

RECHERCHES SUR LA RÉPONSE DE COQUES CYLINDRIQUES A DES EXCITATIONS HYDRODYNAMIQUES

par

par **L. LEVIN**

Docteur ès Sciences
Chef du Département Recherches
de la Société B.V.S.

D. MILAN

Ingénieur Civil des Mines,
Département Recherches
de la Société B.V.S.

et **G. PAYAN**

Ingénieur E.P.
Creusot-Loire, Département nucléaire

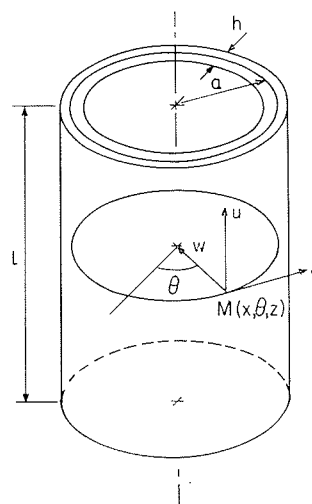
Notations

- l : longueur du cylindre;
 a : rayon du cylindre (surface neutre);
 h : épaisseur du cylindre;
 E : module de Young;
 ν : coefficient de Poisson;
 ρ : masse spécifique du cylindre;
 x
 θ } coordonnées;
 z
 $q(t)$: coordonnée généralisée;
 u
 v } composantes du vecteur déplacement \vec{d} ;
 w
 t : temps;
 n : nombre d'ondes circonférentielles;
 m : nombre de demi-ondes longitudinales;
 ω : fréquence angulaire; $f = \omega/2\pi$;
 \mathcal{L} : opérateur de l'élasticité des coques minces;
 ρ_l : masse spécifique du liquide;
 p : pression exercée par le liquide;
 K_n, M_n^*, Q_n : coefficients généralisés;
 ξ_n : coefficient d'amortissement réduit;
 $W(\omega)$: densité spectrale de puissance;
 $W_p(\omega) = \frac{W_p(0)}{1 + \alpha^2 \omega^2}$ densité spectrale de puissance de la pression d'excitation;
 $W(A, B, \omega)$: densité cospéculaire relative aux points A et B;
 λ_l, λ_c : dimensions longitudinale et circonférentielle du capteur; $L_l = \lambda_l/l$ et $L_c = \lambda_c/a$;
 $w(\chi)$: déformée de la génératrice du cylindre;

A_n : admittance complexe;

INDICES :

- n : relatif au mode n ;
 p : relatif à la pression;
 w : relatif au déplacement radial;
 $\omega_{n \text{ air}}$: pulsation propre du mode n dans l'air;
 $\omega_{n \text{ liquide}}$: pulsation propre du mode n dans le liquide au repos.



1/

Les moyennes dans le temps sont notées par une barre
Les moyennes dans l'espace sont notées par un accent circonflexe
Les dérivées par rapport au temps sont notées par des points.

Introduction

L'écoulement d'un fluide au contact de structures immergées peut provoquer leur mise en vibration. En effet, la turbulence propre et la turbulence née de chaque singularité rencontrée par l'écoulement créent des forces hydrodynamiques fluctuantes. L'étude développée ici a pour objet la détermination, au stade de l'avant projet, des risques de vibrations qui en découlent. Nous avons été conduits pour le calcul des structures du réacteur rapide à sodium liquide Phénix, à étudier le comportement vibratoire de coques cylindriques minces. Notre but étant d'obtenir un niveau vibratoire prévu inférieur à un niveau donné fixé à l'avance, nous avons mis au point, à partir de la théorie des vibrations aléatoires, le calcul de majorants de la réponse. L'étude porte tout d'abord sur la détermination des caractéristiques vibratoires en respiration de coques cylindriques puis sur l'analyse du champ de pression aléatoire agissant sur la surface de la structure et, à partir de là, sur le calcul des caractères statistiques des déformations qui en résultent.

Hypothèses de base

Les hypothèses que nous utiliserons dans cette étude et que nous allons analyser sont les suivantes :

1. la coque cylindrique peut être considérée indépendamment des autres structures;
2. il n'existe aucun couplage élastique entre modes de respiration;
3. il n'existe aucun couplage hydraulique entre modes de respiration;
4. le mouvement vibratoire est régi par une équation linéaire;
5. les caractéristiques vibratoires de la structure sont indépendantes de la vitesse d'écoulement du fluide;
6. la pression excitatrice est une fonction aléatoire du temps, stationnaire et ergodique;
7. la pression excitatrice est indépendante du mouvement de la structure.

HYPOTHÈSE 1. — ISOLATION DE LA STRUCTURE.

Cette hypothèse signifie que la coque ne peut être mise en vibration par d'autres structures vibrant elles-mêmes, soit que ces dernières entrent en contact avec elle, soit qu'elles lui communiquent leur énergie vibratoire par l'intermédiaire d'ondes de pression dans le fluide.

HYPOTHÈSE 2. — COUPLAGE ÉLASTIQUE.

L'absence de couplage élastique entre modes, ou plus exactement de couplage dû à l'amortissement propre de la structure, constitue l'hypothèse de Basile [1]. Cette hypothèse est vérifiée pour tout corps dense, homogène et isotrope. Il faut noter, d'ailleurs, que l'amortissement propre du fluide a pour effet de rendre très faible l'importance

relative d'éventuels couplages. C'est ce que montrent les expériences de Mixson [2] et nos expériences de l'I.N.S.A. sur modèles des structures du réacteur Phénix [3].

HYPOTHÈSE 3. — COUPLAGE HYDRAULIQUE.

Si l'effet du fluide au repos est justement d'isoler les modes, par contre la distribution des vitesses tangentielles de l'écoulement peut introduire un terme de couplage entre modes qui se traduit par un amortissement négatif pouvant aller jusqu'à une auto-oscillation, c'est-à-dire une mise en vibration spontanée de la structure, sans excitation fluctuante [4]. Nous supposons qu'aucun écoulement tangentiel n'existe en moyenne le long de la structure. Dans ce cas, le phénomène d'auto-amplification ne se produit pas.

