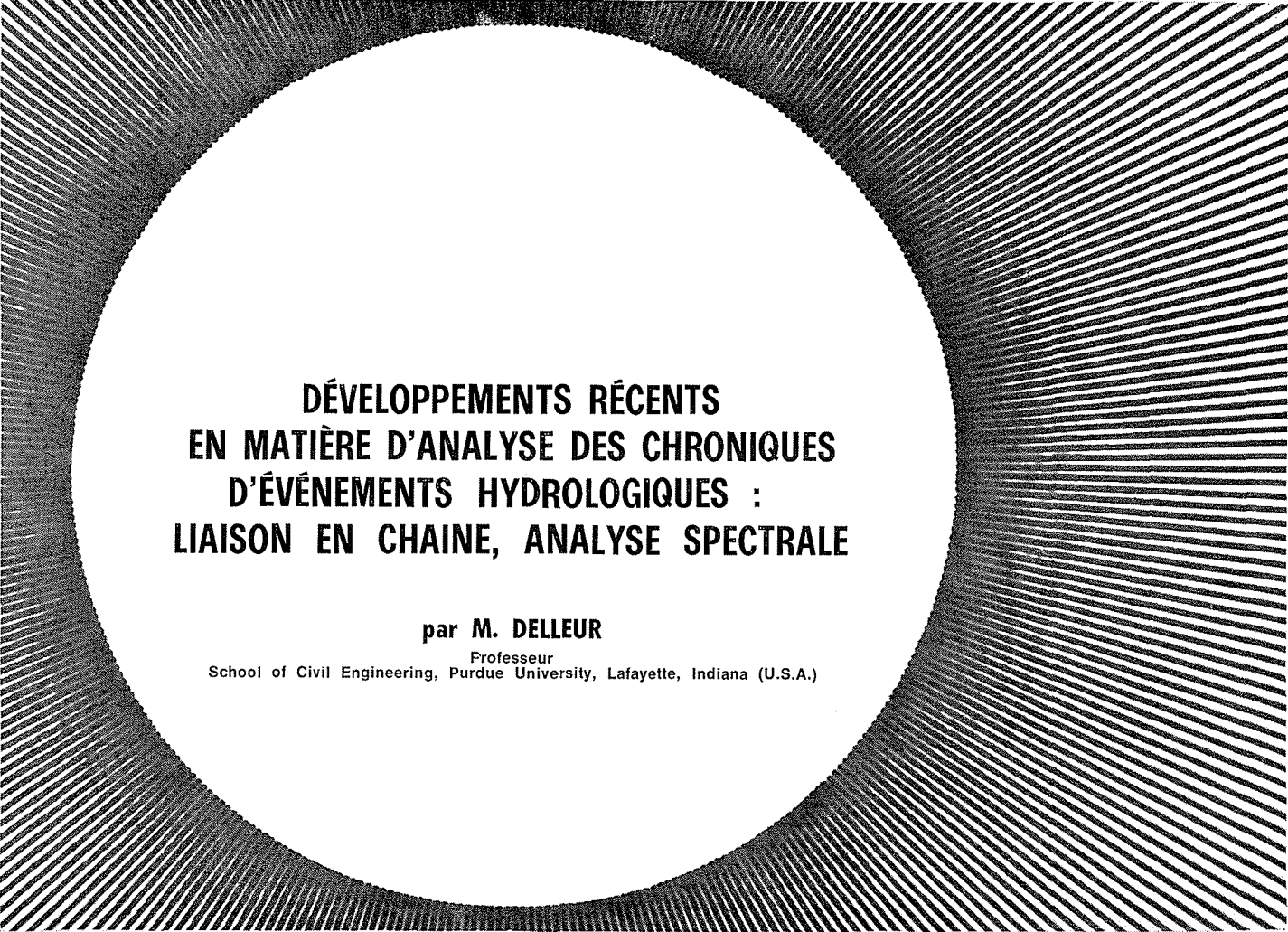




DÉVELOPPEMENTS RÉCENTS EN MATIÈRE D'ANALYSE DES CHRONIQUES D'ÉVÉNEMENTS HYDROLOGIQUES : LIAISON EN CHAÎNE, ANALYSE SPECTRALE

par M. DELLEUR

Professeur
School of Civil Engineering, Purdue University, Lafayette, Indiana (U.S.A.)

Introduction

On appelle chronique ou série chronologique, la séquence des observations ou des résultats expérimentaux arrangés d'une manière chronologique. Parmi les chroniques hydrologiques, l'on peut considérer les séries des écoulements moyens journaliers, mensuels ou annuels, les séries des écoulements maximum annuels instantanés, des pluies horaires, journalières, ou mensuelles, et des hydrogrammes. La dernière série est continue, tandis que les précédentes sont des séries chronologiques discrètes. On traite en général les chroniques discrètes soit parce que les données existent le plus souvent sous cette forme, soit parce qu'il est nécessaire de les discrétiser en vue de calculs numériques.

Lorsque l'on considère un phénomène hydrologique indépendamment du temps, c'est-à-dire, lorsque l'on ignore la chronologie des événements, on le traite en processus probabiliste. Les études des fréquences des crues, des sécheresses, des pluies, de la qualité des eaux, des hauteurs de houle, etc., sont des exemples d'analyses statistiques dans lesquelles on considère uniquement la distribution des probabilités des événements, sans égard aux temps auxquels les phénomènes ont été observés. Les techniques statistiques de ce genre ont été employées depuis longtemps dans l'étude des phénomènes hydrologiques.

Depuis les dix dernières années, on a étudié d'une manière plus approfondie la chronologie des événements hydrologiques. L'étude des séries chronologiques en hydro-

logie a pour but de déterminer la manière dont les événements se succèdent dans le temps. On désire donc formuler un modèle mathématique qui permet de simuler la séquence chronologique des événements.

Les processus de génération des chroniques hydrologiques forment le point de départ de l'analyse systématique des études de développement et de gestion des ressources en eau.

Les processus qui se développent dans le temps, suivant des lois de probabilité sont appelés processus stochastiques. D'une manière plus exacte, on définit un processus stochastique comme une collection de variables aléatoires $X(t) = (X_t, t \in T)$ qui est une fonction du temps. La théorie des processus stochastiques a été appliquée à de nombreuses branches de la science, telles que la physique statistique, la biologie, la théorie des systèmes, l'analyse des séries chronologiques, etc., et, plus récemment l'hydrologie. Parzen (1962) et Cox et Miller (1965) ont résumé les applications des processus stochastiques, tandis que Wold (1965) a fait une synthèse des études des séries chronologiques. Matalas (1966, 1967), Kisiel (1969) et Chow et Meredith (1969) ont récemment fait le point des connaissances des chroniques hydrologiques. Nous limiterons donc cet article à la présentation de quelques considérations élémentaires des processus de génération des chroniques et à l'étude plus approfondie de l'analyse spectrale comme outil pour choisir et caler les modèles stochastiques.

Nous donnerons ensuite l'application de cette méthode au calcul de modèles des pluies, des débits et des transferts pluies-débits dans le bassin de la Sioule.

Considérations générales sur les séries chronologiques

Les séries chronologiques sont classées en séries stationnaires et non stationnaires. Une série est dite stationnaire si la fonction de distribution conjointe des familles de variables aléatoires $(X_{t_1+\tau}, X_{t_2+\tau}, \dots, X_{t_n+\tau})$ et $X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}$ est la même pour tout τ et quelles que soient les valeurs de $t_1, t_2, \dots, t_n$. Pour l'étude des chroniques hydrologiques, on se limite en général à la stationnarité du deuxième ordre qui requiert que la covariance soit invariante à une translation dans le temps, c'est-à-dire :

$$E[X(t_1 + \tau)X(t_2 + \tau)] = E[X(t_1)X(t_2)] = g(t_1 - t_2)$$

pour tout τ , où E représente l'espérance mathématique.

Un processus stochastique peut être non stationnaire, par exemple si la moyenne ou la variance ou encore la moyenne et la variance de la loi de probabilité changent dans le temps. On peut imaginer intuitivement que la plupart des chroniques hydrologiques ne sont pas nécessairement stationnaires. On conçoit par exemple, que certaines influences de l'homme, telle que la construction de barrages, peuvent contribuer à la non-stationnarité de la série des débits. Néanmoins, pour simplifier l'analyse, on considère que les séries chronologiques sont approximativement stationnaires. Il est souvent possible de rendre une série chronologique approximativement stationnaire en éliminant les composantes déterministes qui peuvent exister. Une composante déterministe existe s'il y a une dépendance entre les valeurs de x_t et $x_{t+\tau}$. Les composantes déterministes se manifestent sous la forme d'une tendance, d'une périodicité, ou d'une persistance.

La tendance peut être éliminée au moyen d'un filtre digital qui élimine les basses fréquences. La méthode usuelle consiste à employer une moyenne mobile simple. Nous verrons par la suite que certaines moyennes mobiles, dont les coefficients sont des fonctions trigonométriques, ont des réponses en fréquences dont les caractéristiques sont supérieures à celles des moyennes mobiles simples.

