



PERTE DE CHARGE ET TRANSMISSION DE CHALEUR DANS LES CONDUITES CYLINDRIQUES

par **R. LEGENDRE**

Haut Conseiller scientifique à l'ONERA

et **C. CAPELIER**

Chef du Centre de Calcul de l'ONERA

Introduction

Les lois de la turbulence sont si compliquées qu'il n'y a pas d'espoir de les dégager prochainement sans recours à l'empirisme.

L'objectif initial de la présente étude était d'établir une synthèse des diverses lois approchées qui sont utilisées au calcul des écoulements turbulents. Il est en effet décevant de retenir des lois différentes pour étudier une couche limite, la réaccélération d'un sillage, le mélange de deux jets.

L'objectif précité n'a pas pu être atteint et il a été jugé utile de revenir au problème de l'évaluation de la perte

de charge de l'écoulement d'un fluide incompressible dans une conduite cylindrique lisse, qui a été le point de départ de toutes les études de turbulence. Il ne pouvait plus s'agir alors de dégager une loi très générale mais d'interpréter les nombreux résultats expérimentaux en n'introduisant que le nombre minimum de coefficients empiriques.

Il n'est naturellement pas possible d'obtenir un tel résultat en décrivant tous les détails de la transition entre régime laminaire et régime turbulent et les lois simples proposées ne sont que grossièrement valables dans tout le domaine de variation du nombre de Reynolds intéressant la transition.

Rappel du rôle des corrélations entre les composantes de la vitesse

Les coordonnées cylindriques : x suivant l'axe de la conduite, r distance à l'axe de la conduite, θ angle méridien, sont recommandées.

La loi de quantité de mouvement axial peut être écrite :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (u^2)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (ruv)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (uw)}{\partial \theta} - \frac{\nu}{r} \left[\frac{\partial^2 (ru)}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial (ru)}{\partial \theta} \right] = 0$$

où u est la composante axiale de la vitesse; ν la compo-

sante radiale; w la composante tangentielle; p et ρ sont la pression et la masse spécifique; ν est la viscosité cinématique.

La moyenne $\overline{u^2}$ de u^2 est indépendante de x ; la moyenne \overline{uw} de uw est nulle; la moyenne de u est indépendante de x , θ et t et l'équation portant sur les moyennes est :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \overline{uv})}{\partial r} - \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \overline{u}}{\partial r} \right) = 0$$

Elle s'intègre par :

$$\frac{r^2}{2\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + r \overline{uv} - \nu r \frac{\partial \overline{u}}{\partial r} = 0$$

sans constante, car tous les termes sont nuls pour $r = 0$.

La perte de charge $-(\overline{\partial p}/\partial x)$ peut être reliée à la force de frottement par unité de surface pariétale, au rayon intérieur R de la conduite, qui est désigné par ρu_x^2

$$-\frac{\overline{\partial p}}{\partial x} = \frac{2}{R} \rho u_x^2$$

et la relation intégrée devient :

$$\frac{\overline{uv}}{u_x^2} - \frac{\nu}{u_x} \frac{\partial \overline{u}/u_x}{\partial r} = y_x$$

avec : $y_x = r/R$

Il est classique de faire disparaître la constante de l'équation en posant :

$$y_x = 1 - \varepsilon y \quad \varepsilon = \frac{\nu}{R u_x}$$

et l'équation prend la forme:

$$\frac{\overline{uv}}{u_x^2} + \frac{\partial \overline{u}/u_x}{\partial y} = 1 - \varepsilon y$$

Cette dernière expression ne peut être intégrée, pour détermination de la loi de vitesse \overline{u}/u_x en fonction de y , que si une loi définissant \overline{uv} est précisée. Le premier terme du premier membre représente le supplément de perte de charge attribuable à la turbulence, le second terme correspond à l'effet de la viscosité. L'importance relative des deux termes est caractérisée par leur rapport λ et le gradient transversal de la vitesse est alors relié à λ par :

$$\frac{\partial \overline{u}/u_x}{\partial y} = \frac{1 - \varepsilon y}{1 + \lambda} \quad (1)$$

Extrapolation de la loi de Von Karman

La loi de Von Karman, valable dans la zone des forts remous, transitoire entre la zone pariétale et le noyau central est très simplement :

$$\frac{d\lambda}{dy} = k$$

où k est une constante universelle, indépendante en particulier de la nature du fluide.

