



LES MODÈLES MATHÉMATIQUES DE LA POLLUTION EN RIVIÈRE

par **J. BERNIER**

Ingénieur à la Direction des Etudes et Recherches
d'Électricité de France

Introduction

Le contrôle de l'efficacité des moyens de lutte contre la pollution en rivière, par exemple les ouvrages de traitement des effluents urbains ou industriels, demande que l'on suive l'évolution de la qualité des eaux non pas seulement à l'aval immédiat du ou des points de rejet mais également sur l'ensemble du secteur aval où la qualité des eaux est conditionnée par ces rejets.

Le comportement de ces rejets et l'évolution des matières polluantes sont liés aux caractéristiques physiques et chimiques de la rivière.

Le problème de la pollution est un problème multidimensionnel dans le sens où la qualité de l'eau n'est pas mesurée par un seul paramètre mais par un ensemble aussi divers que : la concentration en O_2 dissous, la DBO, la température, les matières en suspension, le pH, les divers paramètres de salinité (sulfates, chlorures, etc.), les dérivés azotés, (NH_4 , NO_2 , NO_3), etc.

Généralement les modèles mathématiques proposés dans la littérature sont essentiellement unidimensionnels et ne prennent pas en compte les interactions éventuelles entre les paramètres de qualité.

On sait que les polluants biologiques notamment se caractérisent par une interaction importante avec le milieu aquatique ambiant propice à l'activité des bactéries qui réduisent progressivement la concentration de ces polluants. Dans cette auto-épuration le rôle essentiel est joué par certaines bactéries aérobies qui réduisent les matières organiques en utilisant l'oxygène dissous dans le milieu. La

concentration en O_2 dissous, par son interaction avec les divers aspects de la pollution biologique, par son importance propre pour assurer la vie aquatique notamment, constitue un des paramètres de référence essentiels pour mesurer la qualité des eaux. Par ailleurs les modèles descriptifs de la concentration de la plupart des polluants autres ne sont que des cas particuliers beaucoup plus simples des modèles adéquats pour la concentration en O_2 .

Il importe donc d'étudier l'évolution conjointe de :

- la concentration en O_2 dissous : C;
- la concentration en matières organiques consommables mesurées usuellement par la demande biologique en oxygène : DBO.

Principes de base des modèles mathématiques

On n'examinera ici que les modèles unidimensionnels décrivant l'évolution de la concentration moyenne, (dans une section donnée) du polluant en fonction du temps et de l'abscisse longitudinale de la rivière.

Le modèle doit prendre en compte deux types de phénomènes :

- a) le phénomène mécanique du transport du polluant qui dépend de l'hydraulique du milieu;
- b) le phénomène physico-chimique de dégradation du polluant et de réoxygénation.

Le transport du polluant est assuré par deux mécanismes :

- la convection, c'est-à-dire la translation de volume ou de masse élémentaire du polluant à la vitesse moyenne de l'écoulement;
- la dispersion, c'est-à-dire les échanges entre les éléments de fluides adjacents, dus aux variations statistiques de la vitesse ponctuelle du fluide autour de la vitesse moyenne.