Des oscillations périodiques peuvent exister dans les chroniques hydrologiques. On rencontre souvent des variations saisonnières, annuelles ou journalières dans les phénomènes qui gouvernent le cycle de l'eau. Chow (1964) donne trois tests statistiques qui peuvent être employés pour déterminer la présence d'oscillations périodiques. Ce sont les tests de Shuster, de Walker et de Fischer.

L'analyse spectrale donne aussi un outil très puissant pour reconnaître, non seulement la présence d'oscillations périodiques, mais aussi l'importance relative des différentes harmoniques. Ces phénomènes périodiques peuvent être représentés par une série de Fourier. Une telle analyse harmonique permet donc d'éliminer, par sous-traction, les effets périodiques.

La persistance se manifeste dans les chroniques, par une structure qui relie un certain nombre de données successives à long terme. Par exemple, les années pluvieuses ou les années sèches ont parfois tendance à se présenter en groupe. Ce phénomène a été étudié par Hurst et al. (1965). Hurst a montré que pour des chroniques très longues, telles que les débits du Nil, l'écart normalisé, R/S , de la série est proportionnel à une puissance k du nombre d'années, ou plus exactement $R/S = (N/2)^k$. Dans cette expression, R est obtenu en faisant les sommes continues des écarts entre les débits annuels et la moyenne. R est la différence entre le maximum et le minimum de ces sommes, et S^2 est la variance des écarts. Plus récemment, Mandel-

brot et Wallis (1969) ont montré que le rapport R/S fournit un test robuste dans la mesure de la persistance. Lorsque la valeur de k est en moyenne 0,5 pour différentes valeurs de N , il n'y a pas de dépendance statistique à long terme. Les valeurs de k pour certaines longues chroniques varient de 0,46 à 0,96, avec une moyenne de 0,726. Pour le Rhin (1807-1957), ils donnent $k = 0,61$.

Pour des chroniques relativement courtes, ces dépendances à long terme peuvent donner l'apparence de non-stationnarité lorsqu'il s'agit d'effets à très basses fréquences qui ne sont pas décelés complètement, vu la durée insuffisante de l'échantillon.

Modèles mathématiques des séries chronologiques

Les processus stochastiques stationnaires peuvent, en général, se décomposer en deux parties non corrélées : une composante déterministe et une composante aléatoire. Si la composante déterministe possède des caractéristiques saisonnières, le processus peut souvent s'exprimer par une expression telle que :

$$x_t = A \sin \omega t + B \cos \omega t + y_t \quad (1)$$

ou encore :

$$x_t = \sum_{i=1}^k A_i \cos(\omega_i t + \Phi_i) + y_t \quad (2)$$

où y_t est une variable aléatoire. Cette composante aléatoire a , en général, une structure bien définie, et qui peut être représentée par des processus linéaires, tels que les processus autorégressifs, les moyennes mobiles et les processus mixtes. Un processus autorégressif discret d'ordre m , peut être généré à partir d'un bruit blanc, ou un processus aléatoire pur, z_t , par :

$$y_t - \mu = \alpha_1 (y_{t-1} - \mu) + \alpha_2 (y_{t-2} - \mu) + \dots + \alpha_m (y_{t-m} - \mu) + z_t \quad (3)$$

où μ est la valeur moyenne. Les processus autorégressifs sont parfois appelés processus de Yule. Le processus de moyenne mobile est défini par :

$$y_t - \mu = \beta_0 z_t + \beta_1 z_{t-1} + \dots + \beta_l z_{t-l} \quad (4)$$

où z_t est un bruit blanc.

Le processus mixte autorégressif-moyenne mobile discret est défini par la relation :

$$(y_t - \mu) = \alpha_1 (y_{t-1} - \mu) + \dots + \alpha_m (y_{t-m} - \mu) + z_t + \beta_1 z_{t-1} + \dots + \beta_l z_{t-l} \quad (5)$$

où l et m sont indépendants. Le modèle mixte a souvent l'avantage de pouvoir représenter un processus stochastique avec moins de paramètres que le processus autorégressif simple, ou le processus de moyenne mobile simple. Comme on le verra plus loin, l'analyse spectrale offre un outil puissant pour l'identification du processus, et pour le calage des paramètres.

Les processus stochastiques décrits ci-dessus ont été employés dans la génération des données hydrologiques. Dans l'analyse systématique des développements des ressources en eau, les données historiques sont souvent d'une durée trop courte, d'où le besoin de générer des séquen-

ces plus longues par des méthodes statistiques et mathématiques. Les paramètres des modèles statistiques sont obtenus à partir des séries observées, de sorte que les séries chronologiques, générées mathématiquement ont les mêmes caractéristiques statistiques que les séries observées.

Thomas et Fiering (1962) ont généré des débits mensuels au moyen de la relation :

$$Q_{i+1} = \bar{Q}_{j+1} + b_j(Q_i - \bar{Q}_j) + \varepsilon_i \sigma_{j+1} (1 - r_j^2)^{1/2} \quad (6)$$

où Q_i est le débit pendant le $i^{\text{ème}}$ mois; $\bar{Q}_j$ est le débit moyen pendant le $j^{\text{ème}}$ mois dans un cycle répétitif de 12 mois; ε est une variante aléatoire normale dont la moyenne et la variance sont zéro et l'unité respectivement; σ_j est l'écart type des débits dans le $j^{\text{ème}}$ mois et r_j est le coefficient de corrélation entre les débits du $j^{\text{ème}}$ et du $j+1^{\text{ème}}$ mois.

L'inclusion du dernier terme a pour but la préservation de l'écart type de la série générée. Fiering et Harrington ont étendu l'application de la relation précédente au cas où les débits n'obéissent pas à la loi normale, mais au contraire suivent une loi lognormale. En employant les logarithmes naturels des débits on a :

$$Y_{i+1} = \mu_y + \rho_y (y_i - \mu_y) + \sigma_y \varepsilon_{i+1} (1 - \rho_y^2)^{1/2} \quad (7)$$

où Y_i est le logarithme naturel des débits pendant le mois i ; μ_y et ρ_y sont la moyenne et le coefficient de corrélation de pas un des logarithmes des débits et ε est une variée normale de moyenne zéro et variance unité. Thomas et Fiering (1962) ont étendu la méthode aux techniques bivariées de la forme :

$$Q_{y,i} = \bar{Q}_{y,j} + b_j(Q_{x,i} - \bar{Q}_{x,j}) + \varepsilon_i \sigma_{y,j} (1 - r_j^2)^{1/2} \quad (8)$$

où l'indice x indique la station indépendante; y la station dépendante; $Q_{y,i}$ est le débit généré à la station dépendante pendant le mois i , compté depuis le début de la séquence; $\bar{Q}_{y,j}$ et $\bar{Q}_{x,j}$ sont les débits moyens observés aux stations dépendante et indépendante, respectivement, pendant le mois j du cycle de 12 mois; b_j est le coefficient de régression des débits observés à la station dépendante par rapport aux débits observés à la station indépendante pendant le mois j ; $\sigma_{y,j}$ est l'écart type des débits observés à la station dépendante pendant le mois j ; ε_i est une variante aléatoire de moyenne zéro et variance unité et r_j est le coefficient de corrélation entre les débits des deux stations pendant le mois j .

Matalas (1963) a appliqué le modèle des moyennes mobiles pour obtenir les débits à partir des pluies antérieures :

$$Q_j = b_0 p_j + b_1 p_{j-1} + \dots + b_i p_{j-i} + \dots + b_m p_{j-m} \quad (9)$$

où Q_j est le débit pendant l'intervalle j et les p_{j-i} représentent les pluies efficaces aux intervalles $j-i$, ($i = 0, \dots, m$).

On peut aussi s'intéresser à la structure chronologique du processus fourni par la série des intervalles $X_1, X_2, \dots$ entre certains événements, par exemple les intervalles secs entre les pluies, ou les intervalles entre les débits qui dépassent un certain seuil. Lorsque les intervalles entre événements sont indépendants et obéissent à une même loi, on a un processus appelé de renouvellement. Le processus de Poisson est un cas particulier où les intervalles entre événements sont distribués indépendamment selon une loi exponentielle. La théorie des processus de renouvellement a été étudiée en particulier par Cox (1966) et,

son application aux phénomènes hydrologiques a été proposée par Bernier (1968). Les processus de renouvellement peuvent être aussi analysés en fonction du nombre d'événements dans un intervalle de temps fixe. Les deux descriptions des processus de renouvellement sont équivalentes, mais donnent lieu à des fonctions du deuxième ordre différentes. Si l'on applique l'analyse spectrale aux processus de renouvellement, il faudra donc traiter séparément l'analyse des intervalles, et celle des dénombrements. Certaines généralisations des processus de renouvellement ont un intérêt spécial en hydrologie. Par exemple, le processus alterné lorsque deux types d'intervalles se suivent d'une manière alternée. Ce processus s'applique à l'étude des séquences de périodes sèches et pluvieuses.

Analyse spectrale des séries chronologiques

L'analyse spectrale fournit un outil puissant pour déterminer les modèles mathématiques, pour simuler les séries chronologiques observées. Rappelons brièvement les définitions de base. Considérons un processus aléatoire stationnaire du deuxième ordre. La fonction d'autocovariance :

$$\gamma_{xx}(u) = E[x(t) - \mu][x(t+u) - \mu] \quad (10)$$

dépend uniquement de l'intervalle de temps u , appelé pas.