Cette loi n'est pas extrapolable vers la paroi mais il est facile de la corriger légèrement.

Les composantes de la vitesse u, v, w sont des solutions des équations de Navier-Stokes, régulières et par conséquent susceptibles d'être développées en séries de Taylor en fonction de y , caractérisant la distance à la paroi. Les composantes u et w sont du premier ordre en y et représentées, au second ordre près par : $u_1(x, \theta, t) y$ et $w_1(x, \theta, t) y$. En conséquence, v est, d'après la loi de conservation de la masse, du second ordre en y avec un comportement :

$$\left(-\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial w_1}{\partial \theta} \right) \frac{y^2}{2}$$

Le produit uv est donc du troisième ordre en y :

$$uv \sim \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial u_1^2}{\partial x} - \frac{u_1}{r} \frac{\partial w_1}{\partial \theta} \right) \frac{y^3}{2}$$

mais la valeur moyenne de u^2 est indépendante de x et il n'y a pas de corrélation, par symétrie, entre u_1 et $\partial w_1/\partial \theta$. En conséquence, la moyenne \overline{uv} est de quatrième ordre en y et ceci peut être très correctement exprimé par l'extrapolation ci-après de la loi de Von Karman :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y} = k \left(\frac{\lambda}{1 + \lambda} \right)^{3/4}$$

qui est valable dans le domaine pariétal et dans la zone des forts remous.

Cette loi améliorée n'est pas valable dans le noyau central de la conduite, car $\partial \lambda/\partial y$ doit s'annuler avec $y_x = 1 - \varepsilon y$. Il n'est pas indispensable, spécialement pour l'écoulement turbulent, d'effectuer une correction raffinée, car $\partial u/\partial y$ est de toutes manières faible dans le noyau central et difficilement accessible à la mesure. Il peut suffire d'adopter la loi :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y} = k \left(\frac{\lambda}{1 + \lambda} \right)^{3/4} (1 - \varepsilon y) \quad (2)$$

qui retient le changement de signe essentiel de $\partial \lambda/\partial y$ pour $y_x = 0$.

Loi pariétale

L'équation (2) à variables séparées, est immédiatement intégrable :

$$\begin{aligned} \frac{k}{2\varepsilon} \left[1 - (1 - \varepsilon y)^2 \right] &= \frac{k}{2\varepsilon} (1 - y_x^2) \\ &= \int_0^\lambda \left(\frac{1 + \lambda}{\lambda} \right)^{3/4} d\lambda \end{aligned}$$

l'intégration de l'équation (1) s'en déduit :

$$\frac{k\overline{u}}{u_x} = \int_0^\lambda \left(\frac{1 + \lambda}{\lambda} \right)^{3/4} \frac{d\lambda}{1 + \lambda}$$

et la loi de distribution de vitesse dans la section de la conduite est ainsi définie paramétriquement.

Le changement de variable :

$$\lambda = \frac{t^4}{1 - t^4} \quad (3)$$

rend les intégrales rationnelles et facilement calculables :

$$\begin{aligned} k \frac{\overline{u}}{u_x} &= \ln \frac{1+t}{1-t} + 2 \operatorname{Arctg} t \\ \frac{k}{2\varepsilon} \left[1 - (1 - \varepsilon y)^2 \right] &= \frac{3}{4} k \frac{\overline{u}}{u_x} + \frac{t}{1 - t^4} \end{aligned}$$

La valeur maximale t_0 de t à utiliser ($0 < t < t_0$), est celle qui correspond à $y_x = 0$ à laquelle correspond la valeur maximale de u mais il est plus commode de choisir t_0 pour paramètre et de calculer ε , pour $t = t_0$ et $y_x = 0$, par :

$$\begin{aligned} \frac{k}{2\varepsilon} &= \frac{3}{4} k \frac{\overline{u}_M}{u_x} + \frac{t_0}{1 - t_0^4} \\ k \frac{\overline{u}_M}{u_x} &= \ln \frac{1+t_0}{1-t_0} + 2 \operatorname{Arctg} t_0 \end{aligned}$$

Il est particulièrement intéressant, pour un premier contrôle des lois proposées, d'étudier la variation du gradient de vitesse défini par l'équation (1).

