ANNEXE II

LA NOTION DE " BON MÉLANGE " DANS L'EMPLOI DE TRACEURS. VITESSE DÉBITANTE ET VITESSE DU CENTRE DE GRAVITÉ D'UN NUAGE DE TRACEURS DANS L'ÉTUDE D'UN ÉCOULEMENT.

par M. Alquier *
G. Courtois **
G. Gruat *
et G. Sauzay ***

Résumé

Dans les mesures de débit par traceurs, il est commun d'utiliser les méthodes d'intégration dans le temps qui font intervenir la « condition de bon mélange » connue sous la forme :

$$\int_0^T C\,dt = \text{Cte}$$

Les auteurs montrent que cette relation est générale quelle que soit la méthode utilisée en la déduisant de définitions générales relatives aux notions de traceurs parfaits et de représentativité de l'écoulement par le traceur, en utilisant les analogies avec les régimes transitoires et permanents. Elle apparaît comme une condition nécessaire et suffisante de mesure de débit par traceurs, indépendamment des conditions initiales d'injection.

Il est alors possible d'établir une relation entre le débit et un ou plusieurs paramètres caractéristiques du déplacement du traceur. Notamment dans les méthodes qui se servent de la vitesse du centre de gravité d'un nuage de traceurs V_G, il existe une relation entre cette vitesse et la vitesse moyenne du fluide. On donne la valeur du rapport entre ces deux vitesses; le rapport est une fonction du profil des vitesses de l'écoulement étudié et est en général différent de 1. Ce calcul utilise la théorie des probabilités et certains principes de la mécanique des fluides.

Par ailleurs, certaines méthodes utilisent la notion de temps moyen de parcours entre deux sections données. Quelques critiques de cette notion sont données.

Introduction générale

Il existe deux systèmes pour observer ou mesurer un phénomène dynamique, c'est-à-dire un phénomène où le temps et l'espace sont considérés comme les deux variables fondamentales : ce sont les systèmes eulérien et lagrangien.

Dans le système eulérien, l'observateur est censé étudier le phénomène en un lieu donné (espace fixe), alors que s'écoule le temps.

Dans le système lagrangien, au contraire, l'observateur détermine les caractéristiques spatiales du phénomène à un instant précis donné.

Au sein du domaine des traceurs en hydrologie et de la sédimentologie qui nous intéresse plus particulièrement, nous rattacherons volontiers :

— *Au système eulérien,* les déterminations de débits effectués dans une section fixe par des procédés d'observations des concentrations en fonction du temps (méthode de dilution ponctuelle, de dilution continue), toutes les études des nappes phréatiques à partir de piézomètres et tubes filtrants, (vitesse horizontale, verticale, etc.);

— *Au système lagrangien,* les études de charriage des fonds dans lesquelles la forme spatiale du nuage est déterminée alors que sa déformation est considérée comme négligeable pendant le temps de détection.

La distinction entre ces systèmes ou leur utilisation, peut être parfois délicate dans diverses études dans lesquelles la détection est faite dans l'espace et traduite sous forme d'intégrales de concentration dans le temps, comme cela est le cas pour la méthode de dispersion des effluents développée initialement au Danemark, ou bien lorsqu'on utilise simultanément les deux types de détection, point fixe et exploration de l'espace, comme il est courant de le faire en France pour des études de dynamique de sédiments en suspension.

Dans ce qui va suivre, nous serons amenés à distinguer ces deux systèmes, mais il importe de souligner que toutes les expériences de traceurs précédemment évoquées doivent satisfaire, du moins dans la limite de la précision recherchée, aux conditions de représentativité cinématique de bon traceur et de celles dites de « bon mélange ». Ces dernières conditions sont d'ailleurs fort connues sous leur forme mathématique dans les systèmes eulériens et n'ont pas reçu à notre connaissance de formulation satisfaisante dans un système lagrangien. Malheureusement ici, nous ne remédierons pas à cette lacune.

Dans cet article, nous nous proposons :

— dans les deux premières parties de donner une définition générale de la représentativité d'un traceur et notamment de montrer à partir d'un modèle probabiliste, que dans les mesures de débit à injection ponctuelle, la condition de bon mélange :

$$\int_0^T C\,dt = \text{Cte}$$

est une condition *nécessaire* et *suffisante;*

— dans les deux parties qui suivront, de mettre en évidence certaines particularités des modes d'observation lagrangien et eulérien.

* Institut de Mécanique des Fluides, Toulouse.
** Section d'Application des Radioéléments, C.E.A., Saclay.
*** Section d'Application des Radioéléments, C.E.A., Saclay. Actuellement : Agence Internationale de l'Energie Atomique, Section d'Hydrologie, Vienne (Autriche).