Le spectre de variance, $\Gamma_{xx}(f)$ est la transformée de Fourier de l'autocovariance :

$$\Gamma_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{xx}(u) e^{-i2\pi fu} du \quad (11)$$

où f est la fréquence. On a aussi la transformée inverse :

$$\gamma_{xx}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{xx}(f) e^{i2\pi fu} df \quad (12)$$

C'est-à-dire que le spectre et l'autocovariance sont les transformées de Fourier l'une de l'autre. Considérons en particulier le cas du pas zéro, on a alors :

$$\gamma_{xx}(0) = \sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{xx}(f) df \quad (13)$$

Ceci montre que la fonction spectrale $\Gamma_{xx}(f)$ décrit la manière dont la variance du processus $x(t)$ est distribuée dans le domaine des fréquences. La densité spectrale est obtenue en normalisant :

$$\frac{\Gamma_{xx}(f)}{\sigma^2(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{xx}(u) e^{-i2\pi fu} du \quad (14)$$

où :

$$\rho_{xx}(u) = \gamma_{xx}(u) / \gamma_{xx}(0)$$

est la fonction d'autocorrélation.

Le calcul numérique des estimateurs spectraux est très délicat. Nous référons le lecteur à l'ouvrage de Jenkins et Watts (1968) pour le détail des techniques de calcul.

En résumé, des estimateurs spectraux bruts, $\hat{\Gamma}(f)$, sont obtenus en approximant l'intégrale (11) par une somme discrète, tronquée à une valeur maximale M du pas u . Les estimateurs bruts ainsi obtenus doivent être lissés pour diminuer leurs écarts. Nous avons employé la moyenne appelée « hanning » par Blackman et Tukey (1958) d'après

le météorologue autrichien Julius von Hann. L'estimateur lissé, $\bar{\Gamma}(f)$, par cette moyenne est donné par :

$$\bar{\Gamma}(f) = \frac{1}{2} \hat{\Gamma}(f) + \frac{1}{4} [\hat{\Gamma}(f + \Delta f) + \hat{\Gamma}(f - \Delta f)]$$

Bendat et Piersol (1966) ont montré que ce lissage dans le domaine des fréquences est équivalent à multiplier l'estimateur de la covariance croisée par le poids aussi appelé « fenêtre de Tukey » :

$$w(u) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi u}{M} \right) \quad |u| \leq M \quad (15)$$

$$= 0 \quad |u| > M$$

L'estimateur spectral lissé est donc donné par la formule suivante pour $\Delta t = 1$:

$$\bar{\Gamma}_{xx}(f) = 2 \left[\hat{\gamma}_{xx}(0) + 2 \sum_{u=1}^{M-1} \hat{\gamma}_{xx}(u) w(u) \cos 2\pi f u \right] \quad (16)$$

$$0 \leq f \leq 1/2$$

Le spectre est particulièrement utile pour détecter certaines composantes déterministes. Une tendance linéaire se manifeste par une grande valeur du spectre à l'origine des fréquences. Les phénomènes périodiques se détectent par la présence d'un ou plusieurs pics importants aux fréquences de base, et à leurs harmoniques. C'est ainsi que le spectre des débits a souvent un pic à la fréquence annuelle, et a parfois aussi des pics aux fréquences correspondant à quatre et à six mois. Si ces pics sont statistiquement significatifs, on peut alors construire un modèle de la forme donnée par l'équation (2). Le résidu aléatoire y_t peut à son tour obéir à un processus markovien ou mixte.

La forme du spectre de la composante aléatoire permet aussi de déterminer la structure du processus stochastique. Le processus de Markov du premier ordre :

$$y_t - \mu = \rho_1 (y_{t-1} - \mu) + z_t \quad (17)$$

a pour fonction spectrale :

$$\Gamma_{yy}(f) = \frac{\Delta t \sigma_z^2}{(1 + \rho_1^2 - 2\rho_1 \cos 2\pi f \Delta t)} \quad -\frac{1}{2\Delta t} \leq f < \frac{1}{2\Delta t} \quad (18)$$

où ρ_1 est le coefficient d'autocorrélation de pas un et σ_z est l'écart type du bruit blanc. Ce spectre décroît de manière monotone, suivant une courbe concave, de $f=0$ à $f=1/2$, pour ρ_1 positif, tandis qu'il croît de $f=0$ à $f=1/2\Delta t$ pour ρ_1 négatif.

Le processus de Markov du deuxième ordre :

$$y_t - \mu = a_1 (y_{t-1} - \mu) + a_2 (y_{t-2} - \mu) + z_t \quad (19)$$

a pour fonction spectrale :

$$\Gamma_{yy}(f) = \frac{\Delta t \sigma_z^2}{\left[\begin{array}{l} 1 + a_1^2 + a_2^2 - 2a_1(1 - a_2) \cos 2\pi f \Delta t \\ - 2a_2 \cos 4\pi f \Delta t \end{array} \right]} \quad -\frac{1}{2\Delta t} \leq f < \frac{1}{2\Delta t} \quad (20)$$

Ce spectre a un pic bien défini soit aux basses fréquences, soit aux hautes fréquences suivant le signe de a_1 . Le processus mixte (5) a pour fonction spectrale :

$$\Gamma_{xx}(f) = \Delta t \sigma_z^2 \left| \frac{1 + \beta_1 e^{-i2\pi f \Delta t} + \dots + \beta_l e^{-i2\pi f l \Delta t}}{1 - \alpha_1 e^{-i2\pi f \Delta t} + \dots + \alpha_m e^{-i2\pi f m \Delta t}} \right| \quad (21)$$

On peut ainsi se former un catalogue des fonctions spectrales qui sert à identifier la classe de processus qui peut se rapprocher le mieux d'un spectre actuel. Il reste ensuite l'évaluation des paramètres qui peut se faire, par exemple, par la méthode des moindres carrés.

Il est souvent utile de filtrer une certaine bande de fréquence, par exemple, les basses fréquences pour éliminer les tendances. Un filtre digital est un processus linéaire tel que les entrées x_t sont transformées en sorties y_t par une relation linéaire telle que la moyenne mobile :

$$y_t = \sum_{i=-m}^{\infty} h_i x_{t-i} \quad (22)$$

Les caractéristiques des filtres sont données par la fonction de transfert dans le domaine des fréquences et par le déphasage. Les filtres sont dits symétriques, lorsque $h_i = h_{-i}$, dû à leur symétrie, leur déphasage est nul et leur fonction de transfert est donnée par :

$$H(f) = h_0 + 2 \sum_{l=1}^{\infty} h_l \cos 2\pi f l \Delta t \quad -\frac{1}{2\Delta t} \leq f \leq \frac{1}{2\Delta t} \quad (23)$$

Nous avons modifié un filtre passe haut proposé par Alavi et Jenkins (1965) pour obtenir le filtre passe bas suivant :

$$y_t = \sum_{i=-m}^m (-1)^i \lambda_i x_{t+i} \quad (24)$$

où :

$$\lambda_0 = 1 - \frac{1}{m+1}$$

et :

$$\lambda_i = \lambda_{-i} = \frac{-1}{m+1} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{i\pi}{m+1} \right) \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (25)$$

Pour les basses fréquences, le gain de ce filtre est l'unité et atteint zéro à la fréquence de Nyquist, $f_c = 1/2\Delta t$. La raideur de la pente du filtre augmente et la fréquence de coupure approche la fréquence de Nyquist, lorsque la valeur de m croît.

Les poids λ_i du filtre sont des fonctions trigonométriques qui ont la même forme que la « fenêtre de Tukey » employée dans le lissage des estimateurs spectraux (15).