HYPOTHÈSE 4. — LINÉARITÉ.

Nous supposons que le comportement de la structure reste linéaire. Cette hypothèse est parfaitement licite pour les petits mouvements. Du point de vue hydraulique, la linéarisation est possible car il n'y a pas de décollement des filets fluides [5].

HYPOTHÈSE 5. — INDÉPENDANCE DES CARACTÉRISTIQUES VIBRATOIRES PAR RAPPORT A L'ÉCOULEMENT.

L'effet du fluide se traduit non seulement par des forces d'excitation, mais aussi par des forces de raideur, d'inertie et d'amortissement. Les forces de raideurs peuvent être négligées pour les vitesses d'écoulement habituelles. Les forces d'inertie donnent le terme de « masse virtuelle de fluide ajoutée », caractéristique qui dépend très peu de la vitesse d'écoulement du fluide [6] et que nous supposons totalement indépendant de cette vitesse. Quant à l'amortissement hydraulique, c'est un terme mal connu sur lequel nous allons revenir.

HYPOTHÈSE 6. — STATIONNARITÉ ET ERGODICITÉ DE L'EXCITATION.

Pour la définition de ces termes nous renvoyons à [7]. Nous nous intéresserons à la stationnarité d'ordre 2, qui assure l'existence des densités spectrales et interspectrales de puissance de l'excitation. Des tests permettent de vérifier cette stationnarité à partir des enregistrements de pression.

Quant à l'ergodicité, qui permet, pour un phénomène stationnaire, de définir les densités spectrales et interspectrales, à partir d'enregistrements tirés d'une seule expérience, elle est généralement postulée.

HYPOTHÈSE 7. — INDÉPENDANCE DE L'EXCITATION PAR RAPPORT AUX VIBRATIONS.

Les forces d'excitation sont influencées, en toute rigueur, par le mouvement de la structure. Mais nous voulons vérifier que ce mouvement est faible, aussi nous est-il permis de négliger sa réaction sur l'excitation.

En résumé, ces hypothèses permettent d'isoler chaque mode propre de la structure en lui faisant correspondre une équation linéaire à coefficients constants. De plus, elles autorisent une étude séparée des caractéristiques d'excitation de l'environnement d'une part, et des caractéristiques mécaniques de la structure d'autre part. Les premières peuvent s'envisager sur un modèle réduit hydraulique, dans lequel les structures sont rendues parfaitement immobiles dans la gamme de fréquences d'intérêt. Les secondes peuvent être déterminées sur modèle mécanique des structures immergées dans un fluide au repos. Toutefois, l'amortissement pose certains problèmes.

Caractéristiques vibratoires d'une coque cylindrique mince dans un liquide au repos

Masses et raideurs généralisées.

Les formes vibratoires de respiration sont repérées par deux indices n et m ; n correspond au nombre d'ondes circumférentielles, m au nombre de demi-ondes de la déformée de la génératrice (fig. 2). Pour simplifier l'écriture, nous ne retiendrons que les modes fondamentaux pour lesquels la génératrice se déforme sans nœuds ($m = 1$); nous ne considérons donc que l'indice n . Nous pouvons admettre que dans l'air la structure réelle, non conservative, admet une représentation matricielle dans la base des modes propres et est justiciable de l'hypothèse de Basile; cela signifie que la matrice des amortissements est diagonale en même temps que les matrices des masses et des raideurs généralisées [8]. Lorsque la structure baigne entièrement dans un fluide, l'hypothèse de Basile est vérifiée, et les formes propres sont inchangées. Par ailleurs, les termes d'amortissements restent suffisamment faibles pour ne pas intervenir sur la valeur des fréquences propres. Dans ces conditions, l'essai global de vibrations dans le fluide convient pour déterminer les différents termes des matrices considérées [9]. Toute réponse de la structure s'obtient alors comme superposition des modes propres :

$$\vec{d} = \sum_n \vec{d}_n q_n(t) \quad (1)$$

On peut aussi effectuer le calcul des termes de masses et de raideurs généralisées, quand on connaît les conditions aux extrémités de la coque. On obtient l'équation caractéristique en substituant les expressions des formes propres dans l'équation aux dérivées partielles déterminant le déplacement d'un point de la ligne neutre de l'enveloppe :

$$\mathcal{L} \vec{d} + \rho \frac{1 - \nu^2}{E} \frac{\partial^2 \vec{d}}{\partial t^2} - p n \frac{1 - \nu^2}{Eh} = 0 \quad (2)$$

où \mathcal{L} est l'opérateur de l'élasticité des coques minces (équations de Flügge, de Timoshenko ou de Donnel par exemple [10]). La pression p se calcule à partir de l'équation du potentiel pour l'écoulement du liquide induit par les mouvements de la structure et les conditions de non décollement sur les parois. Pour des coques cylindriques suffisamment longues et minces, quelles que soient les conditions aux extrémités du cylindre, les expressions générales des formes propres sont les suivantes [11] :

$$\vec{d}_n \left\{ \begin{array}{l} u_n = U_n \frac{\partial w(x)}{\partial x} \cos n\theta \\ v_n = V_n w(x) \sin n\theta \\ w_n = w(x) \cos n\theta \end{array} \right. \quad (3)$$

avec : $U_n \# a/n^2$ et $V_n \# 1/n$.