1. — Représentativité d'un traceur et conditions de "bon mélange"

1.1 Définition d'un traceur parfait.

On dira qu'un traceur est parfait, si chaque particule du traceur obéit aux mêmes lois de mouvement que les particules étudiées qu'il s'agisse de particules fluides, de particules en suspension ou de particules solides constituant un fond mobile.

D'un point de vue pratique, dans le cas du phénomène étudié, et plus particulièrement dans le cas des mesures de débit, on ne s'intéresse généralement qu'à la moyenne sur un certain intervalle de temps, des caractéristiques du mouvement. Un traceur sera donc considéré comme parfait, s'il obéit aux mêmes lois de mouvement moyen que les particules étudiées. Du point de vue cinématique, une particule d'un traceur parfait devra être indiscernable d'une particule du mouvement étudié.

1.2 Remarque concernant la représentativité d'un traceur.

Les considérations qui vont suivre sont valables pour n'importe quel paramètre X d'un mouvement, mais afin d'en faciliter la compréhension, elles seront appliquées au débit Q.

Soient :

T l'ensemble des paramètres caractéristiques du déplacement du traceur;

H l'ensemble des paramètres caractéristiques du mouvement étudié mis à part le paramètre X étudié et pour la circonstance le débit Q;

I l'ensemble des paramètres caractéristiques des conditions initiales.

Il existe en général, une relation, liant ces trois ensembles au débit Q, relation que l'on peut mettre sous la forme :

$$f(\mathrm{T}, \mathrm{H}, \mathrm{I}) = \mathrm{Q} \qquad (1)$$

Donc formellement, de la connaissance de I, de T et de H, on peut déduire le débit et par là même, il n'est pas inexact de dire, mis à part les conditions d'indiscernabilité cinématique précédemment évoquées, que tout traceur est représentatif de l'écoulement. La notion de représentativité n'est donc pas strictement liée à la notion de bon mélange que nous allons préciser. Il se trouve simplement qu'on n'a pas encore trouvé le moyen mathématique d'incorporer I lié aux conditions initiales, aux équations régissant le phénomène étudié.

1.3 Définition du « bon mélange ».

Dans la plupart des phénomènes physiques, on est amené à considérer deux régimes :

1° Un régime transitoire durant lequel les caractéristiques du phénomène dépendent des conditions initiales.

2° Un régime permanent, stable ou instable, qui ne dépend pratiquement plus de ces conditions initiales.

Par analogie, et conformément aux observations expérimentales, nous supposerons qu'au bout d'un certain temps θ, les conditions initiales d'injection du traceur n'interviennent plus dans la relation définissant le débit Q, qui devient alors :

$$h(\mathrm{T}, \mathrm{H}) = \mathrm{Q} \qquad (2)$$

Nous dirons que, dans ces conditions, le bon mélange est réalisé, *la condition de bon mélange apparaissant comme l'ensemble des conditions nécessaires et suffisantes pour que les mesures faites soient indépendantes des conditions initiales, c'est-à-dire des conditions dans lesquelles le traceur a été injecté.*

2. — Expression de la condition de "bon mélange" dans le cas d'une injection instantanée (Système eulérien)

Un des procédés classiques de mesure de débit est la méthode de dilution ponctuelle, dans laquelle :

$$\int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{C}\, dt = \mathrm{Cte} \qquad (3)$$

quel que soit le lieu d'expérience, est considérée comme étant la condition de bon mélange.

Dans cette équation, C représente au temps t, la concentration en masse du traceur pour unité de volume, (où toute information proportionnelle à cette concentration comme l'activité par unité de volume pour un traceur radioactif) concentration mesurée en un point de l'écoulement, et où l'intervalle [0, T] est choisi de telle sorte que le nuage de traceur passe entièrement dans la section de mesure pendant cet intervalle de temps.

Expérimentalement, on constate qu'au-delà d'une certaine distance L correspondant au temps θ précédemment évoqué, l'intégrale précédente est constante quel que soit le point où on effectue la mesure.

Nous nous proposons, en partant de la définition de la condition de bon mélange du paragraphe 1.3, de démontrer que la condition (3) est la condition nécessaire et suffisante de bon mélange.

Il est évident que si une telle démonstration est faite, tout traitement mathématique de cette condition tendant à l'adapter à une méthode différente, lui conservera son caractère de condition nécessaire et suffisante pour cette nouvelle méthode. Ainsi dans les mesures de débit par la méthode de dilution continue, une injection continue pouvant être considérée comme une suite d'injections instantanées, l'intégrale $\int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{C}\, dt$ peut alors être considérée comme l'intégrale au point de mesure des concentrations produites par chacune des injections de cette suite, c'est-à-dire comme de la concentration en ce point. La condition de bon mélange, nécessaire et suffisante, apparaîtra comme étant :

$$\mathrm{C} = \mathrm{Cte}$$

Revenons donc à l'injection ponctuelle.

