

FORMULATION DU PRINCIPE DE BOLTZMANN EN REPÈRE RHÉOLOGIQUE ET INTERPRÉTATION DE CERTAINS RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX DANS LE CADRE DE CETTE HYPOTHÈSE

Communication présentée au
Comité Technique de la Société Hydrotechnique de France
le 19 mars 1970

PAR P. LE ROY ET J.-M. PIERRARD *

La loi de comportement d'un liquide incompressible satisfaisant au principe de superposition de Boltzmann s'écrit dans un repère rhéologique (noté Rh dans la suite) :

$$S_1^{ij}(t) = \int_{-\infty}^t \chi(t-\tau) \mathcal{D}_1^{ij}(\tau) d\tau \quad (1)$$

où S représente le déviateur de contrainte, de composantes S_1^{ij} dans (Rh), la vitesse de déformation (écrite dans le même repère), et $\chi(t)$ une fonction caractéristique du matériau.

Notons que cette fonction $\chi(t)$ est la fonction relaxation du corps, reliée aux fonctions de distribution des temps de réponse par les expressions classiques.

Écrite en repère (R') non rhéologique, fixe ou non, la relation (1) n'est pas linéaire :

$$S_2^{hk}(t) = r_i^h(t) \cdot r_j^k(t) \int_{-\infty}^t \chi(t-\tau) \mathcal{D}_2^{pq} r_i^p(\tau) \cdot r_j^q(\tau) d\tau$$

où $r_j^i(t)$ représente la rotation faisant passer du repère (R') au repère (Rh).

La loi de comportement n'est donc pas linéaire.

Nous allons voir que le principe de superposition utilisé ici en repère (Rh) traduit en comportement de nombreux matériaux dits viscoélastiques, et ce pour des vitesses de déformation variant dans un large domaine.

Nous avons obtenu les solutions analytiques explicites dans le cas d'écoulements stationnaires de révolution [1]. En un point de coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) la vitesse est supposée de la forme $\vec{V} = \rho \cdot g(\rho, z) \vec{h}_1$ où le repère orthonormé $[\vec{h}_i]$ est défini par :

\vec{h}_2 , dans le plan méridien, normal aux lignes $g = \text{cte}$;
 \vec{h}_3 , dans ce même plan, tangent aux lignes $g = \text{cte}$.

Dans ce repère, on a :

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} 0 & \Omega_1 & 0 \\ \Omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

et :

$$S = \begin{vmatrix} S^{11} & S^{12} & 0 \\ S^{12} & -S^{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

avec :

$$\left. \begin{aligned} S^{11} &= \Omega_1 \int_0^\infty \chi(u) \sin(2\Omega_1 u) du \\ S^{12} &= \Omega_1 \int_0^\infty \chi(u) \cos(2\Omega_1 u) du \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Considérons un écoulement de ce type entre un plan et un cône. Le plan est fixe, le cône animé d'un mouvement de rotation à la vitesse angulaire $\omega = \text{cte}$.

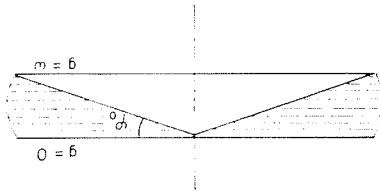
La surface libre est une portion de sphère (fig. 1). On néglige les forces d'inertie.

Dans le cas où l'angle φ_0 est petit, Ω_1 est constant dans tout l'échantillon, et égal à $\omega/2\varphi_0$.

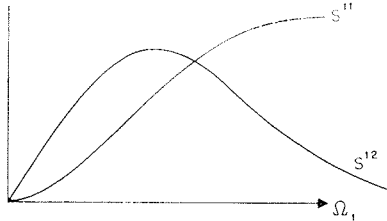
L'étude de S^{11} et S^{12} en fonction de Ω_1 donne les variations suivantes (fig. 2). On montre [1, 2] qu'on ne peut avoir de solution du type envisagé pour des valeurs de Ω_1 supérieures à celle correspondant au premier maximum de S^{12} .