Lorsque l'on a deux séries chronologiques, telles que celles des pluies et des débits, on peut en faire l'analyse spectrale croisée ou bivariate. A cet effet on considère la covariance croisée $\gamma_{12}(u)$ des deux processus stationnaires $x_1(t)$ et $x_2(t)$:

$$\gamma_{12}(u) = E \{ [x_1(t) - \mu_1] [x_2(t) - \mu_2] \} \quad (26)$$

et la fonction de corrélation croisée $\rho_{12}(u)$, donnée par :

$$\rho_{12}(u) = \frac{\gamma_{12}(u)}{\sqrt{\gamma_{11}(0) \gamma_{22}(0)}} = \frac{\gamma_{12}(u)}{\sigma_1 \sigma_2} \quad (27)$$

Le spectre croisé $\Gamma_{12}(f)$ et la covariance croisée sont les transformées de Fourier l'un de l'autre :

$$\Gamma_{12}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{12}(f) e^{-i2\pi f u} du \quad (28)$$

$$\text{et : } \gamma_{12}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{12}(f) e^{i2\pi fu} df \quad (29)$$

Comme la covariance croisée n'est en général pas une fonction paire du pas u , et que l'on a :

$$\gamma_{12}(u) = \gamma_{21}(-u)$$

sa transformée de Fourier est en général une fonction complexe. On peut donc la décomposer en sa partie réelle et sa partie imaginaire :

$$\Gamma_{12}(f) = \Lambda_{12}(f) - i\psi_{12}(f) = \alpha_{12}(f) e^{i\Phi_{12}(f)} \quad (30)$$

où $\Lambda_{12}(f)$ est le cospectre, $\psi_{12}(f)$ est le spectre de quadrature, $\alpha_{12}(f)$ est le spectre d'amplitude croisée, $\Phi(f)$ est le spectre de phase. Le cospectre est une mesure de la distribution dans le domaine des fréquences de la covariance, entre les composantes de $x_1(t)$ et de $x_2(t)$ qui sont en phase. La corrélation entre les deux variables aléatoires à chaque fréquence est donnée par la cohérence $k_{12}(f)$, et :

$$k_{12}^2(f) = \frac{\alpha_{12}^2(f)}{\Gamma_{11}(f) \Gamma_{22}(f)} \quad (31)$$

L'évaluation des estimateurs des spectres croisés est un calcul délicat. Comme dans le cas du spectre univariate, l'approximation de l'intégrale 28 par une somme finie donne un estimateur brut du spectre croisé qui a en général trop de dispersion. On procède ensuite au lissage de cet estimateur. Pour les détails du calcul numérique, nous référons le lecteur à l'ouvrage de Jenkins et Watts (1968).

Parmi les applications de l'analyse spectrale croisée, d'intérêt en hydrologie, signalons la régression linéaire simple entre séries chronologiques, et la régression avec pas. La régression simple est de la forme :

$$y_t = \alpha + \beta x_t + c_t \quad (32 a)$$

où β est indépendant de la fréquence, si ce modèle est valable. Les formules et programmes de calcul pour l'évaluation de α et β ont été donnés par Clarke (1968).

L'estimateur de β est :

$$b(k) = \bar{\Lambda}_{12}(k) / \bar{\Gamma}_{11}(k) \quad (32 b)$$

où la barre supérieure indique un estimateur lissé, et les $b(k)$ sont pondérés de manière à donner plus d'importance relative aux fréquences où la cohérence est près de l'unité, et un poids moindre pour les fréquences ayant une petite valeur de la cohérence.

L'analyse spectrale bivariate est utile aussi pour identifier les caractéristiques dynamiques qui relient deux séries chronologiques. Supposons que les $x(t)$ soient les entrées, et les $y(t)$ les sorties d'un système linéaire dont la réponse percussionnelle est $h(t)$. Le modèle stochastique dynamique continu est donc :

$$y(t) - \bar{y} = \int_0^\infty h(t-u) [x(t-u) - \bar{x}] du + z(t) \quad (33)$$

où $z(t)$ est un bruit résiduel. La fonction de transfert du système $H(f)$, qui n'est autre que la transformée de Fourier de $h(t)$, peut s'exprimer en fonction du gain, $G(f)$, et de la phase, $\Phi(f)$ par :

$$H(f) = G(f) e^{i\Phi(f)} \quad (34)$$

et l'on peut montrer que :

$$\bar{G}(f) = \frac{\bar{\alpha}_{12}(f)}{\bar{\Gamma}_{11}(f)}$$

et :

$$\bar{\Phi}(f) = \arctan - \frac{\bar{\psi}_{12}(f)}{\bar{\Lambda}_{12}(f)} \quad (35)$$

Le bruit résiduel a un spectre qui est donné par :

$$\bar{\Gamma}_{zz}(f) = \bar{\Gamma}_{22}(f) [1 - K_{12}^2(f)] \quad (36)$$

Il est souvent avantageux de considérer un système linéaire discret. Les entrées x_t et les sorties y_t sont alors reliées par :

$$y_t = \sum_{k=0}^{\infty} h_k x_{t-k} \quad (37)$$

où les réponses percussionnelles impulsives, h_k , sont données par :

$$h_k = \int_0^{0.5} G(f) \cos[\Phi(f) + 2\pi k f] df \quad (38)$$

pour $\Delta t = 1$. En pratique les valeurs de h_k décroissent lorsque k croît, et l'on peut tronquer la somme (37).

Le modèle du système linéaire discret est semblable à celui de la régression avec pas. Dans ce dernier, la somme se fait de $-r_1$ à r_2 .

$$y_t = \sum_{-r_1}^{r_2} \beta_j x_{t-j} + e_t \quad (39)$$

où la valeur de y_t dépend des valeurs x_t passées et futures, par rapport à l'instant t , et la question de réalisabilité physique ne se pose pas.

Application aux débits et pluies de la Sioule

La Sioule est un affluent de l'Allier dont le bassin versant à Pont-du-Bouchet a une superficie de 1 130 km². La station de jaugeage de Pont-du-Bouchet a une altitude de 476 m. Les valeurs de pluies employées dans ces calculs sont celles mesurées soit à Pontaumur, soit à Gelles; ces deux stations pluviométriques sont près l'une de l'autre, et approximativement au centre du bassin. On dispose de quarante-six ans d'observations à Pont-du-Bouchet et à Pontaumur. On a employé les mesures de Pont-du-Bouchet pour l'analyse des débits mensuels, journaliers et à intervalle de deux heures. Pour les pluies mensuelles et journalières, on a employé les données de Pontaumur, et celles de Gelles pour les pluies de deux heures en deux heures.

Les pluies sont données en millimètres d'eau accumulés pendant l'unité de temps considérée. Les valeurs des débits correspondent au débit moyen en m³/s pendant l'unité de temps considérée. Trois intervalles ou unités de temps ont été considérés :

1. le mois;
2. le jour;
3. deux heures.

Quatre traitements des données ont été employés :

1. données naturelles;
2. données transformées;
3. données naturelles normalisées;
4. données transformées normalisées.

Dans le cas des données naturelles on analyse directement les pluies en mm et les débits en m³/s. Il est parfois avantageux de transformer les données de manière à diminuer leurs dispersions. Les transformations employées ici sont :

1. la racine carrée des pluies;
2. le logarithme des débits.

On sait que les distributions des pluies et des débits sont asymétriques, et que les transformations ci-dessus donnent des variables dont les distributions s'approchent de la distribution de Gauss.

Il est parfois utile de normaliser les données par la relation $(x - \bar{x})/\sigma_x$ où $\bar{x}$ et σ_x sont la moyenne et l'écart type des données.

Pour les données mensuelles, journalières et de deux heures en deux heures on a calculé :

1. le spectre des pluies;
2. le spectre des débits;
3. le cospectre des pluies et débits;
4. le spectre de quadrature des pluies et débits;
5. la cohérence;
6. le gain;
7. la phase;
8. le spectre du bruit résiduel;
9. l'estimateur de régression linéaire $b(k)$;
10. l'équation de régression linéaire entre pluies et débits;
11. la variance du coefficient de régression.

Nous présenterons ici un sommaire des résultats les plus saillants. Pour le détail des calculs, voir les rapports par Delleur (1969).

Données mensuelles.

Quel que soit le traitement des données, le spectre des pluies mensuelles présenté en échelle arithmétique présente une forme concave vers le haut, avec la valeur maximale à l'origine. Ceci indique que la présence des pluies mensuelles peut se simuler raisonnablement par un processus autorégressif du premier ordre. La figure 1 donne le spectre des pluies mensuelles en données naturelles. Les lignes extérieures sont les limites de l'intervalle de confiance pour une probabilité de 95 %. Le spectre des données non normalisées a un petit pic à la fréquence annuelle, mais il n'est pas statistiquement significatif, car son amplitude est du même ordre de grandeur que la dispersion des estimateurs spectraux aux fréquences avoisinantes. La série des pluies mensuelles est essentiellement stationnaire, car les spectres des données naturelles et des données normalisées ont le même aspect général sans pic significatif. Ceci n'exclut pas une certaine persistance. Celle-ci peut se démontrer en présentant le logarithme du spectre normé en fonction du logarithme des fréquences. Le spectre s'approche convenablement d'une droite ayant une pente $-2k = -1/3$. Les spectres de la forme $\Gamma(f) = f^{-2k}$ sont caractéristiques des bruits gaussiens fractionnaires. Dans la notation de Mandelbrot et Wallis (1969) on a $k = H - 0,5$ ou $H = 2/3$. Lorsque $H = 0,5$ on a un bruit blanc, et lorsque $0,5 < H < 1$, comme c'est le cas ici, le spectre est très rouge, c'est-à-

dire que l'effet des basses fréquences est considérable. En employant l'approximation du « type 2 » de Mandelbrot on pourrait représenter le processus des pluies par une moyenne mobile :

$$F_2(t/H, M) = (H - 0,5) \sum_{u=t-M}^{t-1} (t-u)^{H-1,5} G(u) \quad (40)$$

où $G(u)$ est une série de variables aléatoires gaussiennes de moyenne nulle, et de variance unité. Le paramètre M , appelé mémoire du processus, est au plus égal au nombre des données.