La figure 1 donne l'évolution du gradient de vitesse $d(\bar{u}/u_x)/dy$ en fonction de y_x pour diverses valeurs de t_0 et par suite pour diverses valeurs du nombre de Reynolds.

Les résultats de calcul, établis pour $k = 0,4$, montrent que le gradient suit deux lois très différentes en régime laminaire et en régime turbulent :

— pour les faibles valeurs de t_0 correspondant à de grandes valeurs de ϵ et de faibles valeurs du nombre de Reynolds, l'évolution est parfaitement linéaire;

— pour les valeurs de t_0 voisines de 1, correspondant à des faibles valeurs de ϵ et des nombres de Reynolds très grands, la loi est asymptotique à la loi hyperbolique de Von Karman;

— dans le domaine de transition, correspondant à des nombres de Reynolds compris entre 200 et 10^4 , il a déjà été indiqué qu'une représentation parfaite des résultats expérimentaux n'est pas possible : en effet, cette étude suppose un état d'équilibre parfaitement installé et pour obtenir des résultats expérimentaux correspondants il faudrait effectuer des mesures dans des canalisations de longueur infinie; quoi qu'il en soit, à une correction près sur la graduation en nombre de Reynolds, l'allure de l'évolution des gradients correspond bien aux résultats expérimentaux.

La courbe de distribution des vitesses u/u_x en fonction de y n'est qu'une autre présentation des mêmes résultats.

Cette courbe est représentée sur la figure 2 pour diverses valeurs du nombre de Reynolds; l'échelle semi-logarithmique utilisée met en évidence la loi asymptotique de Von Karman qui peut ici être quelque peu raffinée.

Pour les valeurs de t suffisamment voisines de 1, qui ne sont utiles que pour les petites valeurs de ϵ , on peut écrire :

$$k \frac{\bar{u}}{u_x} \sim \ln \frac{2}{1-t} + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{k}{2\epsilon} (1 - y_x^2) \equiv ky \left(1 - \frac{\epsilon y}{2}\right) \sim \frac{3}{4} k \frac{\bar{u}}{u_x} + \frac{1}{4(1-t)}$$

L'élimination de $1 - t$ fournit la loi asymptotique :

$$k \frac{\bar{u}}{u_x} \sim \frac{\pi}{2} + \ln 8k + \ln \left[y \left(1 - \frac{\epsilon y}{2}\right) - \frac{3}{4} \frac{\bar{u}}{u_x} \right]$$

qui peut être confondue avec la loi logarithmique de Von Karman dès que \bar{u}/u_x est petit auprès de y , $\epsilon y/2$ restant petit auprès de l'unité.

Loi de noyau

Il est intéressant de représenter \bar{u}/u_x en fonction de y_x pour étudier plus commodément la distribution de vitesse dans le noyau.

Il est usuel de retenir la vitesse déficitaire, différence entre la vitesse locale et la vitesse maximale sur l'axe mais celle-ci n'est pas très bien définie expérimentalement et il a été préféré ci-après de retenir la différence entre la vitesse locale et la vitesse moyenne V ou vitesse débitante définie par :

$$V = \int_0^1 u dy_x^2$$

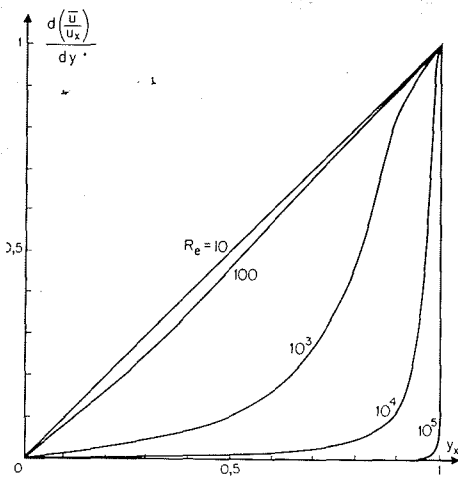
Les expressions établies ci-dessus permettent une intégration complète :

$$\begin{aligned} \frac{V}{u_x} = & \frac{3\epsilon}{4} \left(\frac{\bar{u}_M}{u_x}\right)^2 + \frac{2\epsilon \bar{u}_M}{k u_x} \frac{t_0}{1-t_0^4} \\ & - \frac{2\epsilon}{k^2} \frac{t_0^2}{1-t_0^4} - \frac{\epsilon}{k^2} \ln \frac{1+t_0^2}{1-t_0^2} \end{aligned}$$

