rhéologiques de M. ANGLES D'AURIAC, il y a quelque chose de plus : non seulement les axes tournent, mais en outre, ils se déforment. Les axes unitaires se modifient, ensuite leurs angles se modifient, et le repère n'est plus orthonormé. Quand on calcule une dérivée dans ce repère-là, on obtient une autre dérivée qui est, elle aussi, objective; nous l'avons appelée « intrinsèque ».

Il est tout à fait exact que dans les équations de comportement, il est indifférent de choisir une dérivée de Lie ou une dérivée de Jaumann. La dérivée de Jaumann en termes mathématiques est la composante rigide de la dérivée de Lie : elle est plus simple à employer en général.

Mais il y a un cas où il n'en est pas ainsi et c'est à ce cas-là que je voulais faire allusion en parlant des équations de l'hydrodynamique.

Je voudrais écrire au tableau la quatrième équation de Maxwell :

$$\varepsilon_0 C^2 \operatorname{rot} \vec{B} = \varepsilon_0 \partial_t \vec{E} + \vec{j}$$

où $\vec{j}$ représente tous les courants.

Lorsqu'il s'agit de matière diélectrique immobile, comme en électrodynamique, $\vec{j}$ se réduit à la dérivée habituelle de la polarisation par rapport au temps.

Mais lorsqu'il s'agit d'une matière en mouvement, ce taux doit être calculé nécessairement par rapport à la matière. On n'a pas le choix. S'agissant d'une grandeur transportée, on doit prendre une dérivée de Lie sur le champ de vitesses.

Naturellement, ceci n'est pas une équation de comportement, c'est une équation de transport, et dans ce cas-là, le repère rhéologique n'est pas suffisant. Il faut utiliser une dérivée réellement intrinsèque qui tient compte des propriétés de transport de la matière.

C'est uniquement en ce sens-là qu'il m'est arrivé de dire qu'un calcul était incorrect parce qu'il utilisait une dérivée de Jaumann à la place d'une dérivée intrinsèque.

M. VAN GEEN ayant précisé qu'il ne s'agissait pas d'une équation de comportement, je suis d'accord sur ce qu'il vient de dire, répond M. ANGLES D'AURIAC qui poursuit :

« Je voudrais faire remarquer, à propos de la dérivée de Jaumann, que dans les livres elle est plutôt appelée « vitesse de la contrainte » et non pas « dérivée ». Personnellement, je n'aime pas ce mot de « vitesse »... Evidemment, on l'emploie par assimilation : la dérivée des coordonnées d'un point par rapport au temps s'appelle « vitesse »; alors, ici on parle de « vitesse de la contrainte ».

« Mais va-t-on appeler « accélération de la contrainte » la dérivée seconde ? »

Un débat auquel participent MM. ANGLES D'AURIAC, JOLY, RADENKOVIC, s'instaure alors sur la possibilité de décrire sans repères spéciaux le comportement de corps anisotropes.

En raison des exigences de l'horaire, M. le Président clôt la discussion en souhaitant qu'elle soit poursuivie dans une autre enceinte. Il renouvelle ses remerciements à M. ANGLES D'ARIAC et aux personnes qui ont pris part à la discussion.

Abstract

The principles of continuous-media mechanics

The author only considers bodies governed by the principle of local properties. He gives an explicit formulation for the (universal) spatial isotropy principle and the (possible) isotropy of the law governing a body. After a statement of evident consequences of this a number of examples are given, showing that whether spatial isotropy results in an isotropic relationship depends on the type of law involved.

The author then states the objectivity principle, which can be interpreted either in its strict sense, i.e. disregarding spatial isotropy, or in its wider sense embracing the latter. He makes a distinction between the effect of definition and expression datums, also between quantities that are naturally objective because they do not depend on the definition datum and quantities made objective by statement of their definition datum.

He then draws attention to the difference between datums defined before definition of the flow of the body and datums connected with the actual flow, e.g. rheological datums.

Finally, he explains why it is preferable *physically* to express the relationship in terms of a rheological datum, but that in approaching concrete problems *mathematically* it is still essential to express the original relationship in rheological datum terms.