La figure 2 montre le spectre des pluies mensuelles, en données transformées normalisées. On observe l'absence de pic à la fréquence annuelle, mais l'apparition d'un pic à la fréquence de 0,12 cpm soit environ 1,5 cpa pour lequel nous n'avons pas d'explication. La figure 2 montre aussi le spectre d'un processus autorégressif du premier ordre pour des valeurs de $\rho = 0,114$ et $\text{var } e_t = 0,988$. Le processus représente assez bien le phénomène des pluies sauf aux très basses fréquences, possiblement dû à la persistance décelée par les bruits gaussiens fractionnaires.

Les spectres des débits en données naturelles (fig. 3) et en données transformées, sont caractérisés par un pic très important à la fréquence annuelle (0,083 cycles par mois). Lorsque le spectre est présenté en échelle arithmétique, on observe que ce pic à la fréquence annuelle est superposé à une courbe concave vers le haut qui décroît lorsque la fréquence croît. La petite oscillation à la fréquence de 0,167 cpm = 2 cpa n'est pas significative.

Le spectre permet donc de déceler la composante déterministe correspondant au pic annuel, et la composante aléatoire correspondant à un processus autogressif du premier ordre. Ce modèle s'écrit :

$$y_t = \bar{y} + R \cos\left(\frac{2\pi t}{12} + \Phi\right) + \xi_t \quad (41)$$

et :

$$\xi_t = \rho \xi_{t-1} + e_t \quad (42)$$

où :

$$R = (A^2 + B^2)^{1/2}$$

et :

$$\Phi = \arctan -B/A \quad (43)$$

où :

$$A = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^N y_r \cos \frac{2\pi r}{N}$$

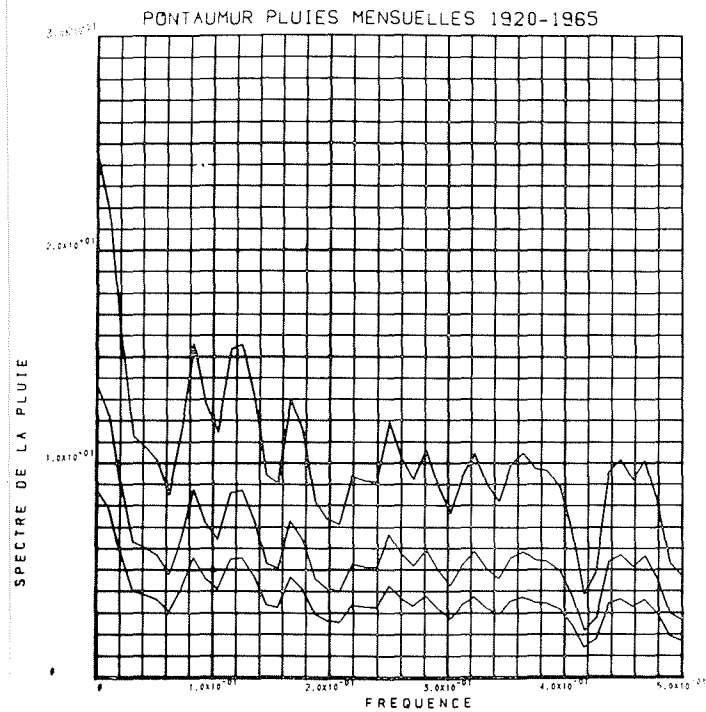
et :

$$B = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^N y_r \sin \frac{2\pi r}{N} \quad (44)$$

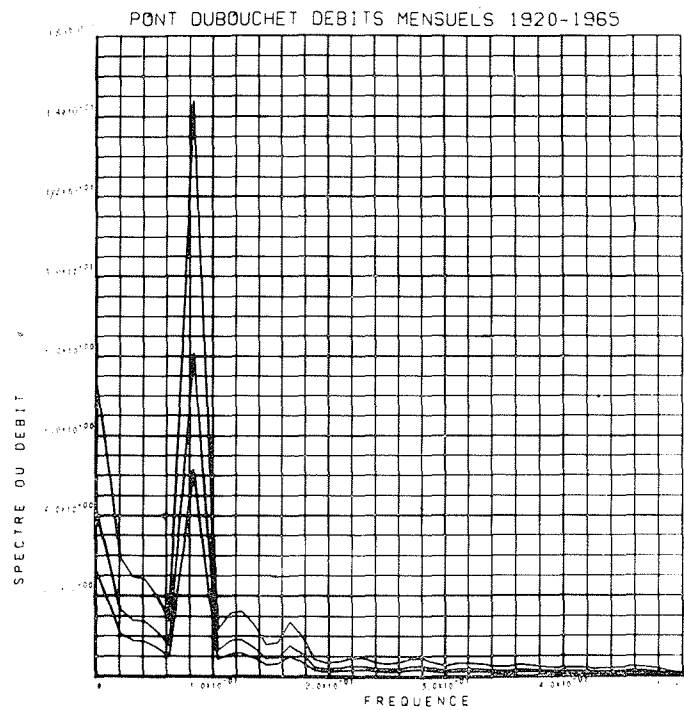
où les y_r sont les données observées centrées.

Il est intéressant d'observer que le spectre des pluies n'a pas de composante annuelle correspondant à celle des débits. Les pluies, on le sait, sont assez uniformes dans cette région. Il est donc vraisemblable que le cycle observé dans les débits soit dû à un cycle annuel des évaporations et évapotranspirations qui à son tour est dû au cycle saisonnier des températures.

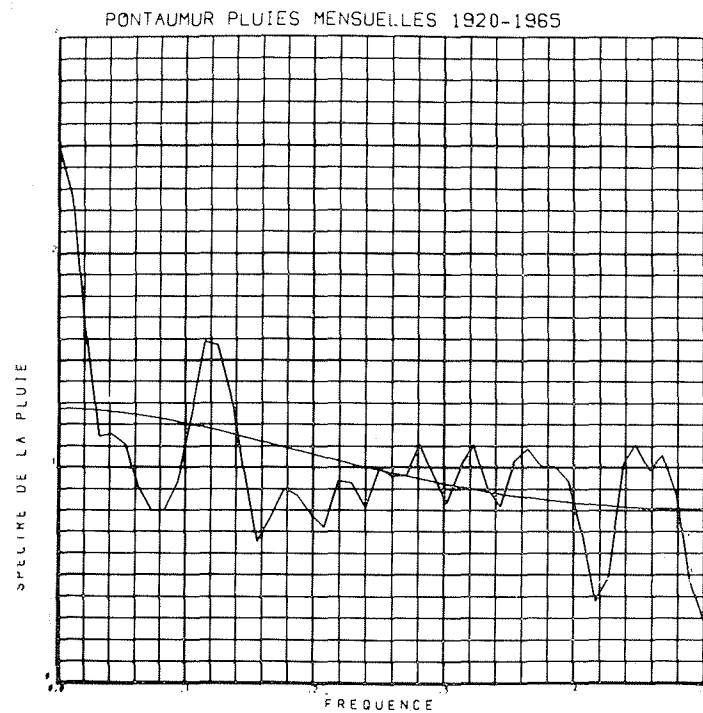
Si l'on étudie le spectre des débits, mais cette fois calculé à partir de données normalisées, (naturelles ou transformées), on observe qu'il se caractérise par l'absence de pic à la fréquence annuelle. Notons ici que la normalisation se fait de mois en mois, c'est-à-dire que pour les données de janvier, on soustrait la moyenne des données de tous les mois de janvier, et l'on divise par l'écart type des données de janvier. On observe donc que la normalisation des données a pour effet d'améliorer leur stationnarité. La figure 4 montre le spectre des données transformées



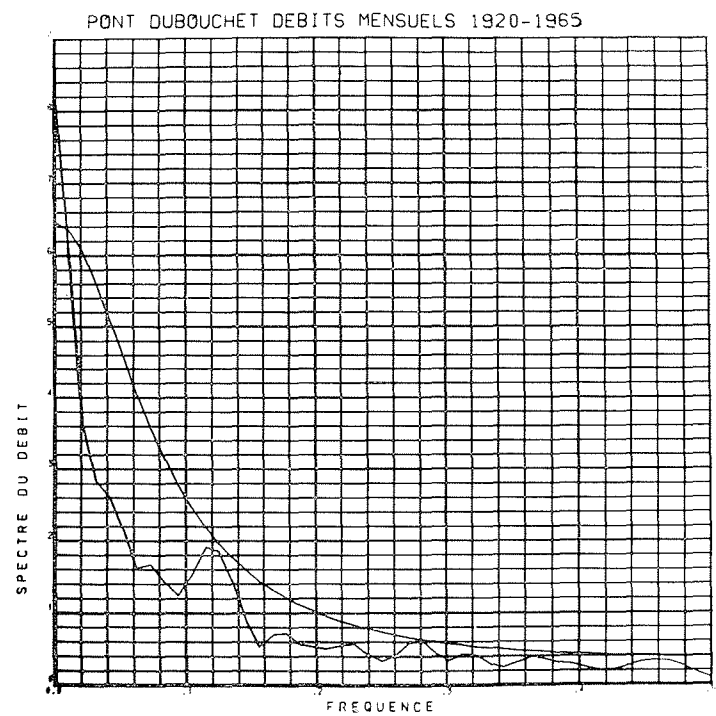
1/ Spectre des pluies mensuelles, données naturelles.



