L'ÉNERGIE D'UN TRAIN DE HOULE CYLINDRIQUE IRROTATIONNELLE COMPOSÉE DU DEUXIÈME ORDRE

par J. LARRAS
Inspecteur général des Ponts et Chaussées

I. — Introduction

Nous avons montré, dans les *Cahiers océanographiques* de novembre 1967, que les trains de houle cylindrique irrotationnelle composée du 2ᵉ ordre tirent leur énergie cinétique des houles composantes, des pseudo-harmoniques et des houles induites et qu'ils tirent leur énergie potentielle des houles composantes à l'exclusion des deux autres sortes de houles.

La présente étude a pour objet d'approfondir ces problèmes d'énergie par le calcul.

II. — Formule générale

1. Nous avons montré, dans les *Cahiers océanographiques* de novembre 1967, que l'énergie cinétique E d'un train de houle cylindrique irrotationnelle composée est égale à :

$$\frac{\rho}{2}\int \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot dx$$

par unité de largeur, au 3ᵉ ordre de la cambrure près, lorsqu'on effectue l'intégration de long de la surface libre et lorsqu'on désigne par ρ la masse volumique du liquide, par g l'accélération de la pesanteur, par $2\,a_i$ l'amplitude de la houle composante de rang i, par 2 L la longueur des trains de houle, par φ le potentiel des vitesses d'oscillation de l'eau.

Or, Biesel a montré, dans *La Houille Blanche* de mai-juin 1952, qu'on peut représenter le potentiel φ par une expression de la forme :

$$\begin{aligned}
\varphi = \; & \sum_i \mathrm{A}_i \, ch\, m_i (h - y) \sin (\mathrm{K}_i t - m_i x) \\
& + \sum_i \mathrm{B}_i \, ch\, 2\, m_i (h - y) \sin (2\,\mathrm{K}_i t - 2\, m_i x) \\
& + \sum_i \sum_j \mathrm{C}_{ij} \, ch\, (m_i + m_j)(h - y) \\
& \qquad \times \sin [(\mathrm{K}_i + \mathrm{K}_j)\, t - (m_i + m_j)\, x] \\
& + \sum_i \sum_j \mathrm{D}_{ij} \, ch\, (m_i - m_j)(h - y) \\
& \qquad \times \sin [(\mathrm{K}_i - \mathrm{K}_j)\, t - (m_i - m_j)\, x]
\end{aligned}$$

en désignant par x, y les coordonnées cartésiennes du point du liquide où l'on considère le potentiel φ, par h la hauteur d'eau à l'aplomb de l'abscisse x, par m_i le nombre d'onde $2\,\pi/\mathrm{L}_i$ de la houle composante de rang i, et par K_i la fréquence angulaire $2\,\pi/\mathrm{T}_i$ définie par la relation :

$$\mathrm{K}_i^2 = m_i\, g\, th\, m_i h$$

On a donc :

$$\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} = + \sum_i \frac{1}{2} A_i^2 m_i \, sh \, 2 m_i (h - y) \sin^2 (m_i x - K_i t)$$

$$+ \sum_i B_i^2 m_i \, sh \, 4 m_i (h - y) \sin^2 (2 m_i x - 2 K_i t)$$

$$+ \sum_i \sum_j \frac{1}{2} C_{ij}^2 (m_i + m_j) \, sh \, 2 (m_i + m_j)(h - y) \times \sin^2 [(m_i + m_j) x - (K_i + K_j) t]$$

$$+ \sum_i \sum_j \frac{1}{2} D_{ij}^2 (m_i - m_j) \, sh \, 2 (m_i - m_j)(h - y) \times \sin^2 [(m_i - m_j) x - (K_i - K_j) t]$$

$$+ \sum_i \frac{1}{3} A_i B_i m_i \, sh \, 2 m_i (h - y) \sin^3 (m_i x - K_i t)$$

$$+ [\text{termes en } \sin \alpha_{ij} x \sin \beta_{ij} x \text{ (avec } \alpha_{ij} \neq \beta_{ij})]$$

Mais $sh \, K m_i (h - y)$ ne diffère de $sh \, K m_i h$ le long de la surface libre ($y = 0$) que par un terme du 3ᵉ ordre vis-à-vis de la cambrure. L'énergie cinétique E d'un train de houle cylindrique irrotationnelle composée est donc égale à :

$$E = \sum_i \frac{1}{4} \rho A_i^2 m_i \, sh \, 2 m_i h$$

$$+ \sum_i \frac{1}{2} \rho B_i^2 m_i \, sh \, 4 m_i h$$

$$+ \sum_i \sum_j \frac{1}{4} \rho C_{ij}^2 (m_i + m_j) \, sh \, 2 (m_i + m_j) h$$

$$+ \sum_i \sum_j \frac{1}{4} \rho D_{ij}^2 (m_i - m_j) \, sh \, 2 (m_i - m_j) h$$

par unité de largeur, au 3ᵉ ordre de la cambrure près, la sommation des termes de rang i (ou j) le long de la surface libre n'ayant pas lieu sur la demi-longueur d'onde L_i (ou L_j) correspondante mais sur la demi-longueur L du train de houle, qui en est d'ailleurs un multiple entier.