La déformée de la génératrice $w(x)$ est entièrement déterminée par la donnée de quatre conditions aux limites. On peut, pour une première approximation de l'équation caractéristique, prendre pour $w(x)$ la déformée de la poutre ayant les mêmes conditions aux limites que la coque [12]. Coupry a montré que cela n'est rigoureux que pour le cas des extrémités articulées [13]. Si le fluide est parfait et incompressible, le calcul montre que son effet au repos se

traduit uniquement par un terme de masse virtuelle de fluide ajoutée, terme qui dépend des frontières du fluide [14]. Dans tous les cas, il suffit de changer la masse spécifique du matériau de la coque ρ en une masse spécifique apparente ρ_n^* qui dépend de la masse spécifique du liquide ρ_L , des dimensions relatives des structures, et du mode. On a :

$$(\rho_n^*/\rho)^{1/2} = \omega_{n,air} / \omega_{n,liquide} = (M_n^*/M_n)^{1/2} \quad (4)$$

Finalement, l'équation du mouvement, pour les modes de respiration $n \geq 2$, prend la forme :

$$M_n^* \ddot{q}_n + 2 \xi_n M_n^* \dot{q}_n + K_n q_n = 0 \quad (5)$$

avec :

$$M_n^* = \frac{\omega_{n,air}^2}{\omega_{n,liquide}^2} \rho \int_{coque} \vec{d}_n \cdot \vec{d}_n dv$$

et :

$$K_n = \int_{coque} \vec{d}_n \cdot \mathcal{L} \vec{d}_n dv$$

Les q_n sont les coordonnées généralisées du problème.

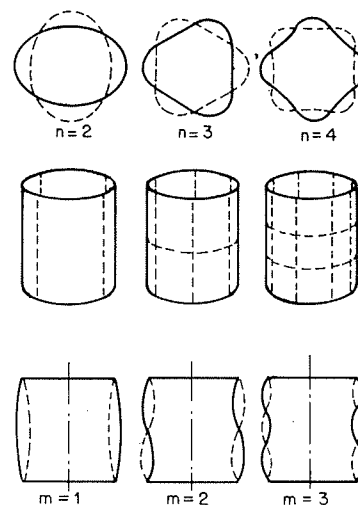
Compte tenu de (3) M_n^* devient :

$$M_n = \pi a l h \frac{\omega_{n,air}^2}{\omega_{n,liquide}^2} \rho \int_0^l \left[\frac{a^2}{n^4} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) w^2(x) \right] \frac{dx}{l}$$

Mécanismes de l'amortissement.

L'amortissement propre de la structure et l'amortissement hydraulique s'ajoutent, pour donner l'amortissement global dont le coefficient réduit est ξ_n .

L'amortissement propre de la structure provient de l'énergie interne développée par les contraintes dans la structure et dissipée au cours du cycle vibratoire. Cette énergie est proportionnelle à l'aire de la boucle d'hystérésis mécanique dans le diagramme contrainte-déformation et dépend de trois facteurs principaux :



2/ Modes de vibration de respiration des cylindres minces.

α) Le facteur de perte du matériau. C'est une grandeur caractéristique de ce dernier, qui intervient seul lorsque la répartition des contraintes est uniforme. C'est l'amortissement interne minimal.

β) Le facteur de perte du spécimen qui dépend de la répartition particulière des contraintes dans le volume de la pièce.

γ) Les facteurs annexes = frottement sec, etc.

Quant à l'amortissement hydraulique, il fait intervenir différents mécanismes : amortissement visqueux, amortissement acoustique par rayonnement des ondes de pression. Le calcul de l'amortissement visqueux en régime laminaire peut s'effectuer en introduisant les contraintes normales et tangentielles d'origine visqueuse [15]. Ce calcul montre que la force d'amortissement correspondante est inversement proportionnelle à la racine carrée du nombre de Reynolds de la vibration.

La détermination générale de l'amortissement hydraulique et l'influence sur celui-ci de la vitesse de l'écoulement nécessitent encore des recherches approfondies. Nous pensons que l'amortissement en régime laminaire du fluide au repos est un minoration de l'amortissement hydraulique réel. Or nous aurons besoin, dans le calcul qui suit, d'un minoration de l'amortissement global. Nous pouvons l'obtenir en ne retenant que les facteurs d'amortissement connus.

Réponse de la structure dans la base des modes propres

Dans le cadre des hypothèses énoncées plus haut, le principe des travaux virtuels donne la force généralisée résultant de la pression $p(x, \theta, t)$. Si la surface d'application de la pression coïncide avec la surface de la coque, il vient :

$$Q_n = \int_0^{2\pi} \int_0^l p \vec{d}_n \cdot \vec{a} \, d\theta \, dx = \int_0^{2\pi} \int_0^l p w_n \, a \, d\theta \, dx \quad (6)$$

D'où l'équation du mouvement vibratoire :

$$\ddot{q}_n + 2 \xi_n \omega_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = \frac{Q_n}{M_n^*} \quad (7)$$

La fonction d'excitation étant stationnaire et ergodique, on peut définir les densités spectrales de puissance de l'excitation et de la réponse. La densité spectrale de puissance du déplacement radial w s'obtient à partir de la transformée de Fourier de l'équation (7) et compte tenu des équations (1) et (3). Son expression se simplifie grâce à l'orthogonalité des modes, si l'on n'en considère que la moyenne sur la surface de la coque. En désignant les moyennes dans l'espace par $\widehat{}$ on obtient la formule de Powell [16] :

$$\widehat{W}_w(w) = \sum_n \widehat{w}_n^2 |A_n|^2 \iint W_p(A, B, \omega) w_n(A) w_n(B) \, d\sigma_A \, d\sigma_B \quad (8)$$

$\widehat{W}_w(\omega)$ est la densité spectrale de puissance du déplacement radial; w_n est la forme propre radiale,

$$w_n = w(x) \cos n\theta$$

A_n est l'admittance complexe :

$$A_n = \frac{1}{M_n^* (\omega_n^2 - \omega^2 + 2i\xi_n \omega_n \omega)} \quad (9)$$

$W_p(A, B, \omega)$ est la densité cospectrale de la pression relative aux points courants A et B.

