CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES SUR LES PROBLÈMES D'AÉRO ET D'HYDROÉLASTICITÉ

par A. FORTIER
Laboratoire de Mécanique Expérimentale des Fluides
Département de Mécanique, Université Paris VI

J'ai conservé dans le titre de cette communication les mots aéro et hydroélasticité bien qu'ils ne caractérisent peut-être pas de façon parfaitement claire tous les problèmes auxquels ils s'appliquent. Mais l'emploi de ces termes étant bien établi maintenant, je pense qu'il est inutile d'essayer d'en imaginer de nouveaux et qu'il suffit d'en donner une bonne définition.

Nous dirons donc qu'un problème est un problème d'aéro ou d'hydroélasticité lorsqu'on est amené à étudier simultanément un écoulement de fluide (gaz ou liquide) et les mouvements éventuels, par rapport à un référentiel déterminé, de parois solides au contact du fluide en mouvement et soumises à des forces instationnaires dues à l'écoulement ou au mouvement relatif des parois par rapport au fluide.

Les premiers problèmes répondant à cette définition et qui ont été étudiés, concernaient des vibrations engendrées par l'écoulement de l'air autour d'éléments de structure d'avions. Les parties de structure qui se déformaient étaient dans ce cas soumises à des forces de rappel élastiques dont l'association à l'écoulement de l'air a conduit naturellement au terme aéroélasticité. Par la suite, des problèmes de même nature se sont posés en construction navale et il a donc été non moins naturel d'introduire par analogie l'hydroélasticité.

En fait on s'est aperçu très rapidement que la destruction d'éléments de structure limitant intérieurement ou extérieurement un écoulement était souvent due à l'action de forces instationnaires s'exerçant sur ces structures sans que l'élasticité de la structure n'intervienne nécessairement et on a étendu le domaine de l'aéro et de l'hydroélasticité à des problèmes où l'élasticité ne joue plus aucun rôle.

Au lieu de forger des mots nouveaux l'usage a voulu que l'on conserve les termes existants et pour bien marquer qu'il n'y a pas de distinction essentielle entre ces problèmes liée à la nature du fluide G.H. Toebes [1] a même proposé le mot « fluidelasticity » qu'on pourrait traduire en français par « fluidoélasticité ». Ce terme ne me paraît pas très heureux, du moins dans notre langue, et je suis d'avis de conserver aéro et hydroélasticité.

En effet, bien que les écoulements de gaz ou de liquides obéissent effectivement aux mêmes équations générales, lorsqu'on peut les considérer comme des milieux continus, ces deux types de fluides ont pourtant des propriétés physiques bien différentes. Dans beaucoup de cas il est donc intéressant de les distinguer car, par exemple, une simplification des équations valable pour les gaz peut très bien ne pas l'être pour les liquides ou inversement.

Dans la définition générale de l'aéro ou de l'hydroélasticité j'ai précisé que la structure était soumise à des forces instationnaires; ce caractère est absolument essentiel mais demande un complément d'information et en particulier une définition de ce qu'on entend par instationnaire [2].

En toute rigueur un écoulement est instationnaire par rapport à un référentiel donné lorsque le champ des vitesses au sens d'Euler dépend du temps. Or si on adopte cette définition rigoureuse, tous les écoulements à l'échelle industrielle sont instationnaires. On sent donc bien la nécessité d'adopter une définition pratique adaptée aux applications.

Cette définition pratique repose sur des constatations expérimentales très générales qui sont les suivantes. Si on réalise un très grand nombre N d'installations identiques,

Article published by SHF and available at http://www.shf-lhb.org or http://dx.doi.org/10.1051/lhb/1971025

c'est-à-dire si on impose à un écoulement des conditions aux frontières et des conditions initiales identiques, les champs de vitesses au bout du même temps t, compté à partir de l'instant initial, ne sont pas identiques dans les N installations. Il est donc impossible de prévoir en toute rigueur, à partir de mesures effectuées sur les N installations, le champ des vitesses que l'on obtiendrait à l'instant t dans une $N + 1^{\text{ème}}$ installation identique aux précédentes. Cette première constatation est très décevante, mais heureusement on s'aperçoit en même temps que ces champs de vitesse obéissent à des lois statistiques qui permettent en fait de prévoir le champ des vitesses dans la $N + 1^{\text{ème}}$ installation avec une probabilité donnée. Pour énoncer ces lois statistiques il est commode d'introduire d'abord les moments du premier ordre des vitesses et dans le cas général des pressions et des températures dans tout le domaine occupé par le fluide en mouvement. Pour cela on considère un point M de coordonnées x_i par rapport à un référentiel lié aux frontières et qui doit être évidemment le même dans les N installations et à l'instant t on mesure une composante U_i de la vitesse en M dans les N installations. Le moment du premier ordre de U_i, que nous désignerons par $\overline{U_i}$, est tout simplement la moyenne arithmétique des N résultats de mesure. Une constatation, encourageante celle-là, est que $\overline{U_i}$ ne dépend pas de N à condition que le nombre d'installations soit suffisamment grand, $\overline{U_i}$ est donc simplement fonction des coordonnées x_i et du temps t. A partir des moments du premier ordre on définit des écarts u_i (appelés souvent fluctuations) en posant pour l'une quelconque des installations $U_i = \overline{U_i} + u_i$. Les écarts u_i sont nuls en moyenne par définition mais les moments du second ordre $\overline{u_i^2}$ c'est-à-dire les variances des écarts ne sont pas nulles en général et on constate que ces variances ne dépendent pas du nombre d'installations mais seulement des coordonnées et du temps. On peut généraliser en introduisant ensuite les lois de probabilités $P(u_i)$ puis les lois des probabilités liées $P(u_i\, u_j)$ pour deux composantes u_i et u_j des écarts et ainsi de suite. On constate que toutes ces grandeurs statistiques ne dépendent pas de N mais dépendent seulement des coordonnées et du temps. Nous exprimerons ces constatations en disant que l'écoulement est statistiquement défini ou déterminé par les conditions initiales et les conditions aux frontières données.