2. La forme même de cette expression de E conduit à formuler le principe suivant :

Les composantes (A_i) d'une houle composée réagissent les unes sur les autres de façon telle que l'énergie cinétique de la houle composée soit la somme pure et simple des énergies cinétiques des houles composantes (A_i), des pseudoharmoniques (B_i) et des houles induites (C_{ij}, D_{ij}), au 3ᵉ ordre de la cambrure près, sans aucune sorte de « termes croisés » ni « d'énergie déphasée ».

Mais cela ne veut pas dire qu'on puisse considérer ces trois sortes de houles comme des houles libres, et nous avons montré, dans les *Cahiers océanographiques* de novembre 1967, qu'on se trouve conduit à violer le principe de la conservation de l'énergie lorsqu'on essaye de les considérer comme telles.

3. On peut expliciter l'expression de E à partir des formules de Biesel et l'on trouve :

$$A_i = \frac{a_i K_i}{m_i \, sh \, m_i h} \qquad B_i = - \frac{3 a_i^2 K_i}{8 \, sh^4 \, m_i h}$$

$$C_{ij} = - \frac{a_i a_j}{2 \, sh \, m_i h \, sh \, m_j h} A_{ij}$$

$$D_{ij} = + \frac{a_i a_j}{2 \, sh \, m_i h \, sh \, m_j h} B_{ij}$$

au 3ᵉ ordre près, en posant :

$$A_{ij} = \frac{(K_i + K_j)(K_i^2 + K_i K_j + K_j^2) - g (m_i K_i - m_j K_j) \, th \, (m_i - m_j) h}{(K_i + K_j)^2 - g (m_i + m_j) \, th \, (m_i + m_j) h} \times \frac{ch \, (m_i - m_j) h}{ch \, (m_i + m_j) h}$$

$$B_{ij} = \frac{(K_i - K_j)(K_i^2 - K_i K_j + K_j^2) - g (m_i K_i - m_j K_j) \, th \, (m_i + m_j) h}{(K_i - K_j)^2 - g (m_i - m_j) \, th \, (m_i - m_j) h} \times \frac{ch \, (m_i - m_j) h}{ch \, (m_i + m_j) h}$$

III. — Houles composantes et pseudo-harmoniques

1. La part E_1 des houles composantes dans l'énergie cinétique de la houle composée est égale à :

$$E_1 = \sum_i \frac{1}{4} \rho A_i^2 m_i \, sh \, 2 m_i h$$

et l'on retrouve la formule classique des houles libres :

$$E_1 = \sum_i \frac{1}{2} \rho g a_i^2 L$$

au 3ᵉ ordre près, en sommant les termes de la façon que nous avons dite et en remplaçant les A_i par l'expression que nous avons donnée au paragraphe II.3.

2. La part E_2 des pseudo-harmoniques dans l'énergie cinétique de la houle composée est égale à :

$$E_2 = \sum_i \frac{1}{2} \rho B_i^2 m_i \, sh \, 4 m_i h$$

et l'énergie cinétique du pseudo-harmonique de rang i est égale au produit de l'énergie cinétique de la houle composante de rang i par :

$$\frac{9 \pi^2}{4} \frac{a_i^2}{L_i^2} \frac{ch \, 4 \pi h / L_i}{sh^6 \, 2 \pi h / L_i}$$

au 3ᵉ ordre près, comme on le verrait en remplaçant B_i par l'expression que nous avons indiquée au paragraphe II.3.

Mais Marcou a montré, dans un rapport au congrès de l'A.I.R.H. de 1957, que les formules de Biesel cadrent d'autant mieux avec l'expérience que la profondeur relative est plus faible ou, en d'autres termes, que le rapport $2 \pi h / L_i$ est plus faible. L'énergie cinétique du pseudo-harmonique de rang i est donc pratiquement égale au produit de l'énergie cinétique de la houle composante de rang i par :

$$\frac{9}{256 \pi^4} \frac{a_i^2 L_i^4}{h^6} = \frac{1}{2\,771} \left(\frac{a_i}{h}\right)^2 \Big/ \left(\frac{h}{L_i}\right)^4$$

au 3ᵉ ordre près et les pseudo-harmoniques représentent une part d'autant plus élevée de l'énergie cinétique de la houle composée que les houles composantes sont plus cambrées, pour des profondeurs relatives plus faibles. Il ne faut cependant voir là qu'une tendance, car on ne peut plus négliger l'écart entre $sh\,\mathrm{K}m_i(h-y)$ et $sh\,\mathrm{K}m_ih$ le long de la surface libre pour les fortes cambrures, comme nous l'avons admis au paragraphe II.1.