2.1 La condition est nécessaire.

Nous nous proposons de démontrer que si, par hypothèse, les paramètres caractéristiques du déplacement du traceur sont indépendants des conditions initiales d'injections, alors :

$$\int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{C}\, dt = \mathrm{Cte}$$

Soit un écoulement permanent et uniforme; S_0 la section d'injection et S_1 une section telle, qu'au-delà de celle-ci, les paramètres caractéristiques du déplacement du traceur soient indépendantes des conditions initiales.

Considérons un élément dS d'une section S, qui peut être la section de mesure, et qui est située à l'aval de S_1. La probabilité élémentaire $\delta p_T(dS)$ pour une particule de traceur injectée en S_0 de traverser dS, est, d'après les hypothèses, indépendante des conditions initiales. En d'autres termes, les particules du traceur injectées en S_0 ont toutes la même probabilité de traverser dS.

D'autre part, pour que le mouvement des particules de traceur soit indiscernable cinématiquement du mouvement des particules non marquées, il est nécessaire que la probabilité élémentaire $\delta p_i(dS)$ pour une particule de S_0 de traverser la même section dS en aval de S_1 soit égale à cette même probabilité pour une particule de traceur. Cette probabilité $\delta p_i(dS)$ est par définition indépendante de la position occupée par la particule non marquée dans la section S_0.

Ainsi la condition nécessaire de bon mélange s'exprime par :

$$\boxed{\delta p_T(dS) = \delta p_i(dS)} \tag{4}$$

(indices T = traceur et i = inactif.)

Il reste donc à évaluer indépendamment δp_T et δp_i.

2.1.1 Calcul de $\delta p_T(dS)$.

Prenons un élément dS normal à l'écoulement et suffisamment petit pour que la vitesse de chaque particule la traversant, soit statistiquement égale de V.

La masse d^2m de traceur qui traverse dS pendant un intervalle de temps dt est :

$$d^2m = C.V.dS.dt$$

et pendant un intervalle de temps [0, T] :

$$dm = \int_0^T C.V.dS.dt$$

Supposons le régime permanent :

$$dm = V.dS \int_0^T C\,dt \tag{5}$$

la masse totale du traceur étant M :

$$M = \int_S V.dS \int_0^T C\,dt \tag{6}$$

La probabilité $\delta p_T(dS)$ pour une particule de traceur de traverser dS est :

$$\boxed{\delta p_T(dS) = \frac{dm}{M} = \frac{V.dS}{M} \int_0^T C\,dt} \tag{7}$$

2.1.2 Calcul de $\delta p_i(dS)$.

Pour calculer $\delta p_i(dS)$ intéressons-nous à la probabilité pour une particule inactive supposée en S_0 au temps $t = 0$, de traverser dS entre les instants 0 et T.

Cette probabilité $\delta p_i(dS, T)$ est égale à :

$$\delta p_i(dS, T) = \frac{d\Sigma(0, T)}{\Sigma(0, T)}$$

dans laquelle :

$d\Sigma(0, T)$ est le volume de particules non marquées qui traversent dS entre 0 et T,

et :

$$d\Sigma(0, T) = V.dS.T$$

$\Sigma(0, T)$ est le volume des particules non marquées qui traversent S entre 0 et T :

$$\Sigma(0, T) = Q.T$$

Par suite :

$$\delta p_i(dS, T) = \frac{V.dS.T}{Q.T} = \frac{V.dS}{Q} \tag{8}$$

Mais, selon le principe des probabilités composées, la probabilité pour une particule inactive de traverser dS entre 0 et T, est le produit de la probabilité de cette particule de traverser dS, soit $\delta p_i(dS)$ cherché, par la probabilité $g(S, T)$ pour une particule non marquée située en S_0 au temps $t = 0$, de traverser la section S pendant l'intervalle de temps 0, T :

$$\delta p_i(dS, T) = \delta p_i(dS)\, g(S, T)$$

Il suffit de prendre un temps T suffisamment grand pour que toutes les particules situées en S_0 à $t = 0$, aient traversé S au bout du temps T, pour avoir :

$$g(S, T) = 1$$

Dans ces conditions :

$$\delta p_i(dS, T) = \delta p_i(dS)$$

et :

$$\boxed{\delta p_i(dS) = \frac{V.dS}{Q}} \tag{9}$$

2.1.3 Egalité $\delta p_T(dS) = \delta p_i(dS)$.

La condition nécessaire de bon mélange résultant selon (4) de l'égalité de $\delta p_i(dS)$ et de $\delta p_T(dS)$ s'écrit alors :

$$\frac{V.dS}{M} \int_0^T C\,dt = \frac{V.dS}{Q}$$

d'où :

$$\int_0^T C\,dt = \frac{M}{Q} = \text{Cte} \tag{10}$$

et $\int_0^T C\,dt$ est une constante quel que soit l'élément dS choisi.