La densité cospectrale se définit à partir des signaux filtrés mesurant les pressions aux points A et B. Si l'on désigne par $p(t, \omega, \Delta\omega)$ la portion de $p(t)$ filtrée entre ω et $\omega + \Delta\omega$, la densité cospectrale est :

$$W_p(A, B, \omega) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T \Delta \omega} \times \int_0^T p_A(t, \omega, \Delta\omega) p_B(t, \omega, \Delta\omega) \, dt \quad (10)$$

Lorsque $A = B = M$, la densité cospectrale devient la densité spectrale en M. Rappelons que la densité cospectrale est la partie réelle de la densité interspectrale, elle-même transformée de Fourier de la fonction d'intercorrélation.

D'après la formule de Powell, toutes les informations relatives à l'environnement et requises pour le calcul de la structure sont contenues dans la fonction $W_p(A, B, \omega)$. Il est donc nécessaire de déterminer expérimentalement la densité cospectrale pour tout couple de points situés sur la surface de la coque. Pour le calcul analytique de la réponse, on peut essayer d'ajuster aux résultats un modèle mathématique établissant cette densité cospectrale lorsque l'excitation correspond à un phénomène d'ondes planes issues d'une infinité de sources ponctuelles et s'appliquant aux cas des couches limites turbulentes [17]. Sinon un ordinateur puissant est nécessaire. Pour simplifier l'étude, nous avons recherché des majorants de la réponse, beaucoup plus faciles à obtenir et qui, dans bien des cas, pourront suffire à démontrer que le niveau de vibration est acceptable.

Deux remarques nous ont conduits chacune à l'étude d'un tel majorant. Premièrement, il est plus rapide d'obtenir la densité spectrale de puissance que les densités cospectrales. Nous avons donc recherché un majorant de la réponse, tiré de la simple connaissance des densités spectrales. Deuxièmement, lorsqu'on utilise les densités cospectrales de puissance, les dimensions des capteurs limitent la précision des mesures. Nous avons évalué cette précision en recherchant le majorant que l'on peut déduire de l'absence de corrélation entre tous couples de capteurs, même adjacents.

Majorants de la réponse

Principe du calcul.

Nous allons supposer, dans ce paragraphe, que le champ de pression excitatrice est homogène sur la surface du cylindre; cela signifie que la densité cospectrale ne dépend que des différences $(x - x')$ et $(\theta - \theta')$ et non de la valeur précise de (x, θ) . Dans ce cas, la densité spectrale de puissance est indépendante du point de mesure situé sur la coque. De plus, le spectre de turbulence étant assez étalé et décroissant lorsque la fréquence augmente, nous admettrons qu'il peut être représenté par une courbe d'équation :

$$W_p(\omega) = \frac{W_p(0)}{1 + \alpha^2 \omega^2} \quad (11)$$

où $W_p(0)$ et α sont des constantes.

Les deux conditions précédentes sont fréquemment réunies dans la pratique. Nous les avons rencontrées pour l'étude de Phénix.

Notons d'ailleurs que, dans le cas où l'on ne peut faire les hypothèses ci-dessus, on peut toujours prendre pour $W_p(\omega)$ une courbe de la forme (11), qui se place au dessus des différentes courbes de densités spectrales de puissance.

Nous allons grâce à l'inégalité de Schwartz rechercher un majorant de l'intégrale quadruple de la formule (8) :

$$I_n = \iiint W_p(A, B, \omega) w_n(A) w_n(B) d\sigma_A d\sigma_B$$

Majorant de la réponse à partir des densités spectrales de puissance seules : majorant n° 1.

L'inégalité de Schwartz montre que :

$$W_p^2(A, B, \omega) \leq W_p(A, \omega) W_p(B, \omega)$$

or :

$$0 \leq I_n \leq \iiint |W_p(A, B, \omega)| |w_n(A) w_n(B)| d\sigma_A d\sigma_B$$

D'où le majorant de I_n :

$$I_n \leq \iiint |W_p(A, \omega) W_p(B, \omega)|^{1/2} |w_n(A) w_n(B)| d\sigma_A d\sigma_B$$

Finalement, comme $w = w(x) \cos n\theta$ et en posant $\chi = x/L$, il vient :

$$I_n \leq 16 W_p(\omega) \left[\int_0^1 w(\chi) d\chi \right]^2 = A_1 W_p(\omega) \quad (12)$$

où $w(\chi)$ est la déformée de la génératrice du cylindre.

Majorant dans le cas où aucun couple de capteurs n'est corrélié : majorant n° 2.

Un majorant plus fin correspond au cas où les densités cospectrales de tout couple de capteurs placés en des endroits quelconques de la coque sont nulles.

Soit un capteur C_i centré en $M_i(x_i, \theta_i)$, et soient λ_l et λ_c ses dimensions suivant x et θ (fig. 3). Supposons que les densités cospectrales des pressions mesurées par ce capteur et les pressions mesurées par les capteurs $C_{i\theta}$ et $C_{i\theta}$ le jouxtant soient nulles et que les densités cospectrales entre le capteur C_i et tout autre capteur soient nulles également.

Si l'on trace autour du point $M_i(x_i, \theta_i)$, un rectangle R_i centré sur ce point et de côté $2\lambda_c$ et $2\lambda_l$, les densités cospectrales des pressions en M_i et les pressions extérieures au rectangle R_i seront nulles :

si $x \geq x_i \pm \lambda_l$ et $a\theta \geq a\theta_i \pm \lambda_c$:

$$W_p(\theta_i, x_i; \theta, x; \omega) = 0$$

Sur la surface de R_i , d'après l'inégalité de Schwartz :