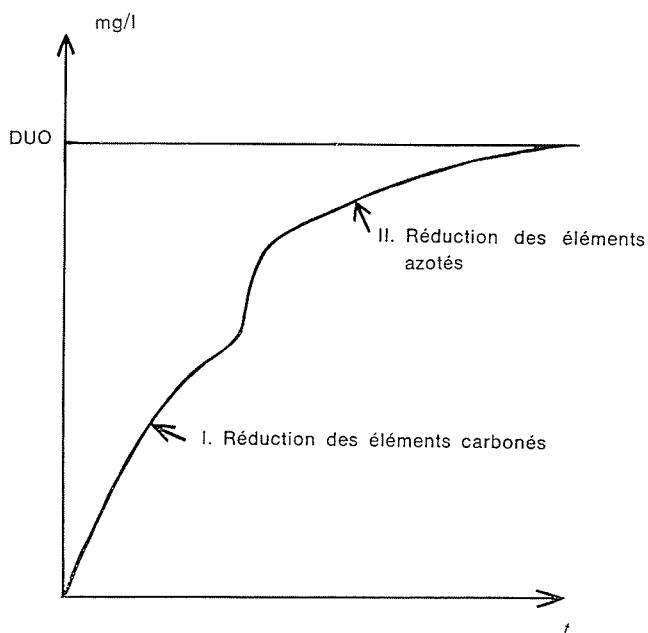
Sur le plan physico-chimique on doit prendre en compte notamment la dynamique de la réaction de DBO qui peut être représentée schématiquement par le diagramme ci-dessous représentant l'évolution de la concentration de DBO (consommation cumulée en oxygène) en fonction du temps au cours de la réaction de dégradation.

Il apparaît deux phases dans cette réaction caractérisée par deux dynamiques distinctes :

- une phase préalable de réduction des éléments carbonés;
- une phase ultérieure de réduction des éléments azotés.

En faisant intervenir la limite DUO : demande ultime en oxygène, on utilise fréquemment la grandeur :

$$L \text{ (demande restante)} = \text{DUO} - \text{DBO}$$



Courbe de DBO (température donnée)

Le modèle de Streeter et Phelps (1925)

Soient, une section de rivière d'abscisse longitudinale x , t l'époque, Q le débit, U la vitesse moyenne du courant, T la température de l'eau.

En supposant un régime permanent uniforme pour Q et T , on pose :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dC}{dt} = \frac{UdC}{dx} &= K_2(C_s - C) + K_1L \\ \frac{dL}{dt} = \frac{UdL}{dx} &= -K_1L \end{aligned} \right\} (1)$$

où :

K_2 : taux de réoxygénation;

K_1 : taux de consommation de l' O_2 dissous;

C_s : concentration de saturation de l' O_2 dissous dans l'eau à l'équilibre avec l'oxygène de l'air sous les conditions naturelles de l'endroit et du moment.

En supposant K_1 , K_2 , C_s indépendants de x et de t , les équations peuvent être résolues :

$$L = L_0 e^{-K_1 t/U}$$

$$C - C_s = (C_0 - C_s) e^{-K_2 t/U} + \frac{K_1 L_0}{K_2 - K_1} (e^{-K_1 t/U} - e^{-K_2 t/U})$$

Ces formules sont usuellement utilisées soit pour déterminer la concentration minimale C_m en fonction des conditions initiales L_0 et C_0 , soit pour déterminer la charge polluante initiale L_0 assurant une concentration minimale fixée C_m en fonction d'une concentration initiale C_0 ; L_0 intègre la charge initiale de la rivière et le rejet éventuel.

Estimation des coefficients

Il existe de nombreuses formules permettant l'estimation des coefficients K_2 et K_1 intervenant dans le modèle de Streeter et Phelps.

Pour la réoxygénation notamment, ce sont des formules essentiellement empiriques, valides dans le domaine des conditions précises où elles ont été établies soit en laboratoire, soit *in situ*. A cet égard on doit signaler le résultat de Churchill déterminé par des mesures en rivières non polluées à l'aval de réservoirs pendant les périodes de fonctionnement d'évacuateurs de fonds :

$$K_2 = 11,6 \frac{U^{0,939}}{h^{1,673}} (1,024)^{T-20}$$

où :

U : vitesse en pieds/s;

h : profondeur en pieds;

T : température en degrés C.

En ce qui concerne le coefficient de dégradation K_1 , on utilise souvent des formules du type :

$$K_1 = K_{10} \theta^{(T-T_0)}$$

Il est difficile de donner des valeurs numériques universelles. Il importe d'estimer K_1 sur des observations *in situ*. Généralement on admet que le rapport K_2/K_1 peut aller de 1,5 à 2 pour des cours d'eau lents, à 3 à 5 pour des cours d'eau rapides.