Ainsi la condition $\int_0^T C\,dt$ *constante est une condition nécessaire de bon mélange.*

Remarque : Dans cette démonstration, et contrairement à ce qui est admis dans l'utilisation de l'intégrale $\int_0^T C\,dt$, T n'apparaît plus comme le temps minimal pour que toutes les particules marquées injectées dans S_0 aient traversé la section de mesure, mais comme le temps minimal pour que toutes les particules marquées ou non, initialement dans S_0, aient traversé cette section.

Du point de vue pratique, cette remarque ne semble pas avoir de conséquences sur l'utilisation de la méthode.

2.2 La condition est suffisante.

Dire que la condition est suffisante, c'est dire que, si par hypothèse :

$$\int_0^T C\,dt \text{ est constant}$$

la relation définissant Q ne dépend pas de la façon dont le traceur a été injecté.

Or, selon la formule (6) précédemment établie :

$$M = \int_S V.dS \int_0^T C\,dt$$

Comme $\int_0^T C\,dt$ est une constante K notamment indépendante de la variable S :

$$M = K \int_S V.dS = KQ$$

et :

$$\boxed{Q = \frac{M}{K} = \frac{M}{\int_0^T C\,dt}} \qquad (11)$$

analogue à (10);

formule dans laquelle ni M masse de traceur injecté, ni la constante K ne dépendent ni du point ni du moment d'immersion.

Dès lors, Q ne dépend plus de la façon dont le traceur a été injecté et :

$$\int_0^T C\,dt = K$$

est une condition suffisante de bon mélange.

Remarques :

1°
$$\int_0^T C\,dt = K$$

est une formulation toute classique de la condition de bon mélange. En rapprochant les formules (5) et (6) :

$$dm = V.dS \int_0^T C\,dt = dQ \int_0^T C\,dt \qquad (5)$$

$$M = \int V.dS \int_0^T C\,dt = Q \int_0^T C\,dt \qquad (6)$$

en divisant (5) par (6), on obtient :

$$\boxed{\frac{dm}{M} = \frac{dQ}{Q}} \qquad (12)$$

qui est une formulation non moins classique de la condition de bon mélange.

2° Les développements précédents entraînent immédiatement comme conclusions, des conclusions sur maints problèmes évoqués quant à l'utilisation pratique de la formule de bon mélange.

Nous en évoquerons ici deux :

a) Comme les seules conditions d'établissement de la condition de bon mélange sont régime permanent, régime uniforme dans le volume de mesure, on peut très bien mesurer le débit en régime laminaire en aval d'une injection en régime turbulent.

b) La présence d'iles dans l'écoulement une fois le bon mélange réalisé n'est pas une perturbation des conditions initiales et le débit total peut donc être mesuré en n'importe quel point, en particulier dans n'importe quel bras de l'écoulement.

3. — Système Lagrangien. Rapport entre V_G et V_m

Les considérations précédentes, si elles éclairent la lanterne des hydrauliciens et hydrologues qui volontiers examinent le problème en un lieu fixe, sont d'un piètre secours dans le cas du déplacement d'un nuage de traceur, dans lequel on s'intéresse à la distribution spatiale des particules marquées à un moment donné, quitte à donner au temps une progression par saut quantifié qui permet d'examiner ces distributions spatiales à des intervalles de temps laissés au gré de l'expérimentateur.

Dans ce cas particulier d'examen lagrangien parmi les paramètres dynamiques qui peuvent apparaître d'un intérêt immédiat, nous retiendrons la vitesse du centre de gravité du nuage des particules, liée aux positions successives dans le temps du centre de gravité de ce nuage.

Jusqu'à ce jour, il a été admis implicitement et d'une façon apparemment fort légitime que la vitesse du centre de gravité V_G d'un nuage de traceur, était représentative ou plus exactement égale à la vitesse débitante V_m qui est, dans une section orthogonale au déplacement, la moyenne des vitesses instantanées, à savoir :

$$V_m = \frac{\int_S V.dS}{\int_S dS} = \frac{Q}{S} \qquad (13)$$

Dès lors, on admettait implicitement que :

$$V_G = V_m \qquad (14)$$

Le paradoxe que nous tentons ici de mettre en évidence consiste à démontrer que dans le cas général, cette dernière n'est pas vérifiée et qu'il existe une relation :

$$V_G = \lambda V_m \qquad (15)$$

dans laquelle λ est un facteur dépendant de la répartition spatiale des vitesses rencontrées.