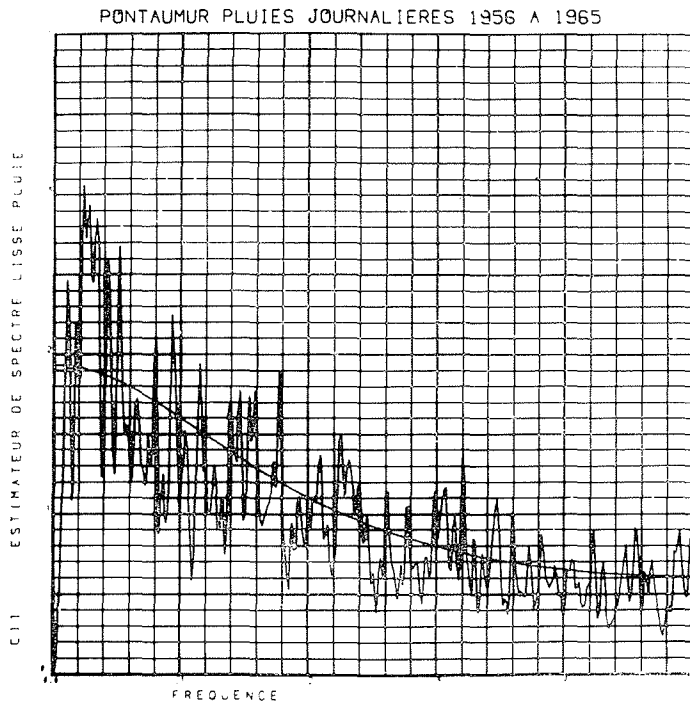
3/ Spectre des débits mensuels, données naturelles.



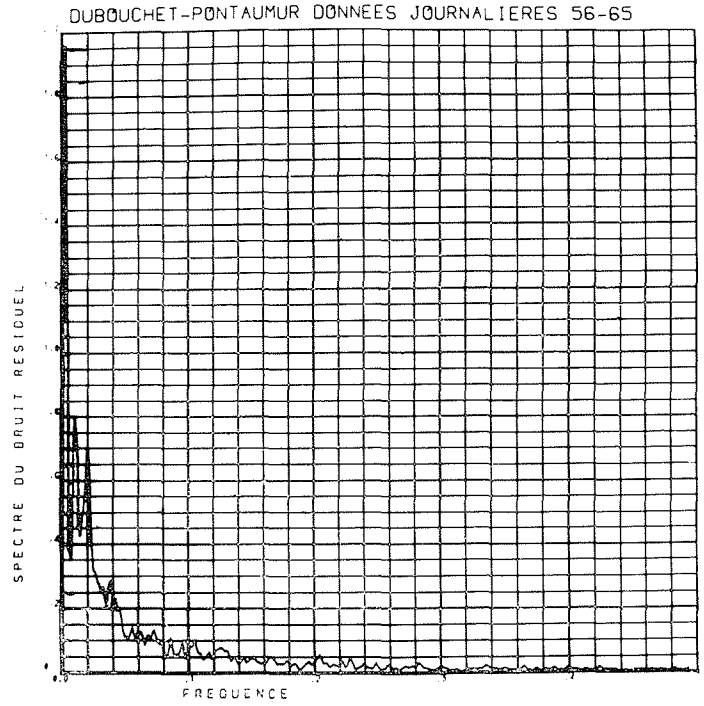
2/ Spectre calculé et théorique des pluies mensuelles, données transformées normalisées.



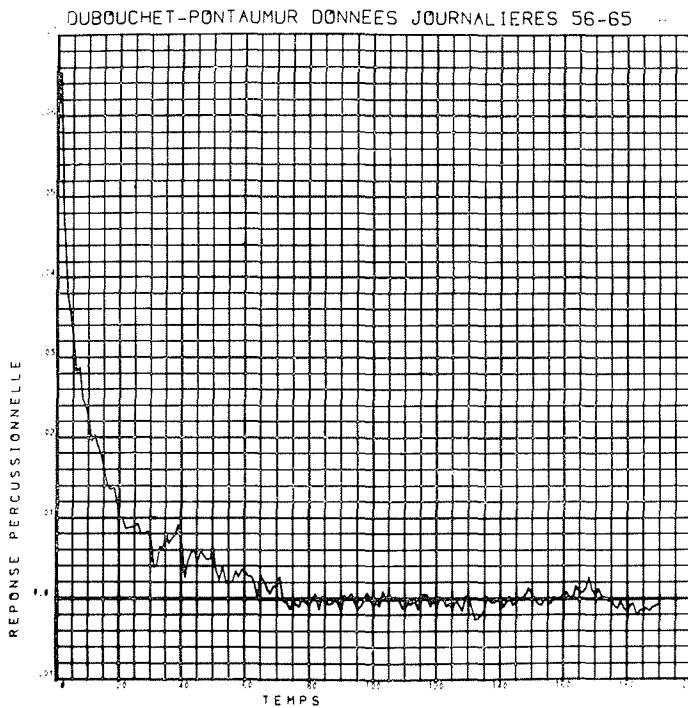
4/ Spectre calculé et théorique des débits mensuels, données transformées et normalisées.



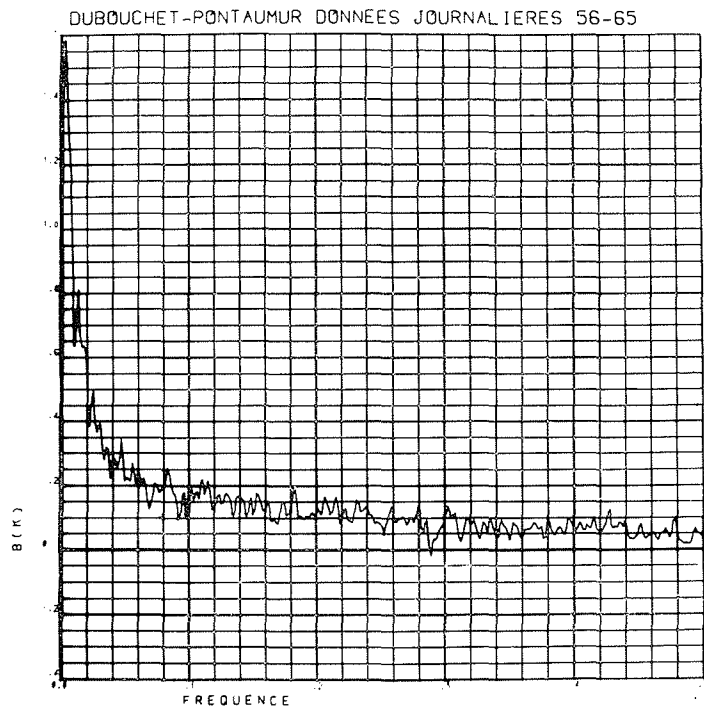
5/ Spectre calculé et théorique des pluies journalières, données transformées.



7/ Bruit résiduel du système linéaire de transfert pluies-débits journaliers transformés.



6/ Réponse percussive du système linéaire de transfert pluies-débits journaliers transformés.



8/ Estimateur $b(k)$ de la régression linéaire entre les pluies et les débits journaliers transformés.

normalisées, sur laquelle on a superposé le spectre d'un processus autorégressif du premier ordre.

$$y_t = \rho y_{t-1} + e_t \quad (45)$$

$$\rho = \frac{\hat{\gamma}_{yy}(1)}{\hat{\gamma}_{yy}(0)} = 0,607$$

et :

$$\text{var } e_t = 0,633$$

Le transfert pluies-débits à l'échelle mensuelle a été étudié au moyen de l'analyse spectrale croisée. La cohérence entre les pluies et les débits mensuels transformés normalisés décroît lorsque la fréquence croît, mais est en moyenne supérieure à 0,5 pour les fréquences inférieures à 4 cpm, ce qui correspond à un coefficient de corrélation d'environ 0,7. Comme l'intervalle de temps d'un mois est assez grand, on a considéré le transfert pluie-débit, comme un système linéaire discret.

$$y_r = \sum_{k=0}^n h_k x_{r-k} \quad (46)$$

et on a choisi n tel que $h_n/h_1 \leq 0,01$. L'emploi de la relation (38) donne :

$$y_r = 0,2 x_r + 0,09 x_{r-1} + 0,05 x_{r-2} + 0,02 x_{r-3} + 0,02 x_{r-4} + e_t \quad (47)$$

et la variance du résidu est 0,706. Les débits sont donc représentés par une somme pondérée des pluies antécédentes.

Données journalières.

Pour l'étude des données journalières, on a choisi 3 653 données, soient dix ans de 1956 à 1965. Ces données furent filtrées par un filtre digital passe haut qui atténua les fréquences au-dessous de 0,01 cpj = 0,3 cpm = 3,65 cpa. Le cycle annuel et ses trois premières harmoniques étant filtrés, la série résultante est essentiellement stationnaire. Le spectre des pluies journalières transformées est assez bruité mais néanmoins son comportement moyen peut être assez bien représenté par le processus autorégressif du premier ordre (fig. 5) :

$$x_t = 0,281 x_{t-1} + e_t \quad (48)$$

et la variance du résidu est 1,47.