A partir de ces constatations expérimentales on peut proposer une première définition des écoulements stationnaires et par opposition des écoulements instationnaires. Nous dirons provisoirement qu'un écoulement est stationnaire si toutes les grandeurs statistiques que nous avons introduites ne dépendent pas du temps et dépendent seulement des coordonnées. En raison de l'adhérence du fluide aux parois solides en contact avec le fluide il faut, pour que l'écoulement soit stationnaire, que tous les points de ces parois soient animés, par rapport au référentiel choisi, d'un mouvement dont la vitesse moyenne est indépendante du temps.

Toutes les grandeurs statistiques étant indépendantes du temps t les conditions initiales ne doivent pas intervenir et par conséquent un écoulement stationnaire au sens provisoire que nous avons introduit est statistiquement déterminé par les conditions aux frontières. Remarquons de plus que dans les N installations considérées le champ des vitesses peut fort bien dépendre du temps et dans ce cas d'après le théorème ergodique les moyennes dans le temps en un point M d'une des installations sont égales aux moyennes statistiques au même point M.

Les contraintes dans le fluide en mouvement sont liées aux vitesses par la loi de comportement du fluide. Ces contraintes ont donc les mêmes caractères que le champ des vitesses et par suite elles ne sont définies qu'en moyenne. Dans un écoulement stationnaire, ces moyennes sont indépendantes du temps et ne dépendent que des coordonnées. En raison du postulat sur la continuité des contraintes au contact d'une paroi solide les forces exercées par le fluide sur les parois solides sont constantes en moyenne dans un écoulement stationnaire mais elles peuvent dépendre du temps si le champ des vitesses dépend lui-même du temps.

Cette distinction provisoire entre écoulements stationnaires et instationnaires est encore beaucoup trop générale pour être utilisée pratiquement dans les applications et en particulier lorsqu'il s'agit de problèmes d'aéro ou d'hydroélasticité. Pour le montrer je vais prendre deux exemples très classiques d'écoulements stationnaires au sens général que nous venons d'introduire.

Le premier exemple est celui d'une plaque plane rectangulaire de très faible épaisseur que l'on déplace d'un mouvement de translation uniforme de vitesse $\vec{V}$ parallèle à son plan et au côté de longueur l du rectangle. La plaque est plongée dans un fluide de viscosité cinématique ν, supposé illimité et immobile très loin de la plaque. On sait que pour un nombre de Reynolds Vl/ν très grand, de l'ordre de 10^8 par exemple, les deux couches limites qui se développent sur les deux faces de la plaque sont « turbulentes » sur pratiquement toute la plaque, c'est-à-dire que les champs des vitesses dans les deux couches limites dépendent du temps. D'après notre définition l'écoulement est stationnaire car les moyennes ne dépendent pas du temps. La contrainte de frottement exercée par le fluide sur un très petit élément de surface de la plaque dépend du temps mais si on intègre les forces de frottements élémentaires sur toute la surface de la plaque pour obtenir la traînée totale, on constate que cette traînée totale ne dépend pas du temps.

Le deuxième exemple est celui de la même plaque que l'on déplace dans le même fluide, d'un mouvement de translation uniforme à la même vitesse $\vec{V}$ mais perpendiculairement au plan de la plaque. L'expérience montre que dans ce deuxième exemple, pour le même nombre de Reynolds, la résultante des forces élémentaires exercée par le fluide sur la plaque dépend du temps et oscille d'une façon aléatoire autour d'une valeur moyenne indépendante du temps.

Dans ces deux exemples l'écoulement est stationnaire d'après notre définition provisoire et pourtant si cette plaque fait partie d'une structure déformable il est manifeste que les deux problèmes sont très différents. Dans le premier cas on pourra considérer que la force exercée par le fluide sur la plaque est constante bien que le champ des vitesses dans la couche limite dépende du temps tandis que dans le second cas il faudra non seulement connaître la traînée moyenne mais aussi avoir suffisamment d'informations statistiques sur les oscillations aléatoires du système des forces exercées par le fluide sur la plaque, autour de la traînée moyenne.

Il y a donc lieu de compléter notre définition provisoire et il faut introduire pour cela la notion d'échelles des longueurs des fluctuations, échelles définies à partir des coefficients de corrélation.

Considérons un écoulement stationnaire au sens de la définition provisoire mais dans lequel le champ des vitesses dépend du temps au moins dans certaines régions de l'espace occupées par le fluide en mouvement. Etant donnés deux points M et M′ dans une telle région introduisons le coefficient d'intercorrélation :

$$R_{MM'} = \frac{\overline{u_{iM} u_{iM'}}}{\sqrt{\overline{u_{i}^{2}{}_{M}}}\sqrt{\overline{u_{i}^{2}{}_{M'}}}}$$

u_{iM} et $u_{iM'}$ désignant les fluctuations de vitesse suivant le même axe ox_i en M et en M′ au même instant t. Le point M étant fixe, si on fait tendre M′ vers M, $R_{MM'}$ tend vers 1 et en général lorsqu'on éloigne M′ indéfiniment de M, $R_{MM'}$ tend vers 0. On peut dans ces conditions définir en M deux longueurs : une longueur λ telle que $|MM'| \leqslant \lambda$ entraîne $R_{MM'} \geqslant 0{,}9$ par exemple et une longueur L telle que $|MM'| \geqslant L$ entraîne $R_{MM'} \leqslant 0{,}1$ par exemple, quelle que soit la direction ox_i. λ est appelée la microéchelle et L la macroéchelle des fluctuations.

Les longueurs λ et L étant ainsi définies, deux cas extrêmes peuvent se présenter lorsqu'on est amené à calculer les forces exercées par le fluide sur une portion finie de paroi de dimension l. Dans le premier cas $l \gg L$ en tous les points de l'écoulement au voisinage de la portion de paroi considérée et par suite il n'y a pas de corrélation entre les fluctuations des contraintes exercées par le fluide sur deux éléments de surface de la paroi suffisamment éloignés l'un de l'autre. La somme des forces élémentaires c'est-à-dire la résultante des forces exercées par le fluide sur la paroi, ainsi du reste que le moment résultant de ces forces élémentaires par rapport à un point quelconque, sont alors indépendantes du temps et tout se passe comme si l'écoulement était rigoureusement stationnaire.