Les expériences ont été réalisées au moyen d'un rhéogoniomètre de Weissenberg. Les matériaux utilisés étaient

* Laboratoires de Mécanique des Fluides, Université de Grenoble.



1/



2/

notamment des polymères du type polyisobutylène, en solutions ou non, et également une gomme silicone.

Les angles \$\phi_0\$ utilisés variaient entre \$1^\circ\$ et \$4^\circ\$. On a mesuré l'effort normal total sur le cône; cet effort est proportionnel à \$S^{11}\$. De même, on mesurait le couple résultant des contraintes tangentielles exercées sur le plan; ce couple est proportionnel à \$S^{12}\$.

En deçà de la valeur limite de \$\Omega_1\$, les résultats ont l'allure de ceux obtenus analytiquement.

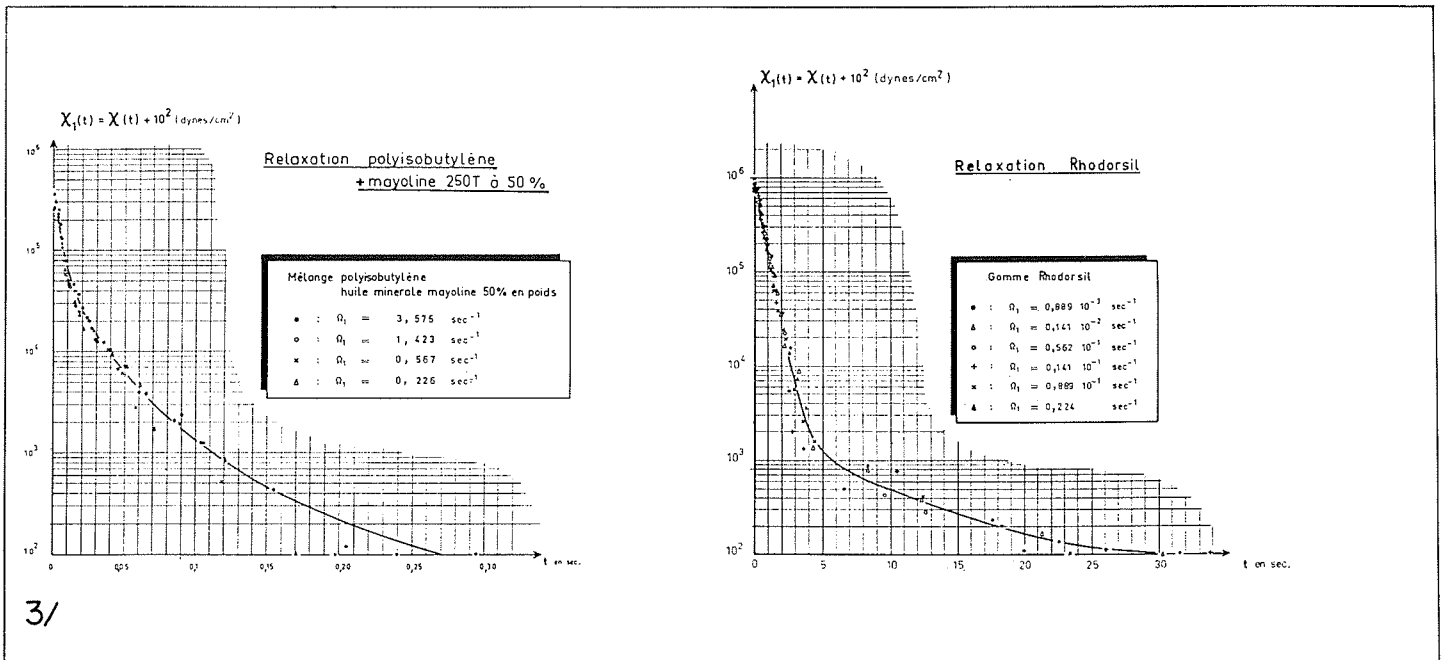
L'impossibilité de faire varier \$\Omega_1\$ de 0 à \$1^\infty\$ ne permet pas de déterminer \$\chi(t)\$ à l'aide de ces seules expériences en régime permanent.