D'une manière semblable, le processus débits transformés peut être approché par :

$$y_t = 0,88 y_{t-1} + e_t \quad (49)$$

et la variance du résidu est 0,064.

Le transfert pluies-débit à l'échelle journalière a été étudié au moyen de l'analyse spectrale croisée. On a considéré cette fois un système linéaire continu donné par :

$$y(t) - \bar{y} = \int_{-\infty}^{\infty} h(u) [x(t-u) - \bar{x}] du + z(t) \quad (50)$$

La fonction de transfert, $H(f)$, dans le domaine des fréquences est donnée par l'équation (34), et sa transformée de Fourier inverse donne la réponse percussionnelle $h(u)$. La figure 6 montre que la réponse percussionnelle décroît rapidement. La figure 7 montre le spectre du bruit résiduel $Z(t)$ calculée par la relation (36). On remarque qu'au-delà de la fréquence 0,05 cpm, l'amplitude du spectre du bruit résiduel est négligeable. Il serait possible d'approximer la

courbe $h(u)$ par une fonction exponentielle de la forme $h(t) = (1/K) e^{-t/K}$, où K est la constante de temps du système. Ceci correspond à l'équation différentielle :

$$P - Q = K \frac{dQ}{dt} \quad (51)$$

qui représente la relation du réservoir linéaire simple.

On pourrait donc simuler les débits en imposant au système décrit par cette équation, des pluies représentées par un processus aléatoire, tel que celui représenté par l'équation (48). On peut aussi identifier un système linéaire à partir de ses courbes de gain et de phase. Si le gain est représenté en décibels, en fonction du logarithme de la phase, on obtient un diagramme de Bode. Nous avons comparé les courbes ainsi obtenues à celles données par Pelissier. On a trouvé que la courbe de gain correspond presque exactement à la fonction de transfert :

$$H(i\omega) = \frac{1 + \sqrt{\alpha} i \omega / \omega_0}{1 + (1/\sqrt{\alpha}) i \omega / \omega_0}$$

avec $\alpha = 1/18$ et $\omega_0 = 0,10$ cps

où $T = 1/\omega_0 = 10$ jours.

Il est possible de relier les pluies et les débits journaliers par une régression linéaire simple :

$$y_t = \alpha + \beta x_t + e_t \quad (52)$$

L'estimateur $b(k)$ de β obtenu par (32 b) varie peu pour les fréquences au-delà de 0,05 cpj. Les valeurs de α et β furent calculées par l'ensemble des fréquences de 0,01 à 0,5 cpj :

$$y_t = 0 + 0,09 x_t + e_t$$

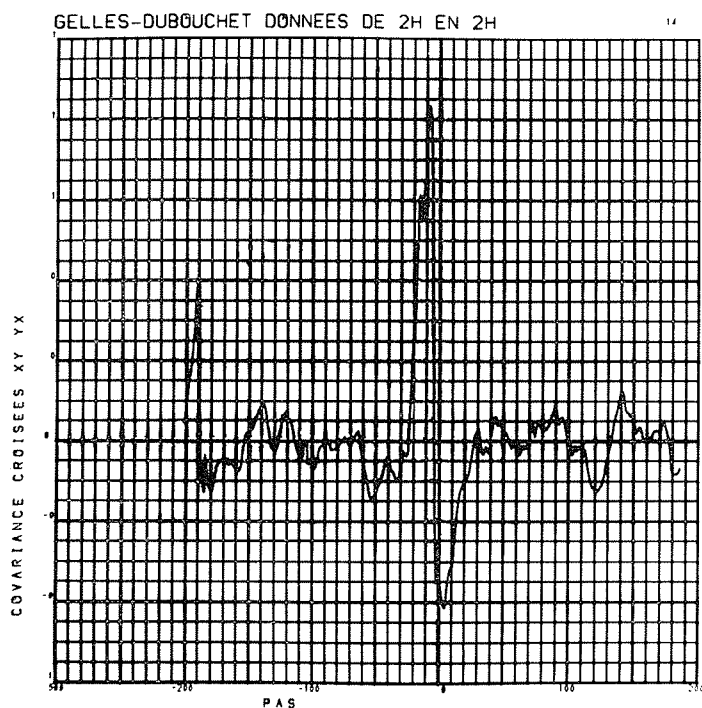
La figure 8 donne la distribution de l'estimateur $b(k)$ en fonction de la fréquence. On voit donc qu'il y a plusieurs modèles linéaires possibles pour relier les débits aux pluies journalières. Le choix dépendra de la précision désirée.

Données à intervalle de 2 heures.

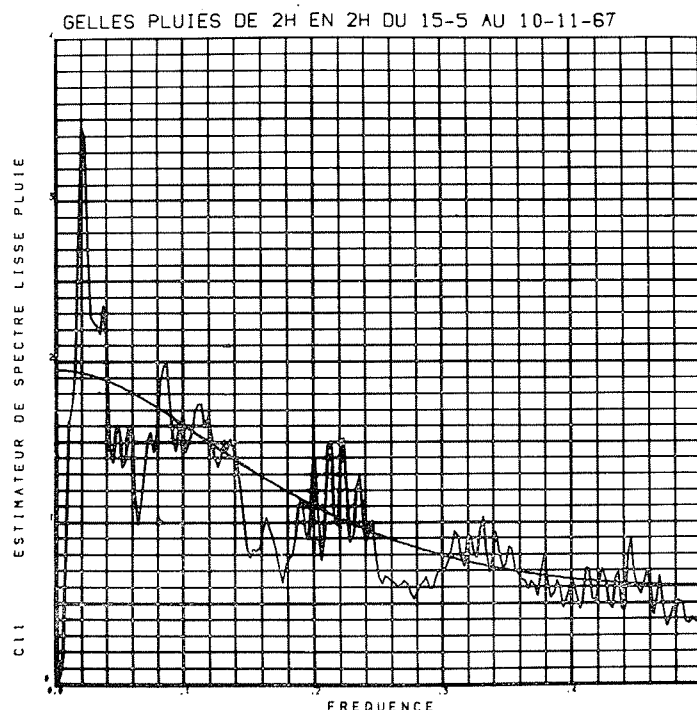
Les données choisies couvrent la période du 15 juin au 10 novembre 1967 correspondant à 2 160 intervalles. Cette période n'inclut pas de neige, toutes les précipitations sont sous forme de pluie. Les pluies observées à la station de Gelles furent utilisées vu la difficulté de lire le pluviographe de Pontaurmur à un intervalle aussi fin. Etant donné la proximité des deux stations, on peut considérer que les données de Gelles sont aussi bien représentatives des précipitations sur le bassin de la Sioule que celles de Pontaurmur. Il est intéressant de noter que les covariances croisées entre pluies et débits n'étaient pas centrées, mais que le maximum était au pas - 9 (fig. 9) pour les données naturelles, et au pas - 17 pour les données transformées. Avant de calculer les spectres, on a aligné les covariances croisées en les translatant de - 8 unités pour les données naturelles et - 16 unités pour les unités transformées (*). On remarque que le décalage de 8 unités de temps équivaut à 16 heures, ce qui est de l'ordre de grandeur du décalage entre les pluies et les débits. Nous avons observé que la transformation logarithmique des débits, et la racine carrée des pluies perd graduellement son effet normalisateur au fur et à mesure que l'unité de temps décroît. Nous avons donc choisi d'étudier les résultats des données naturelles.

La figure 10 montre le spectre des pluies en échelle arithmétique. La décroissance du spectre aux fréquences inférieures à 0,02 cp2h est due au filtrage des basses fréquences.

(*) Pour plus de détails concernant l'alignement de la covariance avant le calcul des spectres croisés voir Jenkins et Watts (1968).



9/ Covariances croisées, pluies et débits à 2 h d'intervalle, données naturelles.



10/ Spectre calculé et théorique des pluies de 2 h en 2 h, données naturelles.

La série des pluies peut se représenter par un processus autorégressif du premier ordre :

$$x_t = 0,284 x_{t-1} + e_t; \quad \text{var}(e_t) = 1,35$$

On observe que les structures autorégressives des processus des pluies horaires et journalières sont très semblables.

Nous avons obtenu la réponse percussionnelle d'un système linéaire continu reliant les pluies et les débits, ainsi que le spectre du bruit résiduel. Mais les valeurs du spectre résiduel ne sont pas négligeables par rapport à celles des pluies. A une échelle aussi fine, il semblerait que les processus de renouvellement ont l'avantage de représenter convenablement les séquences des intervalles secs et humides et, que la structure chronologique des pluies est mieux représentée que par un processus autorégressif.