$$|W_p(\theta_i, x; \theta, x; \omega)| \leq W_p(\theta_i, x_i; \omega)$$

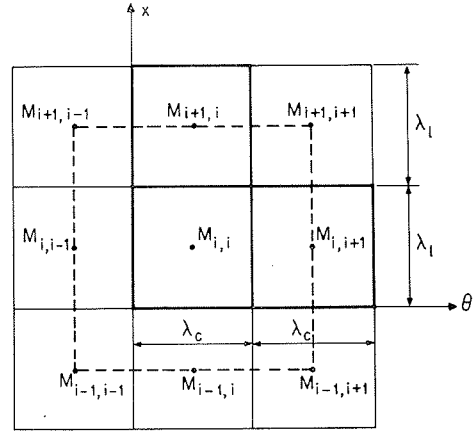
On obtient donc un majorant de I_n en écrivant que :

si $x \leq x_i \pm \lambda_l$ et $a\theta \leq a\theta_i \pm \lambda_c$:

$$|W_p(\theta_i, x_i; \theta, x; \omega)| = W_p(\omega)$$

Soit donc à calculer :

$$I_n = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 |W_p(\theta_i, x_i; \theta, \chi; \omega) \cos n\theta_i \cos n\theta w(\chi)| w(\chi) d\chi_i d\chi_i$$



3/ Position de trois capteurs adjacents.

$$I_n = W_p(\omega) \left[\int_0^{2\pi} \left(\int_{\theta_i}^{\theta_i + \lambda_c/a} |\cos n\theta| d\theta \right) |\cos n\theta_i| d\theta_i \right] \left[\int_0^1 w(\chi_i) \left\{ \int_{\chi_i - \lambda_c/a}^{\chi_i + \lambda_c/a} w(\chi) d\chi \right\} d\chi_i \right]$$

Considérons l'intégrale :

$$I = \int_0^{2\pi} \left(\int_{\theta_i - \lambda_c/a}^{\theta_i + \lambda_c/a} |\cos n\theta| d\theta \right) |\cos n\theta_i| d\theta_i$$

Le théorème de la moyenne appliqué à $|\cos n\theta|$ donne :

$$\int_{\theta_i - \lambda_c/a}^{\theta_i + \lambda_c/a} |\cos n\theta| d\theta = |\cos n\tau| [(\theta_i + \lambda_c/a) - (\theta_i - \lambda_c/a)] = |\cos n\tau| \left(2 \frac{\lambda_c}{a} \right)$$

où $\tau \in (\theta_i + \lambda_c/a, \theta_i - \lambda_c/a)$

Comme $n\lambda_c/a$ est faible (*) $|\cos n\tau| \approx |\cos n\theta_i|$ au deuxième ordre près :

D'où :

$$I \approx 2 \lambda_c/a \int_0^{2\pi} \cos^2 n\theta_i d\theta_i = 2 \pi \lambda_c/a$$

d'où :

$$I_n = 2 \pi \lambda_c \left\{ \int_0^1 w(\chi_i) \left[\int_{\theta_i - \lambda_c/a}^{\theta_i + \lambda_c/a} w(\chi) d\chi \right] d\chi_i \right\} W_p(\omega) = A_2 W_p(\omega) \quad (13)$$

Calcul de l'écart-type du déplacement radial.

Si nous posons d'après (12) et (13), $I_n = A \cdot W_p(\omega)$, où A est indépendant de ω , la méthode des résidus permet d'in-

(*) Nous ne nous intéressons qu'aux premiers modes. De plus $\lambda_c \ll a$.

tégrer (8), dans le domaine des fréquences, pour trouver l'écart-type du déplacement radial :

$$\widehat{\sigma_w^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \widehat{W_w(\omega)} d\omega \quad (14)$$

Il vient, tout calcul fait, pour $\alpha^2 \omega_n^2 \gg 1$:

$$\widehat{\sigma_w^2} = \sum_n AR_n \frac{W_p(\omega_{n \text{ liquide}})(1 + 2\alpha \omega_{n \text{ liquide}} \xi_n) \omega_{n \text{ liquide}}}{n^2 \rho^2 2 \xi_n \omega_{n \text{ air}}^4} \quad (15)$$

avec :

$$R_n = \frac{\int_0^1 w^2(\chi) d\chi}{8\pi^2 \left[\int_0^1 \frac{a^2}{n^4} \left(\frac{\partial w(\chi)}{\partial x} \right)^2 \frac{1}{l^2} + \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) w^2(\chi) d\chi \right]^2}$$

$$A_1 = 16 \left[\int_0^1 w(\chi) d\chi \right]^2$$

pour le majorant n° 1

et :

$$A_2 = \left\{ \int_0^1 w(\chi_i) \left[\int_{\chi_i - L_i}^{\chi_i + L_i} w(\chi) d\chi \right] d\chi_i \right\} 2\pi L_c$$

pour le majorant n° 2

avec :

$$W_p(\omega_n) = \frac{W_p(0)}{1 + \alpha^2 \omega_n^2} \text{ valeur de la densité spectrale pour } \omega = \omega_n ;$$

ω_n pulsation propre dans le liquide du mode n;

ξ_n amortissement généralisé réduit du mode n;

$\omega_{n \text{ air}}$ pulsation propre dans l'air du mode n;

$w(\chi)$ déformée de la génératrice; $\chi = x/l$;

dimension longitudinale du capteur

$$L_l = \lambda_l/l \ll 1 \frac{\text{hauteur du cylindre}}{\text{dimension circonférentielle du capteur}}$$

$$L_c = \lambda_c/a \ll 1 \frac{\text{rayon du cylindre}}{\text{dimension circonférentielle du capteur}}$$

Valeurs des coefficients R_n et A de l'équation (15) pour des conditions aux limites particulières de la coque.

	$w(\chi)$	R_n	A_1 majorant n°1	A_2 majorant n°2
Libre-libre	1	$\frac{1}{8\pi^2 \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^2}$	16	$4\pi L_c L_l$
Articulé-articulé	$\sin \pi \chi$	$\frac{1}{4\pi^2 \left(1 + \frac{n^2(3+2\nu)\lambda^2}{n^2 + \lambda^2}\right)^2}$	$64/\pi^2$	$2\pi L_c L_l$
Articulé-libre	χ	$\frac{3}{8\pi^2 \left(1 + \frac{1}{n^2} + \frac{3a^2}{L^2} \frac{1}{n^4}\right)^2}$	4	$\frac{4}{3}\pi L_c L_l$

Application à une structure du réacteur nucléaire Phénix

Nous avons appliqué cette méthode au réacteur surrégénérateur à neutrons rapides Phénix.