Dans le deuxième cas l est de l'ordre de λ en tous les points situés au voisinage de l'obstacle. Le coefficient de corrélation entre les fluctuations des vitesses et par suite entre les fluctuations des contraintes en deux points quelconques pris sur la surface de l'obstacle est voisin de l. Il s'ensuit que lorsqu'on intègre les forces élémentaires exercées par le fluide sur tous les éléments de surface de la paroi on obtient une résultante générale et un moment résultant qui fluctuent autour de leurs valeurs moyennes comme le champ des vitesses.

La distinction entre stationnaire et instationnaire doit donc être liée à l'échelle des fluctuations. Si on considère une portion de paroi solide de grande dimension par rapport à la macroéchelle L, l'écoulement est stationnaire même si le champ des vitesses dépend du temps, à condition évidemment que les moyennes ne dépendent pas du temps c'est-à-dire que l'écoulement soit stationnaire au sens provisoire que nous avons précédemment défini. Par contre si la portion de paroi a des dimensions comprises entre λ et L, l'écoulement est instationnaire si le champ des vitesses dépend du temps.

On observe souvent dans les écoulements autour d'obstacles (écoulements externes) ou à l'intérieur de conduits (écoulements internes) des régions de l'espace occupées par le fluide en mouvement où la macroéchelle L et *a fortiori* la microéchelle λ sont petites devant les dimensions de l'obstacle ou du conduit. On dit alors que l'écoulement dans les régions correspondantes est turbulent. Lorsqu'au contraire λ et L sont de l'ordre de grandeur des dimensions de l'obstacle ou du conduit l'écoulement est dit instationnaire dans les régions correspondantes.

Par exemple, dans le cas d'un cylindre de révolution de diamètre D dont les génératrices sont perpendiculaires à l'écoulement d'un fluide de viscosité cinématique ν, de vitesse $\vec{V}$ constante à l'infini, l'écoulement est turbulent dans une partie de la couche limite et instationnaire dans le sillage, à l'aval du cylindre lorsque le nombre de Reynolds VD/ν est égal ou supérieur à 10^6.

Classification des problèmes d'aéro et hydroélasticité

La définition de ces problèmes étant précisée il s'agit de les classer. C'est une opération délicate car dans la plupart des cas des phénomènes de natures complètement différentes sont superposés et comme malheureusement les équations de la mécanique des fluides ne sont pas linéaires il n'est pas possible d'étudier en général ces phénomènes séparément et d'ajouter ensuite leurs effets.

Nous pouvons pourtant distinguer d'abord deux grandes classes de problèmes. Dans la première classe nous placerons tous les problèmes pour lesquels les mouvements de la structure sont pratiquement sans action sur l'écoulement. Il est alors possible de séparer l'étude de l'écoulement du fluide autour ou à l'intérieur de la structure supposée immobile de l'étude du mouvement de la structure sous l'action de forces instationnaires statistiquement connues.

Dans les problèmes de la deuxième classe, les mouvements de la structure jouent un rôle essentiel et ce sont ces mouvements qui donnent naissance à des forces instationnaires au sens que nous avons précisé.

Pour désigner et distinguer ces deux classes nous dirons que les conditions aux frontières sont stationnaires pour les problèmes de la première classe et instationnaires pour les problèmes de la deuxième classe.

Il est bien évident que lorsque les mouvements de la structure prennent une amplitude telle qu'ils entraînent sa destruction, on a souvent affaire au début du mouvement à un problème de la première classe qui se termine par un problème de la seconde classe. Mais dans bien des cas on observe par exemple une rupture par fatigue de la structure et le problème est alors uniquement de la première classe.

Partant de ce premier classement très général je crois qu'il faut ensuite distinguer dans chacune des deux classes d'une part les écoulements internes des écoulements externes et d'autre part dans le cas des liquides les problèmes à surface libre des problèmes sans surface libre.

Nous allons maintenant justifier cette classification en examinant les problèmes de similitude.

Similitude

Etant donné la complexité des problèmes d'aéro et d'hydroélasticité il est souvent difficile de faire un modèle mathématique permettant de traiter complètement ces problèmes par le calcul numérique et *a fortiori* par un calcul analytique. De plus, lorsqu'on introduit un modèle mathématique on est obligé de schématiser la réalité et il est toujours prudent de faire des essais de vérification. Pour des raisons économiques évidentes ces essais s'effectuent sur modèle réduit et par conséquent les problèmes de similitude jouent un rôle essentiel.

Les exposés classiques sur la similitude qui s'appuient uniquement sur des considérations d'analyse dimensionnelle sont à mon avis peu convaincants. Ces exposés masquent complètement la réalité physique des phénomènes et conduisent souvent à des erreurs grossières en particulier lorsqu'il s'agit de préciser le rôle joué par les divers paramètres adimensionnels que l'on est amené à introduire. Il est préférable d'écrire d'abord les équations générales et l'ensemble de toutes les conditions initiales et de toutes les conditions aux frontières qui définissent le problème particulier étudié. Puis, en choisissant, parmi les conditions qui définissent le problème, une unité de longueur, une unité de temps, une unité de masse et éventuellement une unité de température, de mettre les équations générales et l'ensemble des conditions initiales et des conditions aux frontières, sous forme adimensionnelle. On fait ainsi apparaître naturellement les véritables paramètres de similitude du problème.

Comme il ne s'agit pas de résoudre analytiquement ou même numériquement le problème donné, il est possible d'introduire dès le départ toute la complexité de la réalité et c'est après un examen physique de l'influence des divers paramètres de similitude qu'on a mis en évidence, qu'il est possible d'en réduire éventuellement le nombre.

En appliquant cette méthode j'examinerai successivement du point de vue de la similitude les deux grandes classes de problèmes introduites précédemment.