Mais aussi bien pour K_1 et K_2 il est pratiquement impossible d'utiliser des formules générales par suite de la distance importante entre les conditions dans lesquelles ces formules ont été élaborées et les conditions naturelles de leur application en rivière polluée.

Critique du modèle de Streeter et Phelps

Processus de transport du polluant.

Le modèle est trop schématique. La dispersion n'est pas prise en compte. On sait qu'elle joue un rôle important dans le cas des estuaires. En rivière, il semble qu'on ne puisse donner des règles générales.

Rappelons que la dispersion longitudinale se traduit par une certaine distribution des concentrations de polluants observés en fonction du temps en un point x donné, caractérisée par une variance $\sigma_x^2(t)$. Cette variance peut être utilisée pour estimer un modèle de transport plus réaliste que le modèle de Streeter et Phelps.

En assimilant le processus de dispersion au phénomène de diffusion moléculaire, le premier membre des équations (1) peut être remplacé par :

$$\frac{\delta C}{\delta t} + \frac{U \delta C}{\delta x} - D_L \frac{\delta^2 C}{\delta x^2} \quad (2)$$

où D_L est le coefficient de dispersion constant égal à :

$$D_L = \frac{U^3}{2} \frac{d \sigma_x^2(t)}{dx} \quad (3)$$

Ce modèle qui implique une variation de $\sigma_x^2(t)$ proportionnelle à x est généralement valide loin du point d'émission de la pollution. On constate cependant des écarts importants pour des points moins éloignés. Ces écarts sont essentiellement dus à la non-prise en compte des composantes transversales et verticales des coefficients de dispersion.

En utilisant des coordonnées x et z transversales et verticales, le modèle général pourrait s'écrire pour la dispersion longitudinale :

$$\frac{\delta C}{\delta t} + \frac{U \delta C}{\delta x} = D_1 \frac{\delta^2 C}{\delta x^2} + \frac{\delta}{\delta y} \left(D_2 \frac{\delta C}{\delta y} \right) + \frac{\delta}{\delta z} \left(D_3 \frac{\delta C}{\delta z} \right) + F$$

où F représente les fonctions : sources et puits de polluants.

La résolution numérique de cette équation pose des problèmes très complexes même avec des moyens puissants. Cependant le modèle de diffusion (2) et (3) peut donner des résultats pratiques valables si on est capable d'estimer la variance $\sigma_x^2(t)$.

A cet égard peu de mesures *in situ* ont été pratiquées. On peut citer les campagnes effectuées par le C.E.A. et la Division échange atmosphérique des Etudes et Recherches d'E.D.F. sur la Seine et la Loire. Sur la Seine notamment, il semble que la dispersion longitudinale soit assez faible pour des débits cependant assez grands de l'ordre de 1 000 m³/s à l'aval du confluent avec l'Oise. Malgré la difficulté de ces mesures, il serait très utile de les systématiser.

Par ailleurs le modèle de Steeter et Phelps néglige le caractère non permanent et non uniforme du régime des débits et des températures, ce qui peut avoir une grande importance si on étudie des intervalles de temps et des sections de rivière assez grands.

Processus physico-chimique.

Le modèle néglige les processus suivants :

- retrait de D.B.O. par sédimentation et adsorption;
- addition de D.B.O. par la décomposition des matières organiques de fonds et diffusant dans l'eau;
- addition de D.B.O. par écoulement local;
- retrait d'O₂ par la respiration des boues fluviales;
- addition d'O₂ par la photosynthèse;
- le retrait d'O₂ par la respiration des plantes, des algues et du phytoplancton (lits et berges).

Ces deux derniers phénomènes peuvent être très importants et, pour certains auteurs, devenir même prépondérants par rapport au phénomène de réoxygénation par la surface, mais il existe très peu de mesures sur la photosynthèse notamment.