3.1 Démonstration élémentaire de la relation $V_G = f(V_m)$.

Il y a quelques années, nous commençâmes à soupçonner l'erreur sur la base des considérations élémentaires suivantes :

Selon (12), la condition de bon mélange s'écrit :

$$\frac{dm}{M} = \frac{dQ}{Q} = \frac{V.dS}{Q}$$

Chaque tube de courant transportant à la vitesse V une masse de traceur *dm*, la vitesse du centre de gravité est donc :

$$V_G = \frac{\int_S V.dm}{\int_S dm} = \frac{\int_S V.(M/Q).V.dS}{M} = \frac{\int_S V^2.dS}{Q} = \frac{\int_S V^2.dS}{S.V_m}$$

dès lors :

$$\lambda = \frac{V_G}{V_m} = \frac{\int_S V^2.dS}{S.V_m^2} = \frac{(1/S)\int_S V^2.dS}{[(1/S)\int_S V.dS]^2} = \frac{(\overline{V^2})}{(\overline{V})^2} \qquad (16)$$

$$\boxed{\lambda = \frac{(\overline{V^2})}{(\overline{V})^2}} \qquad (16\ bis)$$

$\overline{V^2} =$ moyenne d'ordre 2 des vitesses;

$\overline{V} =$ moyenne d'ordre 1 des vitesses.

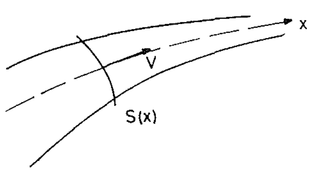
Ce facteur λ, connu des hydrauliciens sous le nom de coefficient de quantité de mouvement n'est pas, dans le cas général égal à 1 et V_G *est différent de* V_m.

Cette démonstration, si elle a la vertu d'être simple et de pouvoir faire sentir le phénomène très rapidement, souffre de bien des insuffisances notamment de par l'obligation de faire appel à la notion de tube de courant qui n'existe pas dans un mouvement quelconque tel que celui observé en charriage sédimentaire.

Nous allons proposer maintenant une démonstration générale sur la base des considérations probabilistes précédemment évoquées.

3.2 **Démonstration générale.**

Considérons le nuage de traceur à un instant t, et soit x l'abscisse curviligne pris sur un axe moyen de l'écoulement



3.2.1 Expression de V_G.

Il est facile d'établir que :

$$V_G = \frac{1}{M} \iiint_\Omega V.C.d\Omega \tag{17}$$

où C représente la concentration du traceur par unité de volume dans l'élément $d\Omega$ à l'instant t.

Prenons maintenant comme variable principale la vitesse V : on fait alors un changement de variable et au lieu d'utiliser les variables spatiales comme ci-dessus, on va refaire l'intégration par rapport à V, selon :

$$V_G = \int_0^{V_{max}} V \left(\frac{\int_\Omega C d\Omega}{M} dV \right) \tag{18}$$

où

$$dq\,(V) = \frac{\int_\Omega C d\Omega}{M} dV$$

est la masse relative élémentaire de traceur animée d'une vitesse comprise entre V et V + dV dans le volume Ω à l'instant t. Cette masse relative est une fonction de V,

d'où :

$$\pi\,(V) = \frac{dq\,(V)}{dV} = \frac{\int_\Omega C d\Omega}{M} \tag{19}$$

est la densité de probabilité pour une particule de traceur d'être animée de la vitesse V dans le volume Ω à l'instant t.

Dès lors :

$$\boxed{V_G = \int_0^{V_{max}} V.\pi\,(V)\,dV} \tag{20}$$

3.2.2 Calcul de π (V).

Selon le théorème des probabilités composées, la densité de probabilité pour une particule de traceur d'être *à l'instant* t animée de la vitesse V dans la section S (x)

$$\frac{d\pi\,(V)}{dx} = \frac{d^2q\,(V,\,x)}{dV.dx}$$

est le produit de la densité de probabilité :

$$\frac{dw\,(x,\,t)}{dx}$$

pour la particule marquée d'être à l'instant t dans la section S (x), par la densité de probabilité :

$$dp\,(V)/dV$$

pour la particule d'être animée de la vitesse V, quels que soient t et x :

$$\frac{d\pi\,(V)}{dx} = \frac{dw\,(x,\,t)}{dx}\,\frac{dp\,(V)}{dV}$$

La densité de probabilité pour une particule d'être animée de la vitesse V dans le volume Ω à l'instant t est :

$$\pi\,(V) = \int_x \frac{dw\,(x,\,t)}{dx}\,\frac{dp\,(V)}{dV}\,dx$$

$dp\,(V)/dV$ étant indépendant de x

$$\pi\,(V) = \frac{dp\,(V)}{dV} \int_0^\alpha \frac{dw\,(x,\,t)}{dx}\,dx$$

dans laquelle 0 et α sont les abscisses extrêmes du nuage.