Similitude des problèmes de la première classe

Prenons d'abord un problème défini par des conditions aux frontières stationnaires c'est-à-dire un problème de la première classe. En toute rigueur ces frontières doivent constituer une surface fermée qui contient tout le fluide en mouvement et dont la forme géométrique est parfaitement définie. Les conditions imposées le long de cette surface frontière sont soit des conditions de contrainte soit des conditions de vitesse mais dans tous les cas elles ne doivent pas dépendre du temps (d'après la définition des problèmes de la première classe).

Cas des écoulements externes

Pour exposer la méthode générale de recherche des conditions de similitude je prendrai d'abord un exemple très simple d'écoulement externe, celui de l'écoulement d'un fluide pesant de masse volumique ρ, de viscosité dynamique μ autour d'une sphère immobile de diamètre D. La vitesse du fluide sur une sphère concentrique à la sphère donnée et de diamètre infiniment grand par rapport à D est supposée égale à une constante $\vec{V}$. Pour ne pas compliquer l'exposé et masquer par là même les idées directrices essentielles, je supposerai que les variations de température et de pression dans le fluide sont négligeables devant la température et la pression moyenne de telle sorte que ρ et μ peuvent être considérées comme des constantes. On sait que pour qu'il en soit ainsi il suffit que la vitesse V soit petite devant la célérité de propagation du son dans le fluide et que la température de la sphère soit maintenue égale à la température du fluide à l'infini.

En prenant un référentiel orthonormé $ox_1x_2x_3$ l'origine 0 étant au centre de la sphère et l'axe ox_1 parallèle à $\vec{V}$, les équations du mouvement du fluide s'écrivent :

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j}\right)=-\frac{\partial p_g}{\partial x_i}+\mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\,\partial x_j}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=0$$

$P_g = p + \rho g Z$ désigne la pression motrice dans laquelle Z désigne la cote d'un point M de coordonnées x_i comptée sur la verticale ascendante et g l'accélération de la pesanteur. Les conditions aux frontières s'écrivent :

$$u_i = 0 \qquad \text{pour } x_i^2 = D^2/4$$

$$u_1 = V, \qquad u_2 = u_3 = 0 \qquad \text{pour } x_i \to \infty$$

Prenons D comme unité de longueur, D/V comme unité de temps et ρD^3 comme unité de masse et affectons de l'indice $+$ les variables et les fonctions adimensionnelles correspondantes, les équations générales et les conditions aux frontières s'écrivent :

$$\frac{\partial u_{i+}}{\partial t_+}+\frac{\partial u_{i+}u_{j+}}{\partial x_{j+}}=-\frac{\partial p_+}{\partial x_{i+}}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 u_{i+}}{\partial x_{j+}\,\partial x_{j+}}$$

$$\frac{\partial u_{i+}}{\partial x_{i+}}=0$$

$u_{i+} = 0$ pour $x_{i+}^2 = 1/4$

$u_{1+} = 1$ $u_{2+} = u_{3+} = 0$ pour $x_{i+} \to \infty$

$\mathrm{Re} = \rho V D/\mu$ désigne le nombre de Reynolds de l'écoulement.

Nous voyons que dans ce problème très simple il apparaît un seul paramètre de similitude : le nombre de Reynolds.

J'ai laissé intentionnellement figurer dans les équations dynamiques le terme $\partial u/\partial t$ bien que les conditions aux frontières soient indépendantes du temps.

En effet l'expérience montre que dès que le nombre de Reynolds est supérieur à 50 l'écoulement n'est plus stationnaire au sens rigoureux du terme car le champ des vitesses, du moins à l'aval de la sphère, dépend du temps. On sait qu'il apparaît à l'aval de la sphère un sillage dans lequel les vitesses fluctuent autour d'une valeur moyenne définie en chaque point et près de la sphère, dans le sillage, l'échelle de ces fluctuations est de l'ordre de grandeur de D. D'après nos définitions cet écoulement externe de la première classe doit donc être considéré comme instationnaire à l'échelle du diamètre D dans le sillage. La résultante générale du système des forces exercées par le fluide sur la sphère a trois composantes F_1, F_2, F_3 suivant les trois axes de références qui sont des fonctions du temps dès que le nombre de Reynolds dépasse 50. D'après la symétrie des conditions aux frontières la moyenne de F_1 est différente de zéro tandis que les moyennes de F_2 et F_3 sont nulles. La structure statistique de l'écoulement c'est-à-dire toutes les grandeurs statistiques caractéristiques de l'écoulement mises sous forme adimensionnelle ne doivent dépendre que du nombre de Reynolds puisque c'est le seul paramètre qui figure dans les équations générales et les conditions définissant le problème d'écoulement étudié. Le nombre $\overline{F_{1+}} = \overline{F_1}/\rho V^2 D^2$ ne doit donc dépendre que du nombre de Reynolds et ce nombre est en fait, à un facteur numérique près, le coefficient de traînée classique de la sphère. Ce premier résultat n'apporte rien de bien nouveau mais on peut aller beaucoup plus loin dans la prévision des conséquences de l'analyse du problème telle que nous l'avons faite.

Introduisons par exemple la fluctuation de la composante F_1 en posant $F_1 = \overline{F_1} + f_1$. Le nombre :

$$f_{1+} = f_1/\rho V^2 D^2$$

ne peut être statistiquement fonction que du nombre de Reynolds et du temps $t_+ = tV/D$. En particulier la variance de f_{1+}, c'est-à-dire $\overline{f_{1+}^2}$, ne dépend que de Re. Si nous introduisons une densité spectrale énergétique $G_1(\omega)$ des fluctuations f_1 c'est-à-dire si nous posons :

$$\overline{f_1^2} = \int_0^\infty G_1(\omega)\, d\omega$$

$\omega = 2\pi n$ désignant la pulsation de fréquence n, la densité spectrale G_{1+} telle que :

$$\frac{\overline{f_1^2}}{\rho V^2 D^2} = \int_0^\infty G_{1+}(\omega_+)\, d\omega_+$$

avec $\omega_+ = \omega D/V$ ne doit dépendre que de ω_+ et de Re. Le nombre $\omega D/V$, appelé nombre de Strouhal, est simplement ici l'expression adimensionnelle de la pulsation ω et ne doit jamais être considéré comme un paramètre de similitude dans un problème défini par les conditions aux frontières stationnaires.