IV. — Houles induites

1. La part E_3 des houles induites dans l'énergie cinétique de la houle composée correspond aux sommes doubles qui constituent les deux derniers termes du développement E à la fin du paragraphe II.1.

On peut exprimer E_3 en fonction des a_i, a_j, L_i et L_j en se reportant aux expressions de C_{ij} et de D_{ij} que nous avons indiquées au paragraphe II.3. Mais cela conduit à des formules très lourdes, et l'on peut être tenté d'essayer de simplifier les calculs en remplaçant $th\,\mathrm{K}m_ih$ (ou $th\,\mathrm{K}m_jh$) par $\mathrm{K}m_ih$ (ou $\mathrm{K}m_jh$) comme nous l'avons fait pour les pseudo-harmoniques au paragraphe III.2. Ce n'est malheureusement pas possible, car cela conduit à :

$$A_{ij}\ (\text{ou } B_{ij}) = \frac{3\,m_im_j\,(m_j^2 \pm m_i^2)}{(m_i \pm m_j)^2 - (m_i \pm m_j)^2} = \infty$$

et par suite à :

$$C_{ij} = \infty \qquad D_{ij} = \infty \qquad E_3 = \infty$$

ce qui n'est physiquement pas concevable, et ce qui n'a, de toute façon, plus rien à voir avec l'hypothèse du paragraphe II.1. sur les possibilités d'assimilation de :

$$sh\,\mathrm{K}m_i(h-y)$$

et de $sh\,\mathrm{K}m_ih$ le long de la surface libre.

Il faut donc se contenter de retenir des calculs précédents que les houles induites représentent une part d'autant plus élevée de l'énergie cinétique de la houle composée que la profondeur relative est plus faible.

2. On ne peut dès lors utiliser la théorie de la houle irrotationnelle composée du 2[e] ordre que dans un créneau relativement étroit, entre les trop faibles profondeurs relatives pour lesquelles le calcul conduit à des impossibilités, et les trop fortes profondeurs relatives pour lesquelles l'expérience ne vérifie plus assez bien les prévisions du calcul.

Il faudrait donc tenir compte des pertes d'énergie par turbulence et frottements dans une théorie plus complète du phénomène. Mais la théorie de la houle irrotationnelle composée du 2[e] ordre n'en conserve pas moins le très beau titre d'avoir su prévoir l'existence des pseudo-harmoniques et des houles induites, avant que l'expérience n'en établisse la réalité.

V. — Application numérique

Il est intéressant de voir comment les houles composantes, les pseudo-harmoniques et les houles induites se répartissent l'énergie cinétique dans le cas d'une houle composée telle qu'on peut en rencontrer par forte tempête dans des fonds de 15 m au large de Dunkerque :

$$\begin{array}{ll} 2\,a_1 = 3 \text{ m} & 2\,a_2 = 1{,}50 \text{ m} \\ T_1 = 7{,}5 \text{ s} & T_2 = 6 \text{ s} \\ L_1 = 75 \text{ m} & L_2 = 52 \text{ m} \\ m_1 = 0{,}084 & m_2 = 0{,}120 \\ K_1 = 0{,}836 & K_2 = 1{,}047 \\ L = 3\,900 \text{ m} & h = 15 \text{ m} \end{array}$$

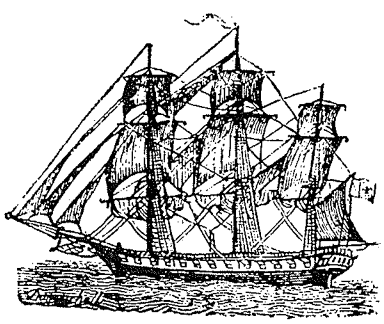
Les formules du paragraphe II.3, donnent alors :

