ONDES PHRÉATIQUES SINUSOÏDALES

par E. DE CAZENOVE

Ingénieur
à la Société Sol-Expert International

Dans un long « essai sur la théorie des eaux courantes » (superficielles), publié en 1877, Boussinesq a signalé dans une note marginale que l'équation différentielle de la chaleur (Fourier, 1811; on dit maintenant: équation de la diffusivité) était applicable aux problèmes d'hydraulique souterraine où intervient la « capacité d'emmagasinement »; il a donné comme exemples la solution générale (qui, croyons-nous, n'a conduit qu'à de rares applications) et une solution particulière: nappe captive communiquant directement avec une mer ou une rivière à marées sinusoïdales.

Boussinesq est revenu sur cette analogie dans ses cours de physique mathématique (1901-1923) surtout consacrés à la conductivité thermique (notamment dans les cristaux anisotropes); mais il n'a donné, sauf erreur, qu'un seul nouvel exemple pratique (application de l'équation différentielle qui porte son nom): courbes de tarissement des sources alimentées par des nappes libres (1904).

Nous étudierons quelques formules dérivées de celle de 1877: nappes captives communiquant avec la mer, avec côté terre une limite imperméable ou une communication avec une réserve à niveau constant; nappes captives s'étendant sous la mer, illimitées ou limitées côté terre ou côté mer; influence de la drainance. Certaines de ces formules peuvent s'écrire de nombreuses façons: nous présentons les formes qui nous paraissent les plus expressives et les plus commodes.

L'utilisation de ces formules permet de préciser le fonctionnement des nappes d'estuaire, qu'il importe de bien élucider notamment lorsqu'il y a des problèmes de protection contre l'envahissement des eaux salées. Autre application: étude des nappes alluviales le long des rivières

ou canaux à variations périodiques (turbines, écluses, irrigations, drainages).

Hypothèses et notations (tableau I)

Voici quelques précisions:

— La couche perméable est supposée homogène (perméabilités dans le sens horizontal et épaisseur constantes) et, pour les formules des tableaux I et II, captive entre deux couches imperméables (on verra plus loin le cas de la drainance).

— Ecoulement laminaire: hypothèse toujours satisfaite en pratique.

— Modules d'élasticité constants dans le temps; en particulier si des gaz sont enfermés dans la couche perméable, il faut que les variations de pression soient négligeables par rapport à la pression absolue moyenne. D'autre part, modules d'élasticité moyens sur une verticale indépendants du lieu.

— Rivage rectiligne. Pour les cas de nappes communiquant avec la mer, rivage parfaitement perméable. Pour les nappes s'étendant sous la mer, il faut que l'inertie du toit de la couche perméable soit négligeable à l'échelle de la « distance de référence » x_0 et des courbures du niveau du terrain entraînées par les variations de pression d'eau.

— Mer à marée sinusoïdale d'amplitude A et de période t_0 constantes.

— x : distance au rivage; $x > 0$ côté terre, < 0 côté mer.

ONDES PHRÉATIQUES DANS LES NAPPES CAPTIVES COMMUNIQUANT AVEC LA MER OU S'ÉTENDANT SOUS LA MER

Marée : Sinusoïdale : $h = A \cdot \sin 2 \cdot \pi \cdot t / t_0$, jusqu'à un rivage vertical rectiligne.

Nappe : Terrain perméable homogène d'épaisseur M , de perméabilité K , de porosité totale n .

Modules d'élasticité $\left\{ \begin{array}{l} \text{cubique de l'eau : } E' \\ \text{vertical du terrain : } E'' \end{array} \right\}$ (eau + terrain) : $E = E' \cdot E'' / (E' + n \cdot E'')$.

Écart du niveau piézométrique de la nappe à la distance x du rivage par rapport au niveau moyen : h

Poids volumique de l'eau : γ_w . Notations : $\alpha_0 = \sqrt{K \cdot E \cdot t_0 / \pi \cdot \gamma_w}$; $a = E' / E''$; $e = 2,718...$

Equations différentielles : Côté terre : $\frac{K \cdot E}{\gamma_w} \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{\partial h}{\partial t} = 0$ } et débit par unité de
côté mer : $\frac{K \cdot E}{\gamma_w} \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{\partial h}{\partial t} = - \frac{2 \cdot \pi \cdot a \cdot A}{t_0} \cdot \cos \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{t_0}$ } longueur parallèlement
au rivage : $q = -K \cdot M \cdot \frac{\partial h}{\partial x}$

Variables réduites : $\tau = \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{t_0}$; $X = \frac{x}{\alpha_0}$; $U = \frac{2 \cdot x}{\alpha_0}$; $\eta = \tau + X$; $\theta = \tau - X$