En examinant les équations dynamiques on peut encore prévoir que lorsque le nombre de Reynolds tend vers l'infini, il doit être possible de négliger les forces de viscosité, devant les forces d'inertie et les forces de pression. En effet les dérivées $\partial^2 u_{i+}/\partial x_{j+}\,\partial x_{j+}$ restent partout finies lorsque le nombre de Reynolds augmente indéfiniment et par suite les termes $(1/\mathrm{Re})\,(\partial^2 u_{i+}/\partial x_{j+}\,\partial x_{j+})$ deviennent négligeables devant les autres termes des équations dynamiques. Aux grands nombres de Reynolds $\overline{f_{1+}^2}$ et $G_{1+}(\omega_+)$ ne doivent plus dépendre de Re.

Si la sphère fait partie d'une structure déformable il est manifeste que la connaissance de $\overline{F_{1+}}$, de $\overline{f_{1+}^2}$ et $\overline{f_{2+}^2}$ ainsi que des fonctions spectrales $G_{1+}(\omega_+)$ et $G_{2+}(\omega_+)$ est indispensable pour l'étude du comportement dynamique de la structure.

Dans l'exemple que nous venons de traiter la pression dans le fluide n'intervient que dans le groupement :

$$p_g = p + \rho g Z$$

et elle ne figure pas dans les conditions aux frontières, le problème peut donc être traité entièrement à l'aide de la pression motrice et la pesanteur n'intervient pas. Comme on le sait on dit alors que l'écoulement est en charge. Si par contre on a à étudier un problème de même nature mais dans un écoulement de liquide présentant une surface libre non horizontale le long de laquelle la pression est constante et égale à p_a, il faut introduire parmi les conditions aux frontières une condition de la forme $p = p_a$ le long d'une surface d'équation $Z = f(x_i, t)$. On est donc obligé de conserver séparément dans les équations dynamiques les deux termes $-(\partial p/\partial x_i)$ et $-\rho g(\partial Z/\partial x_i)$ et comme la pression ne figure que dans des dérivées on prendra p_a comme origine des pressions. Dans ces conditions les équations dynamiques mises sous forme adimensionnelle s'écriront :

$$\frac{\partial u_{i+}}{\partial t_+} + \frac{\partial u_{i+}\, u_{j+}}{\partial x_{j+}} = -\frac{\partial p_+}{\partial x_{i+}} - \frac{gD}{V^2}\frac{\partial Z_+}{\partial x_{i+}} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 u_{i+}}{\partial x_{j+}\,\partial x_{j+}}$$

et la condition supplémentaire sur la surface libre se mettra sous la forme $p_+ = 0$ pour $Z_+ = f_+(x_{i+}, t_+)$. Il y a alors deux paramètres de similitude Re et le nombre de Froude $V/\sqrt{gD}$. Une densité spectrale adimensionnelle telle que G_{1+} dépend alors de Re et du nombre de Froude.

Les problèmes de la première classe que nous venons d'étudier à titre d'exemple sont des problèmes d'écoulements externes en ce sens que le fluide coulant autour d'un obstacle peut être considéré comme s'étendant jusqu'à l'infini ou éventuellement peut être limité par une surface libre. Dans de tels problèmes s'il existe une région où l'écoulement est instationnaire, les fluctuations du champ des vitesses s'accompagnent nécessairement de fluctuations de pression qui se propagent dans le fluide car ce dernier n'est jamais rigoureusement incompressible. Mais l'amplitude de ces ondes de pression qui se propagent décroît très vite lorsqu'on s'éloigne de la source et cette amplitude reste toujours au maximum de l'ordre de $\rho u^2/2$ en désignant par u l'amplitude des fluctuations de vitesse. Cette amplitude u étant elle-même au maximum de l'ordre de V on peut négliger la compressibilité du fluide dans un écoulement externe lorsqu'une variation de pression égale à $\rho V^2/2$ entraîne une variation négligeable de la masse volumique et il en est ainsi lorsque le rapport V/c, c désignant la célérité de propagation du son dans le fluide, est petit devant 1.

Lorsque ce rapport n'est plus petit devant 1 une analyse du problème identique à celle que nous avons faite dans le cas simple $\rho = \mathrm{Cte}$ montre qu'il faut introduire des paramètres de similitude supplémentaires qui se réduisent au nombre de Mach, $\mathcal{M} = V/c$ pour un fluide donné et des parois imperméables à la chaleur.

Cas des écoulements internes

Dans ce type d'écoulement le fluide coule entre des parois solides constituant un conduit et s'il s'agit d'un liquide on suppose qu'il n'y a pas de surface libre ou à la rigueur des surfaces libres horizontales dans deux grands réservoirs qui communiquent entre eux par le conduit dans lequel on veut étudier l'écoulement.

Le problème étant de la première classe les parois solides qui limitent l'écoulement sont immobiles ou animées de vitesses indépendantes du temps. Pour raisonner sur un exemple simple, tout à fait analogue à l'exemple que nous avons choisi pour les écoulements externes, nous supposerons que dans un très long conduit cylindrique de section droite circulaire de diamètre D, on pousse le fluide à l'amont à l'aide d'un piston qui est animé d'un mouvement de translation uniforme de vitesse $\vec{V}$ parallèle aux génératrices du conduit. A l'aval le conduit débouche dans l'atmosphère ou dans un très grand réservoir où la pression motrice est constante. Si la vitesse V est petite devant la célérité de propagation du son dans le conduit et si la température des parois est maintenue égale à celle du fluide on admet généralement que la masse volumique du fluide ainsi que la viscosité dynamique peuvent être considérées comme des constantes. Dans cette hypothèse il est inutile d'écrire à nouveau les équations dynamiques et les conditions aux frontières qui définissent ce problème car, en prenant les mêmes unités fondamentales, on aboutit à des équations et à des conditions aux frontières qui, mises sous forme adimensionnelle, ne font apparaître qu'un paramètre de similitude : le nombre de Reynolds $\mathrm{Re} = VD/\nu$. L'expérience confirme pleinement cette prévision lorsque le conduit est parfaitement cylindrique sur toute sa longueur. Aux grands nombres de Reynolds le champ des vitesses dépend du temps mais l'échelle des fluctuations est petite devant les dimensions du conduit et par conséquent l'écoulement doit être considéré comme turbulent stationnaire. Mais si dans certaines régions du conduit l'écoulement est instationnaire à l'échelle du diamètre D l'expérience montre que le nombre de Reynolds n'est souvent plus le seul paramètre de similitude et qu'il faut faire intervenir la compressibilité du fluide c'est-à-dire un nombre de Mach, bien que la vitesse de l'écoulement soit partout très petite devant la célérité de propagation des ondes.