Nous avons effectué l'étude de la stabilité vibratoire des structures soumises à la turbulence de l'écoulement de sodium liquide. Les caractéristiques mécaniques des cuves dans l'air et dans l'eau calme simulant le sodium ont été mesurées au Laboratoire de vibrations de l'Institut national des Sciences Appliquées de Lyon, sur modèles réduits au 1/10. Par ailleurs, des enregistrements de pression effectués sur modèle hydraulique à l'échelle 1/4, en similitude de Froude, nous ont été communiqués par la SOGREAH [18]. Les caractéristiques statistiques des pulsations de pression ont été analysées.

Nous présentons ici les résultats obtenus pour la virole supérieure de la cuve primaire. Il s'agit d'une virole mince limitant intérieurement le sodium liquide de cette cuve, et extérieurement le sodium liquide de l'inter-cuve (fig. 4).

Pour les huit premiers modes de respiration, en air calme, les valeurs mesurées des fréquences propres et les valeurs mesurées des masses généralisées, par la méthode du travail introduit, ont été traduites en valeur prototype grâce aux lois de la similitude de Cauchy. Nous les avons comparées aux valeurs approximatives d'une coque articulée-libre. On en déduit que le redan conique joue, pour cette coque, un rôle voisin d'une articulation. Ceci est confirmé par le fait que les génératrices restent linéaires en cours de vibration. La figure 5 donne les fréquences propres. La figure 7 rassemble les valeurs des masses généralisées dans l'air.

Les valeurs des fréquences propres dans le sodium au repos et les masses généralisées correspondantes données figure 8 sont cohérentes entre elles. Les mesures d'excitation en divers points de la structure correspondent à des courbes de densités spectrales de puissance pratiquement indépendantes du point de mesure et pouvant être décrites, pour le prototype, par la courbe d'équation :

$$W_p(\omega) = \frac{43\,500}{1 + 0,084 \omega^2} \text{ pa}^2/\text{hz}$$

La figure 6 présente les densités spectrales de puissance données par six capteurs et la courbe moyenne d'équation donnée ci-dessus.

A partir de ces résultats, nous avons effectué le calcul des deux majorants de la réponse :

1) Majorant à partir des densités spectrales de puissance seules;

2) Majorant dans le cas où aucun couple de capteurs n'est corrélié.

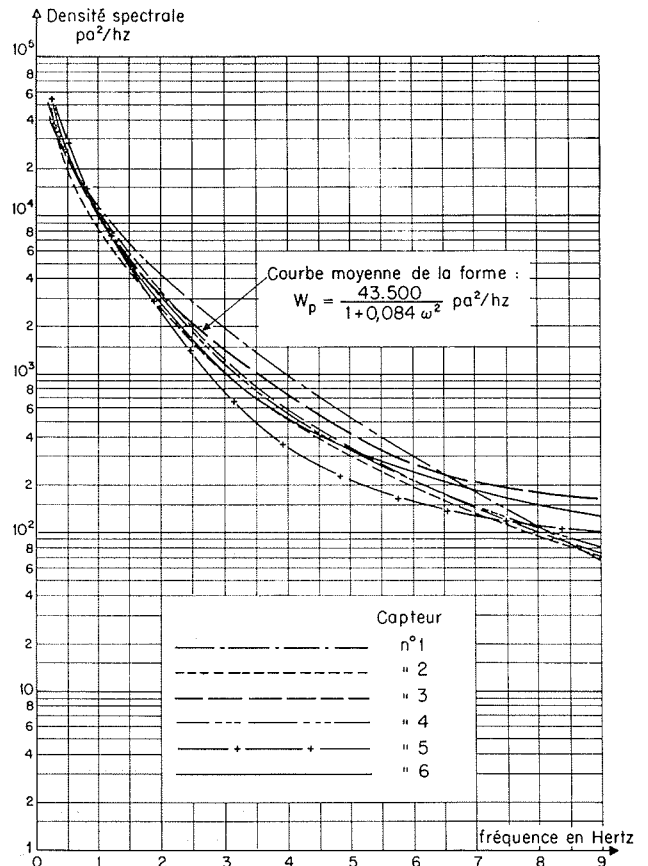
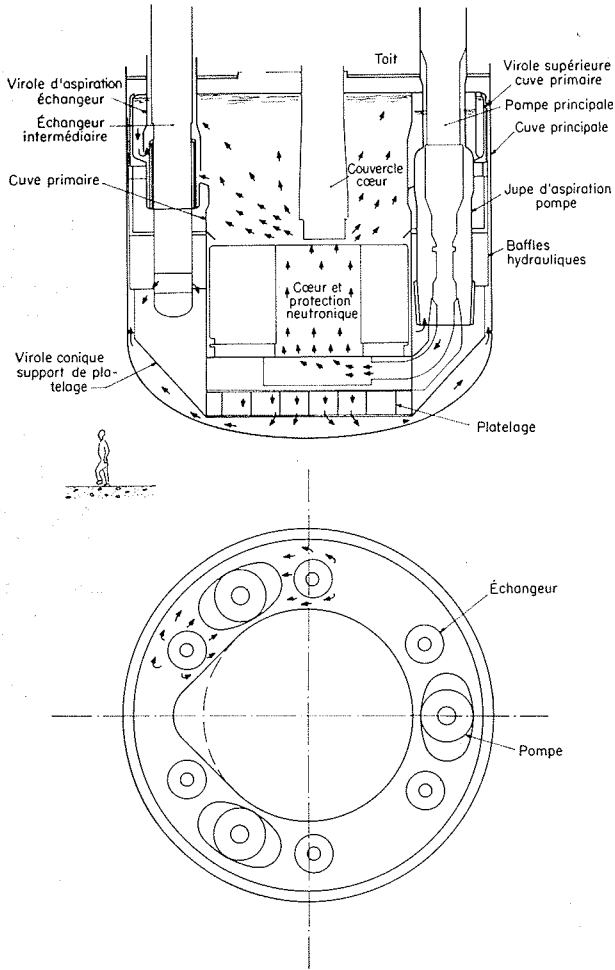
L'écartement minimal des capteurs sur la maquette 1/4 est de 5 cm, ce qui correspond à 20 cm sur le prototype. Nous donnons l'écart type du déplacement radial w de l'extrémité supérieure de la cuve primaire moyennée sur tout le pourtour de cette extrémité.