D'après la définition de $dw\,(x,\,t)$:

$$\int_0^\alpha \frac{dw\,(x,\,t)}{dx}\,dx$$

représente la probabilité pour une particule d'être comprise entre les sections d'abscisses $x = 0$ et $x = \alpha$;

donc :

$$\int_0^\alpha \frac{dw\,(x)}{x}\,dx = 1$$

et on a :

$$\boxed{\pi\,(V) = \frac{dq\,(V)}{dV} = \frac{dp\,(V)}{dV}} \tag{21}$$

Ce résultat s'exprime de la manière suivante :

La probabilité pour une particule marquée d'être au sein du nuage à un instant donné animée de la vitesse V est le rapport de la masse de particules animées de la vitesse V à la masse totale des particules marquées.

Il a été établi précédemment qu'en régime permanent, cette probabilité était égale à :

$$\pi\,(V) = \frac{dm\,(V)}{M\,dV} = \frac{V.\,dS \int_0^T C\,dt}{(\int_S V.\,dS \int_0^T C\,dt)\,dV}$$

et si la condition de bon mélange est satisfaite :

$$\int_0^T C\,dt = Cte$$

et :

$$\pi\,(V) = \frac{V.dS}{(\int_S V.dS)\,dV} \tag{22}$$

Remplaçons cette dernière relation dans l'équation (20) qui définit V_G, on obtient alors :

$$V_G = \frac{1}{\int_S V.dS} \int_V V^2 \frac{dS}{dV} dV$$

et en prenant de nouveau S comme variable principale :

$$V_G = \frac{\int_S V^2.dS}{\int_S V.dS}$$

ou encore puisque :

$$V_m = \frac{1}{S} \int_S V.dS$$

$$\boxed{\lambda = \frac{V_G}{V_m} = \frac{1/S \int V^2.dS}{(1/S \int V.dS)^2} = \frac{(\overline{V^2})}{(\overline{V})^2}}$$

analogue aux formulations (16) et (16 *bis*).

Notons que cette relation entre V_m et V_G dépend des paramètres de l'écoulement par le coefficient λ.

3.3 Tentative de mise en évidence de λ.

Par un montage expérimental, nous avons tenté de mettre en évidence la différence entre V_G et V_m caractérisée par λ. Ce montage consiste en un écoulement turbulent qu'on fait passer par un élargissement notable à un régime laminaire. Dans ce courant sont injectées des microsphères d'aluminium et le nuage de ces particules éclairées dans une tranche est photographié périodiquement.

La technologie très délicate d'un tel processus ne nous a pas encore jusqu'à maintenant permis d'obtenir des résultats suffisamment satisfaisants pour calculer avec assez de précision V_G.

3.4 Application de ce paradoxe aux problèmes de sédimentologie.

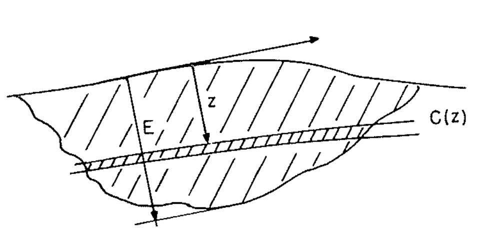
La différence entre V_G et V_m ainsi paradoxalement mise en évidence n'a guère de conséquence en hydrologie; ceci pour deux raisons :

1° On est le plus souvent en régime turbulent, (surtout dans le cas des mesures de débit de rivière) et, en régime turbulent, le spectre des vitesses étant constant, λ est égal à 1.

2° On examine le résultat à lieu fixe, c'est-à-dire en régime eulérien.

Il n'en est plus de même dans l'emploi des traceurs pour les études de charriages sédimentaires, où les deux points précédents ne sont plus satisfaits.

D'une façon générale, dans ce cas, soit à l'instant t, un nuage de traceur sédimentaire, enfoui sur une profondeur E



Appelons C (z) la concentration en éléments marqués dans la couche située à la profondeur z.

Si la condition de bon mélange est satisfaite, celle-ci écrite sous la forme (12) s'écrit ici, pour la couche (z, $z + dz$) :

$$\frac{C(z)\,dz}{M} = \frac{dQ(z)}{Q} = \frac{V(z)\,dz}{Q}$$

Ainsi donc, la concentration dans une couche est proportionnelle à la vitesse dans cette couche et :

$$\lambda = \frac{(\overline{V^2})}{(\overline{V})^2} = \frac{(\overline{C^2})}{(\overline{C})^2}$$

Essayons alors de nous rendre compte sur des exemples concrets de la valeur que pourrait prendre :

PREMIER CAS : *La répartition de concentration en profondeur est constante,* c'est le cas admis par M. de Vries * (Hollande) sur la base d'expériences faites sur les dunes à l'aide de traceurs fluorescents.