Pour que l'écoulement soit instationnaire dans une région donnée du conduit, il faut que dans cette région l'écoulement fluctue à l'échelle des dimensions du conduit. De telles fluctuations s'observent aux grands nombres de Reynolds toutes les fois que la section du conduit s'élargit ou que la direction de l'écoulement change rapidement. Les portions de conduit correspondantes sont appelées des singularités et la différence de pression Δp entre deux points situés l'un à l'amont l'autre à l'aval de la singularité peut, comme je l'ai montré dans des articles antérieurs [3, 4], être mise sous la forme générale :

$$\Delta p = \mathrm{K}\,\frac{\rho q_v^2}{2\,\mathrm{S}^2} + \frac{\rho}{l}\,\frac{dkq_v}{dt}$$

q_v désignant le débit en volume au droit de la singularité, S et l une surface et une longueur de référence.

K et k sont des nombres fonctions aléatoires du temps aux grands nombres de Reynolds.

Lorsque les conditions aux frontières sont rigoureusement stationnaires mais que le conduit présente au moins une singularité, les fluctuations de K et k entraînent nécessairement des fluctuations de pression et de débit qui se propagent sous forme d'ondes planes, se réfléchissent sur les discontinuités de section ou de direction du conduit et par conséquent peuvent exciter éventuellement un système d'ondes stationnaires.

Ces phénomènes que j'avais signalés en 1945 [5] et dont j'ai étudié quelques conséquences dans des publications plus récentes [6, 7], ont dernièrement fait l'objet d'un travail expérimental et théorique très important de Henry dans le cas où la singularité est constituée par un diaphragme en mince paroi noyé dans un conduit de section circulaire. Les résultats déjà publiés par Henry [8, 9, 10] montrent d'une façon certaine:

— que les fluctuations de pression observées ont bien le caractère d'ondes acoustiques et non pas de fluctuations turbulentes de pression;

— qu'aux grands nombres de Reynolds les fluctuations de K et k sont parfaitement aléatoires en ce sens que leur densité spectrale décroît régulièrement depuis un maximum observé au voisinage de la fréquence nulle pour s'annuler au-delà d'une fréquence correspondant à une valeur de la pulsation adimensionnelle $\omega \mathrm{D}/\mathrm{V}$ qui dépend de la configuration géométrique de la singularité et dans certains cas du nombre de Reynolds;

— que ces fluctuations purement aléatoires dont le spectre ne présente aucune raie peuvent exciter un phénomène de résonance de la tuyauterie si la densité spectrale du phénomène aléatoire est différente de zéro pour une fréquence propre n de l'installation. Lorsqu'il en est ainsi le spectre des fluctuations de pression enregistrées en un point du conduit, présente des raies qui correspondent aux fréquences propres de l'installation et l'amplitude des maximum de densité spectrale correspondants est d'autant plus grande que le nombre de Mach de l'écoulement dans le conduit est plus petit. Lorsque cette amplitude est suffisamment grande pour une fréquence propre n de la tuyauterie, les fluctuations de pression enregistrées prennent un aspect purement périodique de fréquence n car le phénomène de résonance masque complètement le phénomène purement aléatoire qui est en fait à l'origine des fluctuations de pression observées.

En dehors du domaine des petits nombres de Reynolds je ne pense pas qu'il existe dans les jets confinés ou les sillage d'obstacles non profilés, des tourbillons alternés de caractère périodique. L'instabilité périodique auto-entretenue par rétroaction des oscillations de l'écoulement sur le détachement des tourbillons qui d'après Naudascher [11] est à l'origine de toutes les grandes oscillations que l'on observe dans les écoulements, ne concerne en fait que le domaine des petits nombres de Reynolds et par conséquent les théories correspondantes ne sont utilisables que pour expliquer le fonctionnement du sifflet ou des anches d'instruments de musique.

Je voudrais remarquer enfin que la plupart des expériences effectuées en vue d'étudier les écoulements instationnaires dans les sillages d'obstacles non profilés ont été faites dans des souffleries c'est-à-dire dans des écoulements internes. Comme en général aucune précaution n'a été prise pour éliminer les phénomènes de résonance de la soufflerie elle-même, je crains que beaucoup de résultats publiés jusqu'ici ne soient difficilement utilisables pour l'étude des problèmes d'aéro et hydroélasticité.

Similitude des problèmes de la deuxième classe

Pour montrer comment s'introduisent de nouveaux paramètres de similitude qui proviennent de l'intéraction entre les mouvements de la structure et l'écoulement du fluide je prendrai un exemple simple d'écoulement externe.

Une lame élastique parallélépipédique de section rectangulaire de côtés a et b et de longueur l, est encastrée à une extrémité et libre à l'autre. Elle est plongée dans un fluide de masse volumique ρ et de viscosité dynamique μ considérées comme des constantes. Ce fluide s'étend à l'infini autour de la structure constituée par la lame et la pièce dans laquelle elle est encastrée qui est supposée immobile. Très loin de la structure le fluide est animé d'une vitesse constante $\vec{\mathrm{V}}$. Pour ne pas compliquer inutilement les équations nous supposerons que $b \ll a$, que $\vec{\mathrm{V}}$ est perpendiculaire à la face de la lame de dimensions a et l et que la lame ne subit que des déformations de flexion c'est-à-dire des déplacements pratiquement parallèles à $\vec{\mathrm{V}}$ qui restent dans le domaine élastique.