Par contre, une expérience de relaxation permet d'obtenir \$\chi(t)\$.

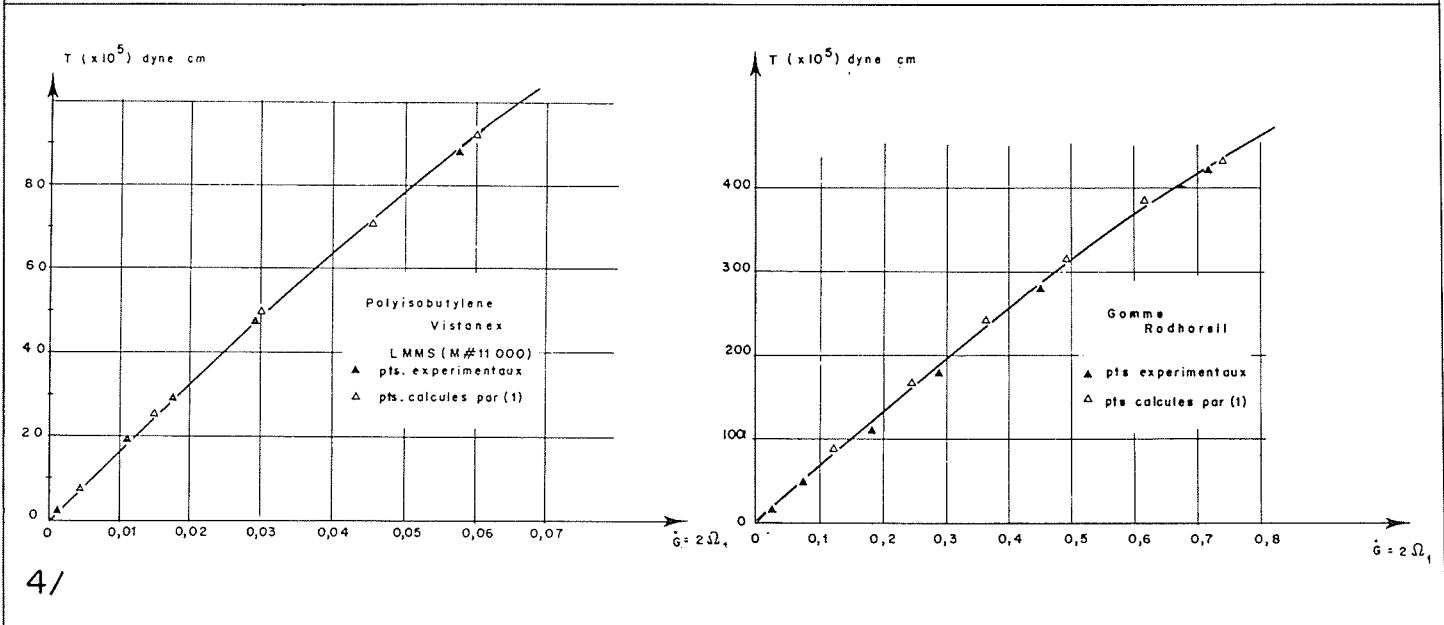
Si, à \$t = 0\$, on suppose que l'on arrête instantanément l'écoulement, l'évolution des contraintes au cours du temps est donnée par :

$$S^{11}(t) = - \int_{-\infty}^0 \chi(t-\tau) \Omega_1 \sin(2 \Omega_1 \tau) d\tau$$

$$S^{12}(t) = \int_{-\infty}^0 \chi(t-\tau) \Omega_1 \cos(2 \Omega_1 \tau) d\tau$$



3/



4/

où Ω_1 est celui de l'écoulement de rotation uniforme à partir duquel on effectue l'essai de relaxation.