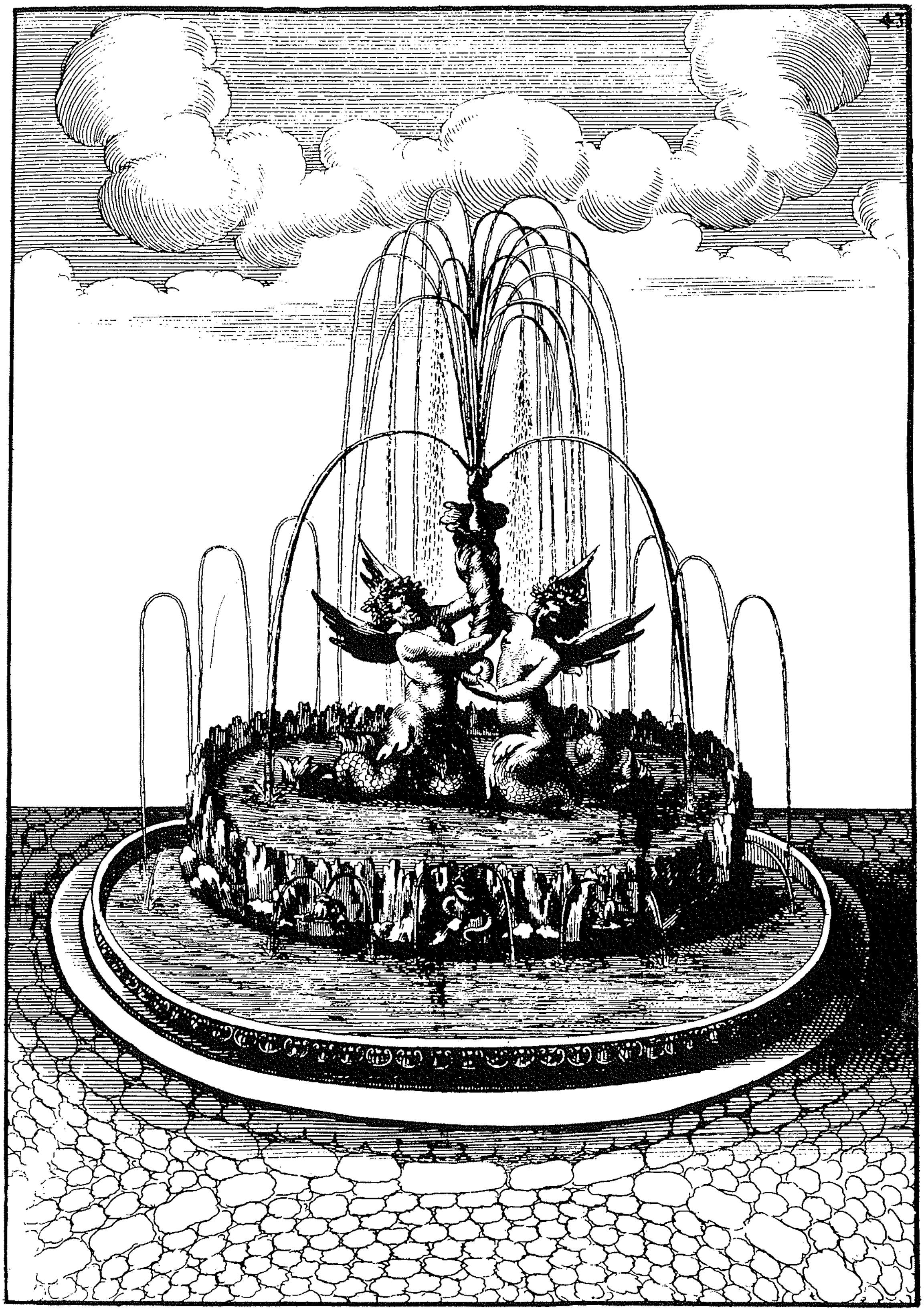
$$\begin{array}{ll} A_1 = +\,9{,}20 \ \text{m}^2/\text{s} & A_2 = +\,2{,}22 \ \text{m}^2/\text{s} \\ B_1 = -\,0{,}102 \ \text{m}^2/\text{s} & B_2 = -\ 0{,}003 \ \text{m}^2/\text{s} \\ A_{12} = +\,0{,}324 \ \text{s}^{-1} & B_{12} = +\,16{,}10 \ \text{s}^{-1} \\ C_{12} = -\,0{,}038 \ \text{m}^2/\text{s} & D_{12} = +\,1{,}896 \ \text{m}^2/\text{s} \end{array}$$

et les formules du paragraphe II.1. donnent ensuite (avec les notations que nous avons adoptées pour désigner les différentes catégories d'énergie cinétique) :

$$\begin{array}{l} E_1 = 21\,464 + 5\,426 = 26\,890 \ \text{t.m/m} \\ E_2 = 66 + 75 = 141 \ \text{t.m/m} \\ E_3 = 34 + 43 = \ \ 77 \ \text{t.m/m} \end{array}$$

Les houles d'interaction (pseudo-harmoniques et les houles induites) ne représentent donc que 0,8 pour 1 000 de l'énergie cinétique de la houle composée, et 0,4 pour 1 000 de son énergie totale (potentielle et cinétique), dans le cas de la houle de tempête que nous avons prise comme exemple. De sorte qu'on ne commet pratiquement pas d'erreur en négligeant les houles d'interaction dans une étude énergétique des lames.




47