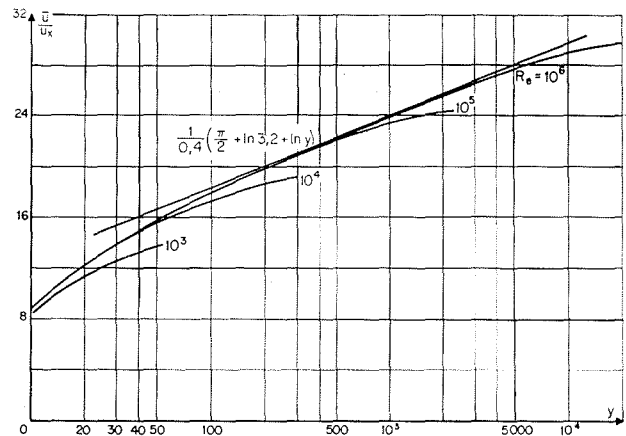
où \bar{u}_M/u_x est lui-même fonction de t_0 :

$$k \frac{\bar{u}_M}{u_x} = \ln \frac{1+t_0}{1-t_0} + 2 \operatorname{Arctg} t_0$$

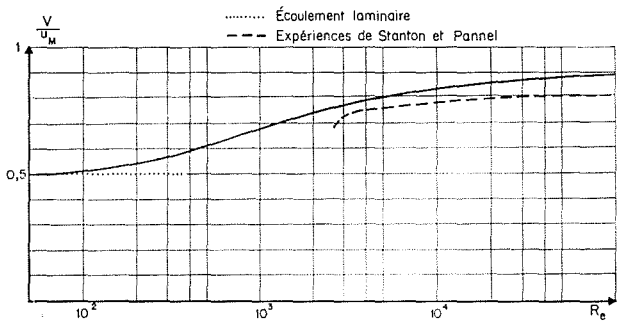
Ces formules permettent de déterminer le rapport V/u_M de la vitesse moyenne à la vitesse sur l'axe. Sur la figure 3,



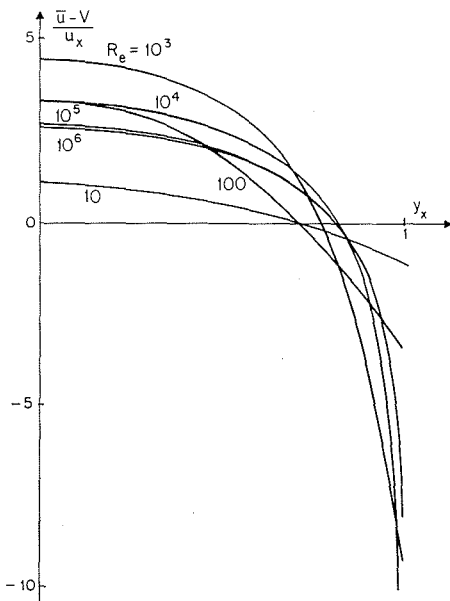
1/ Evolution du gradient de vitesse pour différentes valeurs du nombre de Reynolds.



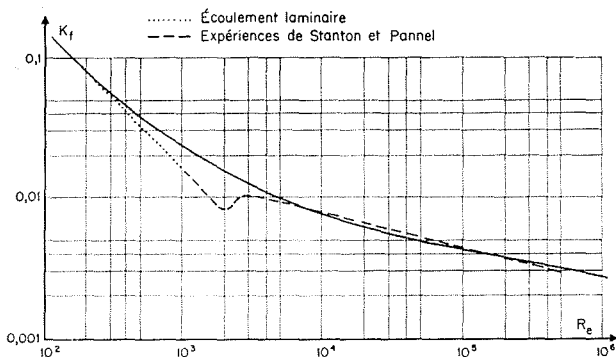
2/ Distribution des vitesses pour différentes valeurs du nombre de Reynolds.