(a) Nappe illimitée communiquant directement avec la mer

Formule de BOUSSINESQ : $h = A \cdot e^{-X} \cdot \sin \theta$

$$\text{Déphasage : } \varphi_B = \frac{t_0 \cdot X}{2 \cdot \pi} = \frac{t_0 \cdot x}{2 \cdot \pi \cdot \alpha_0}$$

(b) Nappe limitée communiquant directement avec la mer

Formule générale :

$$h = A \cdot e^{-X} (\alpha \cdot \sin \eta + \beta \cdot \cos \eta) + A \cdot e^{-X} [(1-\alpha) \cdot \sin \theta - \beta \cdot \cos \theta]$$

Pour le cas de la figure : $\partial h / \partial x = 0$ pour $x = D$. On trouve : $\alpha = \frac{e^{-U} + \cos U}{2 (ch U + \cos U)}$; $\beta = \frac{-\sin U}{2 (ch U + \cos U)}$

(c) Nappe illimitée s'étendant sous la mer ($x < 0$ côté mer, $x > 0$ côté terre).

Formule de BRILLANT :

Vers les x positifs :

$$h = \frac{a \cdot A}{2} \cdot e^{-X} \cdot \sin \theta$$

Vers les x négatifs :

$$h = a \cdot A \cdot \sin \tau - \frac{a \cdot A}{2} \cdot e^X \cdot \sin \eta$$

(d) Nappe limitée s'étendant sous la mer : Formule générale (Voir croquis c)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } x > 0 : h = a \cdot A \cdot \left[e^X \cdot (\alpha \cdot \sin \eta + \beta \cdot \cos \eta) + e^{-X} \cdot (\gamma \cdot \sin \theta + \delta \cdot \cos \theta) \right] \\ \text{Pour } x < 0 : h = a \cdot A \cdot \left\{ \sin \tau + e^X \cdot \left[(\alpha - \frac{1}{2}) \cdot \sin \eta + \beta \cdot \cos \eta \right] + e^{-X} \cdot \left[(\gamma - \frac{1}{2}) \cdot \sin \theta + \delta \cdot \cos \theta \right] \right\} \end{array} \right.$$

Cas d_1 : Nappe illimitée côté $x < 0$; limite étanche à ($x = +D$) :

$$\alpha = + \frac{e^{-U}}{2} \cdot \cos U ; \quad \beta = - \frac{e^{-U}}{2} \cdot \sin U ; \quad \gamma = \frac{1}{2} ; \quad \delta = 0 .$$

Cas d_2 : Nappe illimitée côté $x > 0$; limite étanche à ($x = -D$) :

$$\alpha = \beta = 0 ; \quad \gamma = \frac{1}{2} - \frac{e^{-U}}{2} \cdot \cos U ; \quad \delta = + \frac{e^{-U}}{2} \cdot \sin U$$

ONDES PHRÉATIQUES SINUSOÏDALES DANS LES NAPPES CAPTIVES COMMUNIQUEMENT AVEC LA MER OU S'ÉTENDANT SOUS LA MER

NOTATIONS : Déphasage : φ . Temps réduit : $\tau = \frac{2\pi \cdot t}{t_0}$. Distance réduite : $X = \frac{x}{x_0}$. Limite éventuelle de la nappe à $x = \pm D$; $U = \frac{2 \cdot D}{x_0} (U > 0)$. Mer : $h = A \cdot \sin \tau$