a) Majorant à partir des densités spectrales de puissance seules :

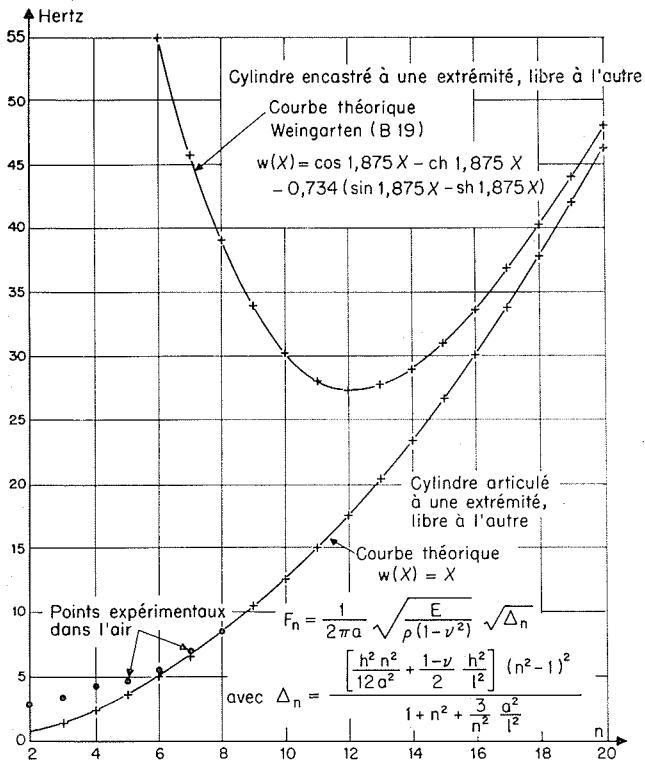
$$\sigma_w = 40 \text{ mm pour un coefficient d'amortissement } 2\xi = 0,8 \%$$

b) Majorant dans le cas où aucun couple de capteurs n'est corrélié :

$$\sigma_w = 2,5 \text{ mm pour un coefficient d'amortissement } 2\xi = 0,8 \%$$



4/



5/

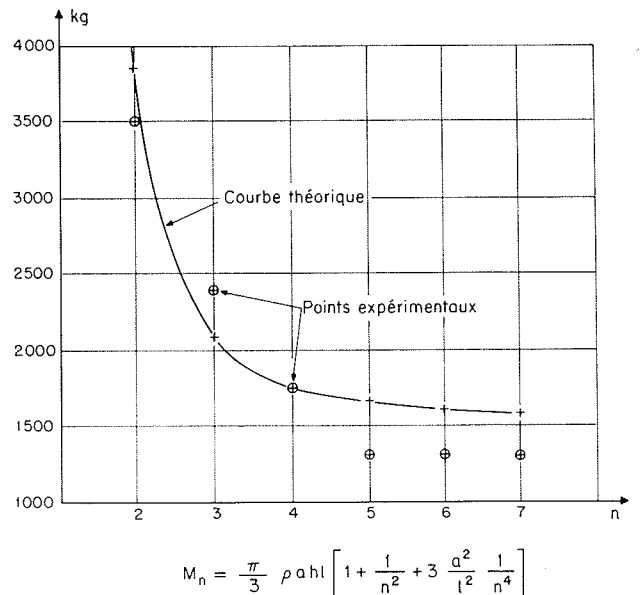
6/

4/ Centrale nucléaire Phénix. Structures du bloc réacteur : écoulement du sodium liquide.

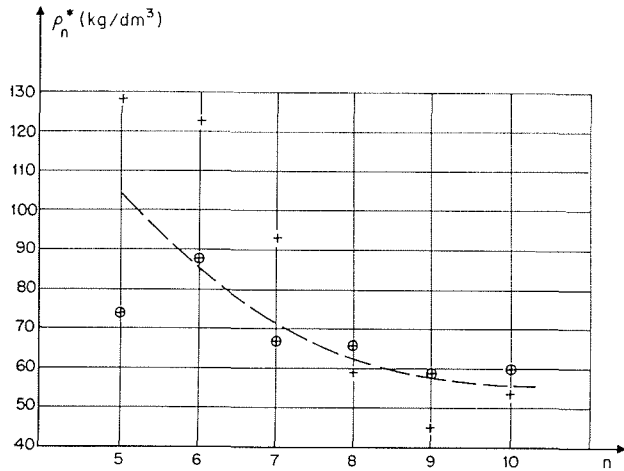
5/ Fréquences propres de respiration de la virole de la cuve primaire dans l'air.

6/ Densité spectrale de puissance de l'excitation hydraulique.

7/ Masse généralisée dans l'air.



7/



+ Valeurs déduites des mesures de fréquences propres dans l'air et en présence de liquide.
 ⊕ Valeurs déduites des mesures de masses généralisées dans l'air et en présence de liquide.

8/ Valeurs de la masse spécifique apparente ρ_n^* (cf. formule 4).