Bibliographie

- ALAVI (A.S.) and JENKINS (G.M.). — "An Example of digital filtering". *Applied Statistics*, vol. 14, p. 70 (1965).
- BENDAT (J.S.) and PERSOL (A.G.). — "Measurement and Analysis of Random Data". Wiley (1966).
- BERNIER (J.). — "Sur la théorie de renouvellement et son application en Hydrologie". Rapport 10/67, *Laboratoire National d'Hydraulique*, Chatou (1967).
- BLACKMAN (R.B.) and TUKEY (J.W.). — "The Measurement of Power Spectra". Dover (1959).
- CHOW (V.T., ed). — *Handbook of Applied Hydrology*, (Section 8-1). McGraw-Hill, (1964).
- CHOW (V.T.) and MEREDITH (D.D.). — "Water Resources Systems Analysis. Part III. Review of Stochastic Processes". *Univ. of Illinois, Civil Eng., Hydraulic Eng. Series*, No. 21 (Jul. 1969).
- CLARKE (R.T.). — "A Computer Program for Estimating Regressions between Time Series". *Ass. Int. d'hydrologie Scientifique*, Congrès de Tucson, (décembre 1968).
- COX (D.R.). — "Théorie du Renouvellement". Dunod (1966), traduction de Cox, D.R. "Renewal Theory", Methuen (1962).
- COX (D.R.) and MILLER. — "Theory of stochastic Processes". Wiley (1965).
- DELLEUR (J.). — "Réflexions sur l'analyse spectrale". Rapport ST22, *Laboratoire National d'Hydraulique*, Chatou (juillet 1969).
- DELLEUR (J.). — "Application de l'analyse spectrale à l'étude statistique des pluies, des débits et du transfert pluies-débits dans le bassin de la Sioule". Rapport ST24, *Laboratoire National d'Hydraulique*, Chatou (septembre 1969).
- FIERING (M.B.) and HARRINGTON (J.). — "System analysis in River Basin Planning". *Pan American Health Organization* (Jan. 1968).
- HURST (H.E.), BLACK (R.P.) and SIMAIKA (Y.M.). — "Long-Term Storage, An Experimental Study". Constable, London (1965).
- JENKINS (G.M.) and WATTS (D.G.). — "Spectral Analysis and its Application". Holden-Day (1968).
- KISIEL (C.C.). — "Time Series of Hydrologic Data". *Advances in Hydroscience*, vol. 5, ed. V.T. Chow, Academic Press (1969).
- MANDELBROT (B.B.) and WALLIS (J.R.). — "Robustness of the Rescaled Range R/S in the Measurement of Noncyclic Long Run Statistical Dependence". *Water Resources Research*, vol. 5, No. 5 (1969).
- MANDELBROT (B.B.) and WALLIS (J.B.). — "Computer Experiments with Fractional Gaussian Noise". *Water Resources Research*, vol. 5, No. 1, p. 228-267 (février 1969).
- MATALAS (N.C.). — "Statistics of Runoff-Precipitation Relation". U.S. Geological Survey, *Professional Paper* 434-D (1963).
- MATALAS (N.C.). — "Some Aspects of Time Series Analysis in Hydrologic Studies". *Proceedings, Hydrology Symposium* No. 5, Dept. of Energy, Mines and Resources, Canada (1966).
- MATALAS (N.C.). — "Time Series Analysis". *Water Resources Research*, vol. 3, No. 3, p. 817-829 (1967).
- PARZEN (Z.). — "Stochastic Processes". Holden-Day (1962).
- PELISSIER (C.). — "Méthodes d'analyse et de réglage des groupes thermiques de production d'énergie". Thèse Univ. de Grenoble (1957).
- THOMAS (H.A. Jr.) and FIERING (M.B.). — "Mathematical Synthesis of Streamflow Sequences for the Analysis of River Basins by Simulation". Chapt. 12 in "Design of Water Resources Systems", A. Mass, et al, ed., Harvard University Press (1962).
- WOLD (H.O.A., ed). — "Bibliography on Time Series and Stochastic Processes". MIT Presse (1965).

Discussion

Président : M. P. CASEAU

M. le Président remercie vivement M. BERNIER, qui en l'absence de M. le Professeur DELLEUR empêché, a bien voulu présenter la communication de ce dernier et ouvrir la discussion.

Quand deux séries $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont reliées par une fonction de transfert linéaire, quelle amélioration amène l'analyse spectrale et la fonction de cohérence pour déterminer la transformée de Fourier de la réponse percutielle, par rapport à la méthode classique de quotient des transformées de Fourier des séries x_1 et x_2 , demande M. G. de MARSILY.

Concernant l'usage des spectres pour rechercher des relations de convolution du type de celles examinées ici, M. le Président se demande s'il ne serait pas plus rapide et plus sûr d'utiliser l'algorithme de Kalmann.

Je n'ai pas l'expérience de l'algorithme de Kalmann parce qu'on a rarement essayé de définir en hydrologie des relations de ce type, répond M. BERNIER.

Mais observe M. le Président, il n'y a pas de différence très grande entre l'algorithme de Kalmann et les méthodes statistiques que vous avez l'habitude d'utiliser. On peut même dire que cet algorithme a comme originalité, comme dans la recherche des variables principales que vous avez exposée, de ne pas figer *a priori* le degré de l'approximation, c'est-à-dire le nombre de points qu'on prend au départ, mais de s'arrêter lorsqu'on a atteint la dimension maximale du système et que le résidu ne mérite plus d'être analysé.

« Je dois préciser, dit M. BERNIER, que j'ai cité la méthode de Fourier transformée parce qu'elle est assez utilisée et rend le calcul relativement aisé; mais les figures que je vous ai présentées ont été obtenues à partir des méthodes traditionnelles, en particulier à partir du calcul de l'estimateur spectral classique, avec lissage par les méthodes usuelles.

« Avec ces méthodes statistiques, vous avez vu apparaître la variabilité de l'estimateur et son caractère erratique même après lissage.

« Cela m'amène à souligner un point très important, à savoir que le spectre sans lissage est le périodogramme en statistique. Il a été utilisé de façon « excessive » par certains hydrologues cher-

chant des périodes : ceux-ci ont analysé le périodogramme, le spectre non lissé et en ont déduit l'existence de nombreuses périodicités (cycle de Bruckner de trente-cinq ans, cycle de onze ans dit des tâches solaires, etc.). Malheureusement, l'existence de ces périodicités est illusoire; elle est due à la méthode de calcul elle-même qui introduit une certaine instabilité. »

M. DUBAND pose à M. BERNIER les deux questions suivantes :

1° Pensez-vous qu'il y ait plus d'informations dans le spectre que dans le corrélogramme ?

2° Les hypothèses de stationnarité concernent les moments de second ordre : or il ne suffit pas d'éliminer la composante saisonnière de la moyenne et de l'écart-type en utilisant des variables centrées réduites pour être assuré de la stationnarité des moments d'ordre supérieur à deux; pour certains bassins, les processus autorégressifs sous-jacents sont totalement différentes suivant les saisons. »

M. BERNIER répond en ces termes :

« Je commence par répondre à la deuxième question...

Effectivement (je crois l'avoir dit au cours de l'exposé), cette analyse suppose qu'il y a en fait une certaine stationnarité du processus. Bien sûr, en hydrologie son application est limitée parce qu'il y a quelquefois des stationnarités plus complexes que celles qui apparaissent au niveau des caractéristiques du second ordre. Effectivement, cette technique ne prétend décrire que les caractéristiques du second ordre, c'est-à-dire les variances et autovariances des séries. C'est donc une description limitée mais précise pour les caractéristiques étudiées.

« Je réponds maintenant à la première question... « Il n'y a pas davantage d'information, puisque finalement l'information de base correspond aux autocorrélations d'une série. Le spectre donne de l'information une photographie différente de celle de l'autocorrélation; peut-être plus précise pour certains aspects, peut-être moins précise pour d'autres... Pour l'étude des structures de dépendance, le spectre est vraisemblablement plus précis. »

M. le Président clôt la discussion en remerciant les personnes qui ont bien voulu intervenir malgré la technicité du sujet.

Abstract

Recent developments in the analysis of hydrological time records. Concatenations and spectrum analysis

The generation of hydrologic time series is the starting point of the systematic analysis for the study or the management of water resources developments. In general, the stationarity of the time series, at least to the second order is assumed. Hydrologic series are not necessarily stationary but may be made approximately stationary by the removal of the deterministic components that may exist, such as a trend, a periodicity, or a persistence.

The most common mathematical models for time series simulation are the autoregressive processes, the moving averages and the mixed processes. The auto- and cross-spectral analysis is a powerful method for the determination of mathematical models of hydrologic processes. The general appearance of the autospectrum indicates the type of process, for example, if a first or a second order autoregressive process is a suitable model, and the spectrum may also be used to determine the values of the model parameters. The crossed spectrum is useful to establish relationships between

two time series such as the rainfall and runoff sequences. These series may be related, for example, by a simple regression. A continuous or a discrete linear system connecting the two series may be identified. With the latter model, the runoffs may be expressed as a weighed sum of antecedent precipitations.

These techniques were applied to the study of rainfall and runoff in the Sioule basin, a tributary of the Allier River, in central France. The study was made for monthly, daily and bihourly data. A logarithmic transformation of the runoffs and a square root transformation of the rainfalls improved the relationships at the monthly and daily time scales. The periodicity was removed by normalization for the monthly data, and by filtering for the daily and bihourly data. Several mathematical models are proposed to simulate the time series of rainfall and of the runoff and the rainfall-runoff transfer in the Sioule basin for the three time scales.