Les processus aléatoires

Lorsqu'on s'intéresse à l'évolution à long et moyen terme de la pollution, de nombreux facteurs doivent être considérés dans un contexte aléatoire; ce sont :

- la température de l'eau T
- la concentration initiale en oxygène dissous C_R
- le débit de la rivière au droit du point de rejet .. Q_R
- le débit de l'effluent Q_E
- la charge en matière polluante de la rivière L_R
- la charge en matière polluante de l'effluent L_E

Le débit intervient comme facteur de la vitesse U et de la profondeur h .

On observera que l'aléatoire intervient dans la propagation d'un polluant dans un tronçon de rivière donné non seulement dans les variables d'entrée mais surtout dans la fonction de transfert puisque les coefficients de réoxygénation et de dégradation sont aléatoires comme fonction du débit et de la température.

Les problèmes

Pour le calcul de dimensionnement des ouvrages de traitement des eaux, les méthodes en usage prennent en compte la nature aléatoire des phénomènes précédents en utilisant des valeurs de référence :

- un étiage critique, un débit critique extrême défini sur une série historique;
- une température extrême;
- un débit d'effluent et une charge polluante fixée.

Bien souvent ce procédé est trop pessimiste et amène un surdimensionnement de l'ouvrage dans la mesure où une telle combinaison de cas défavorables n'a que peu de chance d'apparaître en réalité.

Il importe plutôt de calculer les lois de probabilité de la concentration de polluant en fonction du temps et de l'abscisse x .

Un calcul direct de ces lois de probabilité est difficile par suite des équations complexes caractérisant les phénomènes physiques. On peut utiliser le procédé indirect de simulation.

Il reste à estimer les paramètres intervenant dans un tel calcul.

La nature aléatoire des phénomènes de pollution ne permet pas d'aboutir à une estimation valable lorsqu'on dispose d'un petit nombre de mesures limitées dans le temps à des conditions hydrologiques particulières. Il importe d'effectuer un échantillonnage suivi dans le temps pour obtenir des données représentatives. La plupart des données systématiquement recueillies actuellement sont relevées à une fréquence trop faible (mensuelle ou même trimestrielle) pour pouvoir être utilisées dans ces modèles.

Actuellement il semble que les efforts doivent porter plus sur la mise en œuvre de collecte d'information convenable *in situ* du point de vue de la pollution et du mécanisme du transport par le milieu (dispersion) que sur les études en laboratoire des phénomènes en jeu.

M. le Président remercie M. BERNIER de son exposé qui a bien montré les limites de la méthode étudiée et la nécessité de mesures assez nombreuses pour le réglage du modèle. Il déclare ouverte la discussion.

M. LEFROU pose au conférencier les deux questions ci-après :

1° La non-stationnarité des phénomènes de pollution (évolution tendancielle pendant dix ans des sources de pollution) ne limite-t-elle pas les possibilités d'utilisation des méthodes de régression ?

2° Ne trouve-t-on pas dans la littérature des cas où les conditions physiques étaient telles qu'un « calage » a été possible du modèle Streeter et Phelps ? Dans l'affirmative, les valeurs de K_1 et de K_2 résultant du calage conduisent-elles à des ordres de grandeur comparables à celles données par les formules empiriques ? »

M. BERNIER apporte les réponses suivantes :

1. En considérant la méthode de corrélation comme un algorithme, les résultats qu'elle fournit doivent être examinés — en particulier, en vue de la prévision — en tenant compte de l'évolution des paramètres intervenant dans le modèle et notamment en fonction de la variation des rejets polluants. Si l'on disposait d'une information dense, on pourrait statistiquement, par exemple au moyen de l'analyse spectrale, mettre en évidence ces variations et essayer de les éliminer, de les filtrer en vue de mettre au point des formules tenant compte de ces tendances. On ne peut pas le faire actuellement parce que les données sont trop peu abondantes.