Cas considéré	Écart h par rapport au niveau moyen	Amplitude phréatique : h_M (niveau variant de $+h_M$ à $-h_M$)	Déphasage par rapport à la marée
(a) BOUSSINESQ (1877)	$h = A \cdot e^{-X} \cdot \sin(\tau - X)$	$h_M = A \cdot e^{-X}$	$\varphi = \varphi_B = \frac{t_0 \cdot X}{2 \cdot \pi}$; pour $x=0$, $\varphi_0=0$
(b) Nappe captive, communiquant avec la mer, limitée à $x = +D$	$\frac{h}{A} = \frac{\begin{cases} \sin \tau \cdot [\operatorname{ch}(U-X) \cdot \cos X + \operatorname{ch} X \cdot \cos(U-X)] \\ -\cos \tau \cdot [\operatorname{sh}(U-X) \cdot \sin X + \operatorname{sh} X \cdot \sin(U-X)] \end{cases}}{\operatorname{ch} U + \cos U}$	$h_M = A \cdot \sqrt{\frac{\operatorname{ch}(U-2 \cdot X) + \cos(U-2 \cdot X)}{\operatorname{ch} U + \cos U}}$ $x = D : h_M = \sqrt{\frac{2}{\operatorname{ch} U + \cos U}}$; $x = 0 : h_M = A$	$\operatorname{tg} \frac{2 \cdot \pi \cdot \varphi}{t_0} = \frac{\operatorname{sh}(U-X) \cdot \sin X + \operatorname{sh} X \cdot \sin(U-X)}{\operatorname{ch}(U-X) \cdot \cos X + \operatorname{ch} X \cdot \cos(U-X)}$ $x = D : \operatorname{tg} \frac{2 \cdot \pi \cdot \varphi}{t_0} = \operatorname{th} \frac{U}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{U}{2}$; $x = 0 : \varphi_0 = 0$
(c) BRILLANT (1965) Nappe captive sous la mer, illimitée	$\begin{aligned} x \geq 0 : h &= \frac{a \cdot A}{2} \cdot e^{-X} \cdot \sin(\tau - X) \\ x \leq 0 : h &= \frac{a \cdot A}{2} \cdot [2 \cdot \sin \tau - e^X \cdot \sin(\tau + X)] \end{aligned}$	$\begin{aligned} x \geq 0 : h_M &= \frac{a \cdot A}{2} \cdot e^{-X} \\ x \leq 0 : h_M &= \frac{a \cdot A}{2} \cdot \sqrt{4 - 4 \cdot e^X \cdot \cos X + e^{2 \cdot X}} \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 0 : \\ h_M = \frac{a \cdot A}{2} \end{array} \right.$	$\begin{aligned} x \geq 0 : \varphi &= \varphi_B = \frac{t_0 \cdot X}{2 \cdot \pi} \\ x = 0 : \varphi_0 &= 0 \\ x \leq 0 : \operatorname{tg} \frac{2 \cdot \pi \cdot \varphi}{t_0} &= \frac{e^X \cdot \sin X}{2 - e^X \cdot \cos X} \end{aligned}$
(d ₁) Nappe captive sous la mer, illimitée sous la mer, limitée à $x = +D$ côté terre.	$\begin{aligned} x \geq 0 : h &= \frac{a \cdot A}{2} \cdot [e^{-X} \cdot \sin(\tau - X) + e^{-U+X} \cdot \sin(\tau - U + X)] \\ x = 0 : h &= \frac{a \cdot A}{2} \cdot [\sin \tau + e^{-U} \cdot \sin(\tau - U)] \\ x \leq 0 : h &= \frac{a \cdot A}{2} \cdot [2 \cdot \sin \tau - e^X \cdot \sin(\tau + X) + e^{-U+X} \cdot \sin(\tau - U + X)] \end{aligned}$	$\begin{aligned} x = +D : h_M &= a \cdot A \cdot e^{-U/2} \\ 0 \leq x \leq D : h_M &= \frac{a \cdot A}{2} \cdot e^{-X} \cdot \sqrt{1 + 2 \cdot e^{-U+2X} \cdot \cos(U-2 \cdot X) + e^{-2 \cdot U+4 \cdot X}} \\ x = 0 : h_M &= \frac{a \cdot A}{2} \cdot \sqrt{1 + 2 \cdot e^{-U} \cdot \cos U + e^{-2 \cdot U}} \\ x \leq 0 : h_M &= \frac{a \cdot A}{2} \cdot \sqrt{4 - 4 \cdot e^X \cdot \cos X + e^{2 \cdot X} + 4 \cdot e^{-U+X} \cdot \cos(U-X) - 2 \cdot e^{-U+2 \cdot X} \cdot \cos U + e^{-2 \cdot U+2 \cdot X}} \end{aligned}$	$\begin{aligned} x = +D : \varphi &= \frac{t_0 \cdot D}{2 \cdot \pi \cdot x_0} \\ 0 \leq x \leq D : \operatorname{tg} \frac{2 \cdot \pi \cdot \varphi}{t_0} &= \frac{e^{-X} \cdot \sin X + e^{-U+X} \cdot \sin(U-X)}{e^{-X} \cdot \cos X + e^{-U+X} \cdot \cos(U-X)} \\ x = 0 : \operatorname{tg} \frac{2 \cdot \pi \cdot \varphi_0}{t_0} &= \frac{e^{-U} \cdot \sin U}{1 + e^{-U} \cdot \cos U} \\ x \leq 0 : \operatorname{tg} \frac{2 \cdot \pi \cdot \varphi}{t_0} &= \frac{e^X \cdot \sin X + e^{-U+X} \cdot \sin(U-X)}{2 - e^X \cdot \cos X + e^{-U+X} \cdot \cos(U-X)} \end{aligned}$
(d ₂) Nappe captive sous la mer, illimitée côté terre, limitée à $x = -D$ côté mer.	$\begin{aligned} x \geq 0 : h &= \frac{a \cdot A}{2} \cdot [e^{-X} \cdot \sin(\tau - X) - e^{-U-X} \cdot \sin(\tau - U - X)] \\ x = 0 : h &= \frac{a \cdot A}{2} \cdot [\sin \tau - e^{-U} \cdot \sin(\tau - U)] \\ x \leq 0 : h &= \frac{a \cdot A}{2} \cdot [2 \cdot \sin \tau - e^X \cdot \sin(\tau + X) - e^{-U-X} \cdot \sin(\tau - U - X)] \end{aligned}$	$\begin{aligned} x \geq 0 : h_M &= \frac{a \cdot A}{2} \cdot e^{-X} \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot e^{-U} \cdot \cos U + e^{-2 \cdot U}} \\ x = 0 : h_M &= \frac{a \cdot A}{2} \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot e^{-U} \cdot \cos U + e^{-2 \cdot U}} \\ -D \leq x \leq 0 : h_M &= \frac{a \cdot A}{2} \cdot \sqrt{4 - 4 \cdot e^X \cdot \cos X + e^{2 \cdot X} - 4 \cdot e^{-U+X} \cdot \cos(U+X) + 2 \cdot e^{-U} \cdot \cos(U+2 \cdot X) + e^{-2 \cdot U+2 \cdot X}} \\ x = -D : h_M &= a \cdot A \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot e^{-U/2} \cdot \cos \frac{U}{2} + e^{-U}} \end{aligned}$	$\begin{aligned} x \geq 0 : \varphi &= \varphi_0 + \varphi_B \\ x = 0 : \operatorname{tg} \frac{2 \cdot \pi \cdot \varphi_0}{t_0} &= -\frac{e^{-U} \cdot \sin U}{1 - e^{-U} \cdot \cos U} \\ -D \leq x \leq 0 : \operatorname{tg} \frac{2 \cdot \pi \cdot \varphi}{t_0} &= \frac{e^X \cdot \sin X - e^{-U+X} \cdot \sin(U+X)}{2 - e^X \cdot \cos X - e^{-U+X} \cdot \cos(U+X)} \\ x = -D : \operatorname{tg} \frac{2 \cdot \pi \cdot \varphi}{t_0} &= -\frac{e^{-U/2} \cdot \sin \frac{U}{2}}{1 - e^{-U/2} \cdot \cos \frac{U}{2}} \end{aligned}$