3/ Rapport de la vitesse moyenne à la vitesse sur l'axe en fonction du nombre de Reynolds.



4/ Evolution de $(\bar{u} - V)/u_x$ pour différentes valeurs du nombre de Reynolds.



5/ Evolution du coefficient de perte de charge en fonction du nombre de Reynolds.

la variation de ce rapport en fonction du nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{2 RV}{\nu} = \frac{2}{\epsilon} \frac{V}{u_x}$$

est comparée aux résultats expérimentaux de Stanton et Pannel extraits de la référence [4].

On voit que ce rapport est surévalué, surtout au voisinage de la transition.

La figure 4 représente l'évolution de $(\bar{u} - V)/u_x$ en fonction de y_x pour diverses valeurs du nombre de Reynolds.

Les résultats confirment que, pour les valeurs élevées du nombre de Reynolds, la loi de variation de $(\bar{u} - V)/u_x$ en fonction de y_x est à peu près indépendante de Re , résultat connu, pour la présentation usuelle, sous le nom de loi de vitesse déficitaire.

Perte de charge

Le coefficient de perte de charge K_f compare le frottement pariétal ρu_x^2 à la pression dynamique $\rho V^2/2$:

$$K_f = 2 \frac{u_x^2}{V^2}$$

Ce coefficient est fonction de t_0 et par conséquent de ϵ ou de Re .

La figure 5 compare les résultats du calcul de l'évolution de K_f en fonction de Re aux résultats expérimentaux de Stanton et Pannel extraits de la référence [5].

La comparaison confirme que la transition est beaucoup trop progressive d'après le calcul.

Transmission de chaleur

Pour des écarts de température assez faibles pour que les caractéristiques du fluide ne changent pas sensiblement, la loi de conductibilité de Fourier peut être mise sous la forme :

$$\rho C_p \left[\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial (uT)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (wT) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (wT) \right] = \lambda \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right]$$

où C_p est la chaleur spécifique à pression constante, λ la conductibilité thermique et T la température.

En régime permanent, la moyenne de $\partial T/\partial t$ est nulle.

La variation de température le long de la conduite $\partial \bar{T}/\partial x$ dépend de la distribution des échanges de chaleur. Il suffira ici de considérer le cas où $\partial \bar{T}/\partial x$ est constant et par conséquent $\partial^2 \bar{T}/\partial x^2$ nul, car l'expérience montre que ce cas particulier est suffisamment représentatif du cas général, pourvu que l'apport de chaleur varie assez continûment. Dans ces conditions, en dégagant les moyennes \bar{u} et \bar{T} dans le produit uT :

$$u = \bar{u} + u' \quad T = \bar{T} + T'$$

alors :

$$\frac{\partial (uT)}{\partial x} = \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{u}T')}{\partial x}$$

La moyenne de wT est nulle par symétrie ainsi que la moyenne de $\partial^2 T / \partial \theta^2$.

L'équation sur les moyennes prend donc la forme :

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{v} \bar{T}) = \frac{a}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} \right)$$

où $a = \lambda / \rho C_p$ est la diffusivité thermique.

Elle est intégrable, sans constante, par :

$$r \bar{v} \bar{T} - ar \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \int_0^r \bar{u} dr^2$$

L'écriture du second membre se simplifie si la vitesse moyenne V_r dans le cylindre de rayon r est introduite :

$$Vr = \frac{1}{r^2} \int_0^{r^2} \bar{u} dr^2$$

qui prend la valeur V pour $r = R$ et est quelquefois assimilée à V pour des calculs sommaires, au moins en écoulement turbulent à grand nombre de Reynolds, lorsque \bar{u} ne varie rapidement qu'au voisinage immédiat de la paroi.