Dans ce cas :

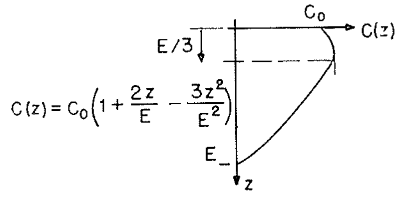
$$C(z) = \text{Cte}$$

et :

$$\lambda = 1$$

SECOND CAS : *La répartition de concentration en profondeur est parabolique,* c'est que nous admettons personnellement comme la distribution la plus probable et celle que nous utilisons dans notre méthode du bilan des taux de comptages [1]. Nous admettons que la parabole de répartition présente un maximum au ⅓ de la profondeur maximale et répond par suite à l'équation :

$$C(z) = C_0\left(1 + \frac{2z}{E} - \frac{3z^2}{E^2}\right)$$



Dans ce cas, λ vaut :

$$\lambda = \frac{1/E \int_0^E (1 + 2z/E - 3z^2/E^2)^2\,dz}{[1/E \int_0^E (1 + 2z/E - 3z^2/E^2)\,dz]^2}$$

Tout calcul fait on trouve alors :

$$\lambda = 17/15 = 1{,}15$$

soit une vitesse du centre de gravité de 15 % supérieure à la vitesse débitante, ce qui n'est pas négligeable.

TROISIÈME CAS : *Cas des galets.* Dans le cas de déplacements de galets, nous détectons individuellement chaque entité marquée en position et en profondeur. Ce cas est fréquent en France surtout dans les expériences sur torrents.

Cette détection individuelle en profondeur permet d'obtenir expérimentalement C (z) et de calculer λ sur la base des résultats obtenus.

Nous prendrons pour exemple une expérience menée avec le Centre de géographie de Strasbourg, sur un torrent

* Communication personnelle.

vosgien, la Doller [2]. Les résultats des détections ont mis en évidence une répartition en profondeur d'allure parabolique avec des coefficients λ *expérimentaux* compris entre 1,08 et 1,28 (moyenne 1,18) donc compatibles avec la valeur de 1,15 précédente.

Ainsi donc, confondre V_m et V_G correspond, en sédimentologie radioactive, à surestimer la vitesse moyenne de 15 à 20 %, donc de la même valeur le débit de charriage. Certes, cela peut ne pas paraître prohibitif lorsqu'on connaît avec quelles précisions sont estimés ces charriages mais la présente étude serre le problème d'un peu plus près, et par de telles analyses nous risquons d'améliorer la précision.

D'autre part, nous attirerons l'attention sur la prudence avec laquelle le coefficient λ doit être utilisé. En effet, dans une expérience de traceurs en charriage de sédiments, les conditions de bon mélange sont d'une façon formelle, rarement satisfaites en milieu fluvial, jamais en milieu marin. D'autre part, la démonstration précédente tendant à montrer que la concentration dans une couche est proportionnelle à la vitesse de cette couche, est en elle-même insuffisante dans un milieu à la morphologie complexe (bancs, dunes, ridden, etc.) et nous en sommes très conscients.

Nous retiendrons cependant que dans ce genre d'expérience la vitesse du centre de gravité est supérieure à la vitesse de transport d'une quantité de l'ordre de 20 %.

4. — Système eulérien. Vitesse moyenne d'un ensemble de particules

Soit dans un écoulement uniforme, un lot de n particules marquées, représentatives d'un écoulement donné; chaque particule i à une vitesse v_i, déterminée expérimentalement par une distance parcourue l_i pendant un temps t_i :

$$v_i = \frac{l_i}{t_i}$$

Par définition, et quel que soit le système d'observation utilisé, la vitesse moyenne de ces particules est :

$$\bar{v} = \frac{1}{n}\sum_i v_i = \frac{1}{n}\sum \frac{l_i}{t_i}$$

— si nous sommes dans un système lagrangien, c'est que les positions successives de ces particules ont été observées entre deux moments donnés espacés de θ et :

$$t_1 = t_2 = \ldots = t_i = \theta$$

$$\bar{v} = \frac{1}{n\theta}\sum_i l_i = \frac{\bar{l}}{\theta}$$

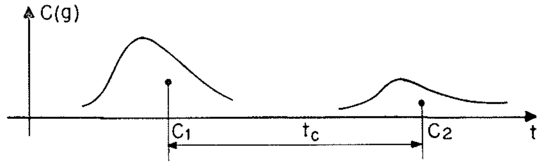
— mais si nous sommes dans un régime eulérien, c'est que le passage des particules a été observé entre deux sections distantes de l (ou entre une section de référence et le lieu d'observation) et :