Prenons un référentiel orthonormé ox_1 parallèle à $\vec{\mathrm{V}}$, ox_2 parallèle au côté de longueur a du rectangle section droite de la lame, ox_3 parallèle à l'arête de longueur l de la lame non déformée, 0 étant situé au centre de la section d'encastrement. Les équations du mouvement du fluide sont identiques aux équations écrites précédemment mais il faut leur ajouter l'équation du mouvement de flexion de la lame qui s'écrit :

$$\mathrm{X}_1 - \mathrm{EI}\,\frac{\partial^4 y_1}{\partial x_3^4} - \rho_s\,\mathrm{S}\,\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} - g\,(\rho_s - \rho)\,\mathrm{S}\,\frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial x_1} = 0$$

X_1 désigne la projection sur ox_1 de la résultante des forces exercées par le fluide sur la lame par unité de longueur de lame; E le module d'Young du matériau qui constitue la lame; I le moment d'inertie de la section de la lame par rapport à l'axe de symétrie de la section parallèle au côté a; $\mathrm{S} = ab$ et ρ_s la masse volumique apparente de la lame c'est-à-dire le quotient de la masse de l'unité de longueur de lame par S; y_1 désigne le déplacement du centre d'inertie de la section droite de la lame d'abscisse x_3 et Z la cote du centre d'inertie de la section droite de la lame d'abscisse x_3, comptée suivant la verticale ascendante.

Pour définir complètement le problème il faut introduire les conditions aux frontières que l'on obtient en écrivant que la vitesse du fluide est égale à $\vec{V}$ à l'infini puis en écrivant que sur la lame il y a continuité des vitesses et des contraintes et enfin que la lame est encastrée pour $x_3 = 0$ et libre pour $x_3 = l$. En prenant a comme unité de longueur, a/V comme unité de temps, ρa^3 comme unité de masse et en affectant de l'indice $+$ les variables et fonctions adimensionnelles correspondantes on obtient le système d'équations et de conditions aux frontières suivant :

$$\frac{\partial u_{i+}}{\partial t_+} + \frac{\partial u_{i+} u_{j+}}{\partial x_{j+}} = -\frac{\partial p_{g+}}{\partial x_{i+}} + \frac{1}{\mathrm{Re}} \frac{\partial^2 u_{i+}}{\partial x_{j+} \partial x_{j+}}$$

$$\frac{\partial u_{j+}}{\partial x_{i+}} = 0$$

$$X_{1+} - \frac{EI}{\rho a^4 V^2} \frac{\partial^4 y_{1+}}{\partial x_{3+}{}^4} - \frac{\rho_s b}{\rho a} \frac{\partial^2 y_{1+}}{\partial t_+{}^2} - \frac{gb}{V^2}\left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1\right)\frac{\partial Z_+}{\partial x_{1+}} = 0$$

$$u_{2+} = u_{3+} = 0, \quad u_{1+} = 1 \quad \text{pour } x_{i+} \to \infty$$

$$x_{1+} = y_{1+} \pm \frac{b}{2a}, \; -\frac{1}{2} \leqslant x_{2+} \leqslant +\frac{1}{2},$$

$$0 \leqslant x_{3+} \leqslant \frac{l}{a} \to u_{2+} = u_{3+} = 0$$

$$u_{1+} = \frac{\partial y_{1+}}{\partial_{t+}}$$

et :

$$\sigma_{ij+} = -p_{g+}\,\delta_{ij} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial u_{i+}}{\partial x_{j+}} + \frac{\partial u_{j+}}{\partial x_{i+}}\right)$$

En appelant C le périmètre de la section droite de la lame et dS l'élément d'arc de ce périmètre nous avons $X_1 = \int_C - \sigma_{1j}\, n j\, dS$ et par suite :

$$X_{1+} = \int_C \left[p_{g+}\,\delta_{1j} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial u_{1+}}{\partial x_{j+}} + \frac{\partial u_{j+}}{\partial x_{1+}}\right)\right] n_j dS_+$$

La condition d'encastrement s'écrit :

$$y_{1+} = 0 \quad \frac{\partial y_{1+}}{\partial x_{3+}} = 0$$

pour $x_{3+} = 0$

et la lame étant libre à son autre extrémité :

$$\frac{\partial^2 y_{1+}}{\partial x_{3+}{}^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^3 y_{1+}}{\partial x_{3+}{}^3} = 0$$

pour $x_{3+} = l/a$ (le moment fléchissant et l'effort tranchant sont nuls pour $x_3 = l$)

Pour une forme géométrique donnée b/a et l/a sont des constantes et l'ensemble des équations et des conditions aux frontières fait apparaître quatre paramètres de similitude Re, $EI/\rho a^4 V^2$, ρ_s/ρ et $gb/V^2\ [(\rho_s/\rho) - 1]$.

Si la lame est homogène et constituée par un matériau de masse volumique ρ_m, on a $\rho_m = \rho_s$ et $I = ab^3/12$ on peut donc dans ce cas remplacer le paramètre de similitude $EI/\rho a^4 V^2$ par $E/\rho V^2$. Mais il peut y avoir intérêt à conserver le paramètre de similitude d'élasticité sous la forme $EI/\rho a^4 V^2$ car lorsque ρ_m/ρ n'est pas trop grand (cas des liquides) on peut par exemple en employant une lame creuse réaliser $\rho_s = \rho$ et dans ce cas il n'y a plus que deux paramètres de similitude Re et $EI/\rho a^4 V^2$ (ceci suppose que le centre d'inertie de la section de la lame creuse coïncide avec le centre d'inertie du rectangle de cotes a et b).

Dans le cas des oscillations de torsion de la lame il est inutile de reprendre les calculs précédents, il suffit dans les paramètres de similitude de remplacer le module d'Young par le module de rigidité $E/2(1 + \sigma)$, σ désignant le coefficient de Poisson du matériau et enfin lorsque le fluide est un liquide présentant une surface libre non horizontale les équations du mouvement du fluide font apparaître le nombre de Froude $V/\sqrt{gb}$ de telle sorte que pour des structures élastiques géométriquement semblables dans tous leurs détails et semblablement disposés par rapport à une vitesse $\vec{V}$ les paramètres de similitude sont dans tous les cas, Re, $E/\rho V^2$, ρ_s/ρ, $V/\sqrt{gb}$, σ et le nombre de Mach lorsque ce dernier approche de 1 ou devient supérieur à 1. Dans le cas d'écoulements internes il faut de plus, comme pour les problèmes de la première classe, ajouter aux paramètres de similitude le nombre de Mach, même si les vitesses de l'écoulement sont partout petites devant la célérité de propagation du son.