Il est en outre commode d'introduire une température de référence :

$$T_x = -\frac{R}{2} \frac{\partial T}{\partial x}$$

ainsi que le nombre de Prandtl, $\mathcal{P} = \nu/a$ pour que la loi moyenne prenne la forme simple :

$$\frac{\bar{v} \bar{T}}{u_x T_x} + \frac{1}{\mathcal{P}} \frac{\partial \bar{T}/T_x}{\partial y} = \frac{V_r}{u_x} (1 - \varepsilon y)$$

Il reste à introduire une loi semi-empirique pour calculer $\bar{v} \bar{T}$ et celle de Reynolds, fondée sur l'analogie des mécanismes de transport de quantité de mouvement et de transfert de chaleur par turbulence convient :

$$\frac{\bar{v} \bar{T}}{u_x T_x \frac{\partial \bar{T}/T_x}{\partial y}} = \frac{\bar{uv}}{u_x^2 \frac{\partial \bar{u}/u_x}{\partial y}} = \lambda$$

La loi moyenne simplifiée devient alors :

$$\frac{\partial \bar{T}/T_x}{\partial y} = \frac{V_r/u_x (1 - \varepsilon y)}{\lambda + 1/\mathcal{P}}$$

qui est immédiatement intégrable puisque le second membre est connu à la constante près T_p , température à la paroi.

La dérivée de \bar{T} par rapport au paramètre t s'écrit :

$$\frac{\partial \bar{T}/T_x}{\partial t} = \frac{4}{k y_x^2 (1 - t^4)^2} \cdot \frac{V_r y_x^2}{u_x} \cdot \frac{1}{\lambda + 1/\mathcal{P}}$$

avec :

$$y_x^2 = 1 - \frac{3\varepsilon u}{2 u_x} - \frac{2\varepsilon t}{k(1-t^4)}$$

$$\frac{u}{u_x} = \frac{1}{k} \left(\ln \frac{1+t}{1-t} + 2 \operatorname{Arctg} t \right)$$

$$\frac{V_r y_x^2}{u_x} = \left[\frac{3\varepsilon}{4} \left(\frac{u}{u_x} \right)^2 + \frac{2\varepsilon}{k} \frac{t}{1-t^4} \left(\frac{u}{u_x} \right) - \frac{2\varepsilon}{k^2} \frac{t^2}{1-t^4} - \frac{\varepsilon}{k^2} \ln \frac{1+t^2}{1-t^2} \right]_t^{t_0}$$

$$\lambda = \frac{t^4}{1-t^4}$$

Une intégration numérique permet donc de déterminer la température \bar{T} en fonction du paramètre t .

On peut définir une température moyenne T_m par :

$$T_m = \int_0^1 \bar{T} dy_x^2$$

Ces formules ne sont pas comparées aux résultats expérimentaux qui sont trop imprécis. Par contre, il est utile de calculer un coefficient de transmission de chaleur et par exemple le nombre de Stanton \mathcal{S} :

$$\mathcal{S} = \frac{-(R/2)(dT/dx)}{T_m - T_p} = \frac{T_x}{T_m - T_p}$$

T_p étant la température à la paroi.

Par une intégration par parties on obtient :

$$\frac{d \ln \mathcal{S}}{dt} = \frac{4}{k(1-t^4)^2} \cdot \frac{V_r y_x^2}{u_x} \cdot \frac{1}{\lambda + (1/\mathcal{P})}$$