$$\bar{v} = \frac{l}{n}\sum_i \frac{1}{t_i} = \left(\frac{\bar{1}}{t}\right)$$

Il s'agit précisément du cas rencontré dans les mesures de débit par la méthode du double pic. Dans cette méthode, on détermine la vitesse moyenne entre deux sections distantes de l par :

$$v_m = \frac{l}{t_c}$$

dans laquelle t_c représente l'intervalle de temps



entre des points caractéristiques des impulsions enregistrées qui se présentent sous la forme $C = f(t)$. Or l'un des problèmes souvent discutés dans cette méthode, est le choix des points C_1, C_2 représentatifs sur chaque impulsion.

On a proposé un certain nombre de points caractéristiques (centre de gravité, abscisse du point divisant la surface de l'impulsion en deux parties égales, etc.), tous choisis sur des bases pragmatiques.

D'une façon formelle, le centre de gravité ne saurait être un point représentatif, car cela reviendrait à écrire :

$$\bar{v} = l/\bar{t} \text{ différent } a\ priori \text{ de } \bar{v} = l\,\overline{(1/t)}$$

Nous tenions à souligner ici l'erreur communément admise qui consiste à considérer que :

$$\overline{(1/t)} \text{ est égal à } 1/\bar{t}$$

Si on fait l'hypothèse que les impulsions enregistrées sont réellement représentatives de la moyenne des vitesses existantes (ce qui est rarement le cas en traceurs radioactifs à cause des considérations de géométrie du détecteur), on peut dire qu'un seul point est représentatif, c'est celui qui satisfait à la relation :

$$1/t_c = \overline{(1/t)}$$

Cette considération élémentaire est fréquemment oubliée, dans l'exploitation des méthodes faisant intervenir des courbes de concentrations en fonction du temps.

Conclusions

Le présent article a mis en évidence un certain nombre de conclusions importantes que nous résumerons ainsi :

1° La condition de bon mélange apparaissant comme l'ensemble des conditions nécessaires et suffisantes pour que les mesures faites soient indépendantes des conditions initiales, dans les études de traceur en injection instantanée, la condition :

$$\int_0^T C\,dt = \mathrm{Cte}$$

apparaît comme une condition nécessaire et suffisante.

2° La vitesse du centre de gravité d'un nuage de traceur est généralement différente de la vitesse moyenne; il existe entre les deux un rapport λ tel que :

$$\lambda = \frac{1/S \int_S V^2 . dS}{(1/S \int_S V . dS)^2}$$

Le facteur λ égal à 1 dans la quasi-totalité des problèmes d'hydrologie, prend des valeurs voisines de 1,20 dans les problèmes d'études de charriage.

3° Dans l'examen des courbes de concentration d'un traceur en fonction du temps, il convient d'éviter l'erreur qui consiste, en calculant une vitesse moyenne, à utiliser $\bar{t}$ au lieu de $[1/(\overline{1/t})]$.

Ces conclusions, si elles ont l'avantage d'éclaircir quelques problèmes mal résolus dans la théorie de l'utilisation des traceurs, n'ont pas pour prétention de résoudre tous les problèmes que nous posons.

Dans la phase suivante, nous tenterons d'aborder les deux problèmes suivants :

a) Ayant à un instant donné, dans un système dont l'écoulement est limité par une section S, toutes les positions de chaque entitée marquée, quel critère peut-on appliquer pour déterminer si ce nuage satisfait aux conditions de bon mélange.

C'est en définitive poser la question de la formulation de la condition de bon mélange dans un système lagrangien.

b) Dans un système dont l'écoulement n'est ni limité dans les trois dimensions ni uniforme, mais où l'expansion peut toujours avoir lieu dans ces trois dimensions, un nuage de traceur ne peut jamais satisfaire aux conditions de bon mélange.

Quelles sont les conséquences de ce fait sur l'interprétation des résultats et comment d'un point de vue pratique et chiffré, pourrait-on tenir compte de ce manque aux conditions de bon mélange ?

Ceci revient à savoir sous quelle forme les conditions initiales peuvent être introduites dans la première relation de cet article.

Dès maintenant, nous soumettons ces deux problèmes à la sagacité des lecteurs.

Références

[1] COURTOIS (G.) et SAUZAY (G.). — Les méthodes de bilan des taux de comptage de traceurs radioactifs appliquées à la mesure des débits massiques de charriage. *La Houille Blanche*, n° 3, p. 279-289 (1966).

[2] COURTOIS (G.) et GASNIER (M.). — Etude de charriage de la Bruche et la Mossig au moyen de galets radioactifs. Rapport interne SAR n° 69-5, février 1969.