Ces contraintes satisfont au système différentiel suivant, qui permet le calcul de $\chi(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{dS^{11}}{dt} + 2\Omega_1 S^{12} &= 0 \\ \frac{dS^{12}}{dt} - 2\Omega_1 S^{11} &= -\chi(t) \end{aligned}$$

Le montage expérimental ne permet les mesures précises de l'effort normal $N = (AS^{11})$ qu'en régime permanent (en régime transitoire, le temps de réponse du servomécanisme de mesure est couplé avec celui du matériau).

Au cours de l'expérience, on suit l'évolution de $T = (A_1 S^{12})$ au cours du temps, ce qui permet d'obtenir la fonction $\chi(t)$ caractéristique du matériau. En effet :

$$A_1 \chi(t) = -\frac{1}{\Omega_1} \frac{dT(t)}{dt} - 4\Omega_1 \int_{\infty}^t T(\tau) d\tau$$

$$(A_1 = \int_{\text{plan}} \rho d\Sigma)$$

Cette fonction $\chi(t)$ étant une fonction caractéristique du matériau, elle ne doit pas dépendre des conditions initiales de l'expérience, c'est-à-dire de Ω_1 .

Nous présentons les courbes $\chi(t)$ pour deux matériaux différents : solution à 50 % en poids de polyisobutylène vis-tanex L.M.M.S. (P.M. # 11 000) et d'huile minérale mayoline, et gomme rhodorsil (silicone chargé de type diméthyl-polysiloxamique) (fig. 3).

Pour confirmer plus complètement l'hypothèse de la loi choisie, nous avons recalculé par (2), et à partir des fonctions $\chi(t)$ déterminées expérimentalement les valeurs de l'effort normal et du couple mesurées en régime stationnaire [3].

Les calculs, utilisant la transformée de Fourier de la fonction $\chi(t)$, ont été effectués numériquement sur ordinateur. Les résultats comparés sont reportés sur la figure 4.

La coïncidence est remarquable pour le domaine des vitesses de rotation acceptables mathématiquement [2] tout en négligeant les forces d'inertie.

Références

- [1] P. LE ROY. — Thèse de doctorat d'Etat (juillet 1968).
- [2] P. LE ROY. — C.R.A.S., t. 264, 1967, p. 361.
- [3] P. LE ROY et J.-M. PIERRARD. — C.R.A.S., t. 269, p. 1013-1016 (1969).
- [4] P. LE ROY et J.-M. PIERRARD. — C.R.A.S. t. 270, p. 677-678.

Discussion

Président : M. JOLY

M. le Président remercie M. LE ROY et ouvre la discussion en lui posant la question suivante :

« Avez-vous constaté que lors des mesures avec l'appareil de Weissemberg, il apparaît parfois une différence de température entre cône et plateau ? Il arrive qu'elle soit de l'ordre de 1 °C si l'équipement thermostatique de l'appareil n'est pas installé dans une pièce correctement thermostatée. »

Dans nos expériences, répond M. LE ROY, les températures du fluide ont toujours été celles de la pièce thermostatée et nous n'avons pas rencontré le problème évoqué par M. JOLY.

M. VAN GEEN observe que les résultats présentés par M. LE ROY sont un exemple très convaincant de l'intérêt du repère rhéologique pour établir des équations de comportement qui manifestement apparaissent comme beaucoup plus simples dans ce repère.

Il signale qu'une thèse soutenue par Mme CHESEAU devant la faculté de Marseille, montre qu'en repère rhéologique toute la complexité de l'effet Weissemberg disparaît; on constate des correspondances analogues à celles qu'a montrées M. LE ROY.

M. le Président clôt la discussion en remerciant M. LE ROY.