« En fait, il y a deux échelles qui interviennent : l'échelle d'espace et l'échelle de temps. Actuellement, si l'on a fait beaucoup d'efforts pour échantillonner dans l'espace, on en a certainement fait beaucoup moins pour faire des mesures à une fréquence relativement grande. Cela est dû, en particulier, à la difficulté d'effectuer des observations puisqu'il s'agit ici de mesures chimiques ou biologiques qui — en particulier pour le calcul de la D.B.O. — ne sont pas instantanées ;

2. A ma connaissance, il y a eu très peu de calculs sur des mesures faites dans la nature. J'ai pourtant feuilleté une bibliographie abondante dans ce domaine, mais, dans la plupart des cas, il s'agit de mesures faites en laboratoire dans des conditions expérimentales bien précises : on élimine ainsi tous les facteurs d'instabilité et, dans ces conditions, le modèle de Streeter et Phelps donne une bonne approximation mais je n'ai pratiquement pas vu d'exemple de calculs à partir de données « naturelles ».

« Quelques essais ont été faits en France, en particulier sur la Seine, mais, là encore, les données étaient tellement dispersées que les coefficients n'avaient pas la précision nécessaire pour être introduits dans un modèle. »

En effet, confirme M. le Président, il y a peu de choses à tirer des quelques mesures trop espacées faites en France, le plus souvent par des organismes différents employant des méthodes différentes; de ce fait, les résultats sont peu homogènes. Par exemple, on a dépouillé l'ensemble des données qui ont été collectées depuis une dizaine d'années sur la Seine; on a constaté la très grande hétérogénéité de ces mesures; ce que l'on pouvait en tirer était relativement douteux.

Il y a eu un certain nombre de communications intéressantes aux divers congrès sur la pollution qui se sont tenus récemment, en particulier à Prague et à San Francisco; il semble qu'à l'étranger, on utilise plus qu'en France les différents modèles de pollution.

Il y a, en effet, dit M. BERNIER, de nombreux exemples d'application de ces modèles utilisant la formule de Churchill ou celle de Hobbins; les Polonais ont mis au point leur propre formule; dans ce domaine, il paraît exister autant de formules que d'auteurs. Mais, on n'a pas cherché, semble-t-il, à optimiser l'adéquation du modèle sur les données disponibles; d'ailleurs, ces données ne répondent pas aux conditions d'application du modèle de Streeter et Phelps, du fait de la non-permanence et de la variabilité des phénomènes en jeu.

En l'absence d'autres demandes d'intervention, M. le Président tire les conclusions de la séance :

« Ce qui m'a frappé, dit-il, c'est l'interconnexion des techniques et, en particulier, les possibilités d'utilisation dans d'autres domaines, des techniques que les hydrologues ont mises au point pour leurs modèles. Nous avons eu l'occasion, aujourd'hui, de sortir un peu de l'hydrologie traditionnelle : nous avons parlé des étiages mais aussi de l'étude du ruissellement urbain qui sort déjà un peu des préoccupations habituelles aux hydrologues. Puis, avec M. BERNIER, nous nous en sommes très largement éloigné.

J'ai l'impression qu'il était intéressant de traiter ces différents problèmes dans une même séance parce que les secteurs qui sont le plus en retard devraient pouvoir profiter des secteurs en pointe et, en particulier, du secteur de l'hydrologie. Mais cela n'est réalisable — et c'est un peu ce que disait M. LEFROU tout à l'heure — que s'il se constitue des équipes pluridisciplinaires où les hydrologues apporteraient non seulement leurs connaissances sur le niveau des ressources, mais aussi les méthodes qu'ils ont mises au point depuis de nombreuses années.

« Je crois, et cela sera ma conclusion, que les hydrologues peuvent aider à faire progresser les ingénieurs voués à « l'aménagement des bassins », à condition que ceux-ci acceptent de sortir de leurs préoccupations habituelles et que des moyens suffisants leur soient donnés. »