Ce résultat final est très décevant car il est facile de constater qu'on ne peut pas obtenir pour un ouvrage réel et un modèle réduit l'égalité simultanée de tous ces paramètres avec les matériaux et les fluides usuels et par conséquent qu'il est impossible de réaliser en toute rigueur la similitude dynamique des écoulements et des mouvements des structures soumises à des forces instationnaires dues à l'écoulement. Fort heureusement l'analyse physique des phénomènes qu'on est amené à faire, comme je l'ai montré, pour dégager les conditions de similitude d'un problème donné, permet presque toujours de réduire le nombre des paramètres de similitude. C'est ainsi que lorsque le nombre de Reynolds est suffisamment grand on peut négliger en général son influence et si le poids apparent d'un élément de structure est lui-même négligeable devant les forces élastiques de rappel qui s'exercent sur cet élément, on peut aussi négliger l'influence du nombre de Froude (sauf évidemment dans le cas d'un écoulement de liquide à surface libre non horizontale). Dans ces conditions les seuls paramètres de similitude à considérer sont $E/\rho V^2$, ρ_s/ρ et σ auxquels il faut ajouter le nombre de Mach lorsque ce dernier approche de 1 et *a fortiori* lorsqu'il dépasse 1 pour les écoulements externes ou lorsque des phénomènes de résonance de la tuyauterie sont à craindre pour les écoulements internes.

Bibliographie

[1] (G.H.) TOEBES. — Flow-induced structural vibrations, *Proc. A.S.C.E.*, vol. 19. No EM6 (December 1965).

[2] (A.) FORTIER. — Ecoulement instationnaires dans les conduits, 13e Congrès A.I.R.H., Kyoto (1969).

[3] (A.) FORTIER. — Sur la mesure des débits au moyen d'appareils déprimogènes, *Informations aérauliques et thermiques* (juin 1964).

[4] (A.) FORTIER. — La mesure des débits pulsatoires au moyen d'appareils déprimogènes, *La Houille Blanche*, n° 5 (1969).

[5] (A.) FORTIER. — Les fluctuations turbulentes de presssion. Congrès national de l'aviation française, Rapport n° 379 (1945).

[6] (A.) FORTIER. — Sur l'instabilité des jets confinés, 8e Journées de l'Hydraulique, Lille (1964).

[7] (A.) FORTIER. — Sur l'influence de l'instabilité des surfaces de discontinuité de vitesse et de la compressibilité du fluide sur les écoulements stationnaires en moyenne, Proc. XIe Congrès de Mécanique Appliquée, Munich (1964).

[8] (R.) HENRY. — *C.R.A.S.*, t. 270, p. 474 (1970).

[9] (R.) HENRY. — *C.R.A.S.*, t. 270, p. 1126 (1970).

[10] (R.) HENRY. — *C.R.A.S.* (février 1971).

[11] (E.) NAUDASCHER. — *Proc. A.S.C.E.*, vol. 93, No HY4 (July 1967).

Discussion

Président : M. LEGENDRE

M. le Président remercie M. FORTIER pour son exposé à la fois clair et précis et pour sa tentative de classification des problèmes qui se posent.

Vous avez dit, observe-t-il, que la plupart des écoulements techniques sont turbulents. Toutefois, lors de la rentrée dans l'atmosphère des fusées spatiales, on a pu observer avec précision, dans de récents essais, la transition du régime laminaire au régime turbulent en mettant en évidence l'influence du nombre de Knudsen, qui est aussi un paramètre de similitude.

Le nombre de Mach intervient d'une façon assez particulière dans les applications aéronautiques relatives au risque de couplage des ondes de choc avec les « ondes de structure »; cela est très gênant pour la prévision du mouvement transonique des avions.

On retrouve des problèmes analogues dans les compresseurs (qui intéressent E.D.F.); ces appareils fonctionnent à des nombres de Mach, en général, modérés mais dans des zones de survitesses locales, la vitesse du son est parfois franchie et l'on voit alors apparaître des « flottements transoniques ».

A l'O.N.E.R.A., signale M. DAT, nous avons l'habitude de faire une distinction analogue à celle proposée par M. le Professeur FORTIER entre les problèmes d'excitation forcée dans lesquels les forces aérodynamiques ne dépendent pas du mouvement des parois et les problèmes d'instabilité dans lesquels les forces aérodynamiques sont déterminées par le mouvement des parois.

M. FORTIER, remarque M. le Président, a distingué deux catégories de phénomènes : d'une part, ceux qui peuvent être prévus sans tenir compte de la viscosité du fluide (flottement des avions), et d'autre part, ceux tels que les « flottements de décrochage » dont l'origine dépend beaucoup de la viscosité.

L'absence de corrélation aux grands nombres de Reynolds entre les fluctuations de l'écoulement et celle des forces agissant sur la structure a été confirmée par les expériences sur le sillage des cheminées effectuées par l'O.N.E.R.A. pour le compte d'E.D.F. à la grande soufflerie de Modane.

La méthode d'étude de la similitude, utilisée par M. FORTIER, dit M. le Président, est celle qu'il applique depuis de nombreuses années et me paraît excellente. Elle repose sur l'hypothèse que l'on connaît — sans toujours savoir les résoudre — les équations fondamentales qui régissent le phénomène; ce sont souvent les équations de Navier, lesquelles dans de nombreux cas, ont été confirmées par l'expérience; mais si l'on considère un écoulement supersonique et une aile mince, il n'est pas évident que les hypothèses de Navier soient satisfaites.

En raison des exigences de l'horaire, M. le Président clôt la discussion en remerciant vivement M. FORTIER de l'avoir si heureusement ouverte et orientée.