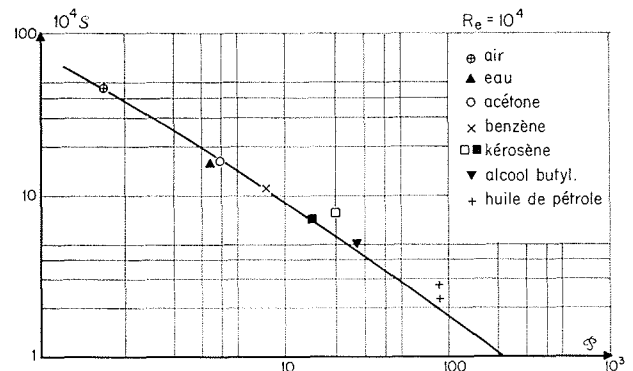
où

$$\frac{V_r y_x^2}{u_x}$$

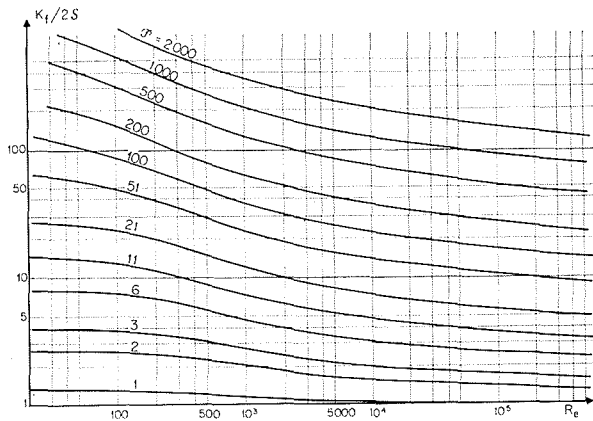
et λ sont des fonctions de t données ci-dessus.

Une intégration numérique permet donc de déterminer le nombre de Stanton pour diverses valeurs de \mathcal{P} et de t_0 , c'est-à-dire pour diverses valeurs de \mathcal{P} et de Re .

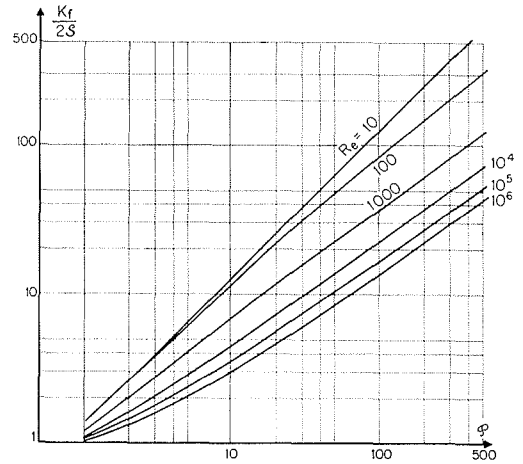
Sur la figure 6 sont comparés les résultats de ce calcul



6/ Comparaison de quelques résultats de mesure du nombre de Stanton avec les résultats de calcul.



7/ Rapport du coefficient de perte de charge au double du nombre de Stanton. Evolution de ce rapport en fonction du nombre de Reynolds pour diverses valeurs du nombre de Prandtl.



8/ Rapport du coefficient de perte de charge au double du nombre de Stanton. Evolution de ce rapport en fonction du nombre de Prandtl pour diverses valeurs du nombre de Reynolds.

aux résultats expérimentaux de Dittus et Boelter extraits de la référence [4].

Les deux dernières figures représentent l'évolution de $K_f/2S$, quotient du coefficient de frottement par le double du nombre de Stanton, en fonction du nombre de Reynolds Re et du nombre de Prandtl \mathcal{P} (ce rapport est voisin de 1 pour $\mathcal{P} = 1$).

Pour la facilité d'examen de Re et de \mathcal{P} , $K_f/2S$ a été porté en fonction de Re sur diverses courbes graduées en fonction de \mathcal{P} (fig. 7) et en fonction de \mathcal{P} sur diverses courbes graduées en fonction de Re (fig. 8).

Conclusions

Les résultats des mesures disponibles intéressant l'écoulement dans les conduites cylindriques lisses peuvent être représentés correctement, au moins dans les régimes laminaire et turbulent par une loi empirique unique n'introdui-

sant pas d'autre coefficient empirique que la constante universelle de Von Karman.

La représentation est toutefois imparfaite dans le domaine de la transition entre les deux régimes dont les effets ne sont traduits que qualitativement.

Références

- [1] LEGENDRE (R.). — Les hypothèses de base de la mécanique des fluides turbulents. *France énergétique*, nos 7 et 8 (juillet-août 1946).
- [2] LEGENDRE (R.). — Distribution des vitesses moyennes pour l'écoulement turbulent dans les conduites cylindriques. *La Houille Blanche*, n° 1 (1948).
- [3] LEGENDRE (R.). — Film turbulent dans les conduites. *La Houille Blanche*, n° spécial A (mai 1950).
- [4] RIBAUD (G.) et BRUN (E.). — La convection forcée de la chaleur en régime d'écoulement turbulent. *Mémorial des Sciences Physiques*, fascicule XLVI (1942).
- [5] REBUFFET (P.). — Aérodynamique expérimentale. *Dunod*, Paris, 3^e édition (1969).