Tableau I

Calcul de la réponse de la virole supérieure de la cuve primaire

$$\text{Formule : } \hat{w}^2 = \sum_n \hat{w}_n^2 = \sum_n \frac{L_c L_l W_p(\omega) \omega_{n\text{liquide}} (1 + 2\alpha \xi_n \omega_{n\text{liquide}})}{4\pi \xi_n h^2 \rho^2 \omega_{n\text{air}}^4 (1 + \alpha^2 \omega_{n\text{liquide}}^2) \left(1 + \frac{1}{n^2} + \frac{3\alpha^2}{l^2} \frac{1}{n^4}\right)^2}$$

Données : $a = 5,7\text{ m}$ | $\rho = 7.800\text{ kg/m}^3$ | $\alpha = 0,29\text{ s}$ | $L_c = 0,2\text{ m}$
 $l = 2,2\text{ m}$ | $W_p(\omega) = 43.500\text{ pa}^2/\text{hz}$ | $2\xi_n = 0,8\%$ | $L_l = 0,2\text{ m}$
 $h = 0,015\text{ m}$

Fréquences propres

n	f _{air} hz	f _{liquide} hz
2	2,95	0,17
3	3,45	0,28
4	4,44	0,45
5	4,83	0,73
6	5,60	0,87
7	6,90	1,26
8	8,40	1,75

Application numérique :

Contribution de chaque mode

n	w _n ² mm ²
2	1,29
3	2,59
4	1,03
5	0,60
6	0,35
7	0,14
8	-

$$\hat{w}^2 = \sum_n \hat{w}_n^2 = 6\text{ mm}^2 \quad \text{d'où} \quad \sigma_w = 2,45\text{ mm}$$

La contribution de chaque mode est donnée sur le tableau 1. La valeur $\pm 3\sigma$ sera atteinte tous les quarts d'heure environ en moyenne. Un déplacement de $\pm 7,5\text{ mm}$ est difficilement acceptable.

En fait les capteurs adjacents sont légèrement corrélés.

Ces calculs de majorants ne permettent donc pas d'affirmer que la virole supérieure de cuve primaire peut être acceptée du point de vue vibratoire. Pour s'en assurer, il aurait fallu préciser la réponse à l'aide d'un modèle mathématique de l'excitation. Nous avons préféré, en particulier, pour des raisons de délai, raidir cette structure par adjonction d'un bord supérieur tombé. Les calculs de majorants effectués sur la structure raidie ont montré que son niveau vibratoire est alors acceptable.

Bibliographie

- [1] BASILE (R.). — Recherche des caractéristiques dynamiques des systèmes continus. *Public. Sc. et Techn. du Ministère de l'Air*, n° 261 (1952).
- [2] MIXSON (J.S.) and HERR (R.W.). — An investigation of the vibration characteristics of pressurized thin walled circular cylinders partly filled with liquid. *N.A.S.A.*, TR. R. 145 (1962).
- [3] LESUEUR (C.). — Caractéristiques vibratoires des structures principales de Phénix. *Rapports I.N.S.A.* (1969-1970).
- [4] CASACCI (S.). — Vibrations amplifiées des coques cylindriques et des coques sphériques baignant dans un fluide en mouvement. *R.F.M.*, n° 15 (1965).
- [5] CRAYA. — Mécanique des milieux continus. Cours de l'Institut Polytechnique de Grenoble (1969).
- [6] GONTKEVITCH (V.S.). — Elastic vibration of shells in a liquid. *A.I.R.H.*, 11^e Congrès, Leningrad (1965).
YEGUIDISSE. — Trainée tourbillonnaire. *Pub. Ac. Sc.*, U.R.S.S., Kiev (1969).
- [7] BENDAT (J.S.) and PIERSOL (A.G.). — Measurement and analysis of random data. *John Wiley & Sons* (1967).
- [8] MAZET (R.). — Mécanique vibratoire. 2^e édition, *Dunod* (1966).
- [9] DEVRIES (G.) et BÉATRIX (C.). — Les procédés généraux de mesure des caractéristiques vibratoires des structures linéaires faiblement amorties. *Progress in Aeronautical Science*, vol. 9 (1968).
- [10] FORSBERG (K.). — A review of analytical methods used to determine the modal characteristics of cylindrical shell. *C.R.* 613, *N.A.S.A.* (1966).
- [11] BILIK (M.). — Vibrations de respiration d'une coque cylindrique mince avec raidisseurs circonférentiels. *Note Technique ONERA*, n° 151. (1969).
- [12] WARBURTON (G.B.) and ARNOLD (R.N.). — Flexural vibrations of thin cylinders. *Institution of Mech. Engr. Proc.* (1953).
- [13] COUPRY (G.). — Sur les vibrations de respiration des coques minces, application aux propulseurs à combustible solide. *ONERA*, Publ. 110 (1964).
- [14] LEROY (J.). — Etude des vibrations de respiration d'un cylindre circulaire mince et homogène partiellement rempli de liquide. *ONERA* (1965).
- [15] MOISEYEV (N.N.) and RUMYANTSEV (V.V.). — Dynamic stability of bodies containing fluid. *Springer Verlag* (1968).
- [16] POWELL (A.). — On the response of structures to random pressures and to jet noise in particular, *Random vibration*, Crandall, tome 1, *Mit Press*, Cambridge, Massachusetts (1964).
- [17] BOURGINE (A.). — Méthode de prévision des vibrations d'une structure linéaire soumise à une excitation aléatoire. *R.F.M.*, n° 28 (1968).
CLINCH (J.M.). — Prediction and measurement of the vibrations induced in thinwalled pipes by the passage of internal turbulent water flow. *J. Sound Vibr.*, 12 (4) (1970).
- [18] LAMBERT et LÉON. — Détermination expérimentale des forces hydrodynamiques fluctuantes dans les cuves du réacteur « Phénix ». Comité Technique, *S.H.F.* (session mars 1971).
- [19] WEINGARTEN (V.I.). — Free vibrations of thin cylindrical shells *A.I.A.A. Journal* (April 1964).