— x_0 , distance de référence, est homogène aux « rayons d'action apparents » que l'on trouve dans tous les écoulements transitoires étudiés par l'équation de la diffusivité, à ceci près que le temps intervient ici par la période t_0 constante. Autres caractéristiques physiques gouvernant x_0 : la perméabilité dans le sens horizontal K , le module d'élasticité « eau + terrain » E (module d'élasticité vertical lorsqu'on empêche l'expansion latérale de l'eau et du terrain), et enfin le poids volumique de l'eau γ_w . La quantité $(K \cdot E / \gamma_w)$ (unité dans le système S.I.: m²/s) est appelée « diffusivité ».

— φ_B : déphasage dans le cas de la formule de Boussinesq : à la distance x du rivage : $\varphi_B = t_0 x / 2 \pi x_0$.

— τ : temps réduit; X : distance réduite; U : valeur absolue de $(2X)$ à la limite de la nappe.

— h : variation de niveau due à la marée sinusoïdale; h se superpose aux variations de niveau dues à toutes les autres causes possibles (écoulement naturel de la nappe, etc.).

Nappes captives communiquant avec la mer

CAS a : Nappe illimitée (formule de Boussinesq) :

— amplitude phréatique : Ae^{-x/x_0} (A au droit du rivage, 0 à l'infini);

— déphasage : φ_B (nul au rivage, infini à l'infini, proportionnel à la distance au rivage).

Le débit maximal dû à ces ondes sinusoïdales amorties est, par unité de largeur parallèlement au rivage et pour une épaisseur perméable noyée M , à la distance x :

$$q = \pm \frac{\sqrt{2} K M A e^{-x/x_0}}{x_0} = M A e^{-x/x_0} \sqrt{\frac{\gamma_w K}{E} \frac{2 \pi}{t_0}}$$

Soit n la porosité totale : si toute l'eau se déplaçait à la même vitesse horizontale, le déplacement autour de la position moyenne x atteindrait :

$$\pm \frac{\sqrt{2} K t_0 A e^{-x/x_0}}{\pi n x_0} = \frac{A e^{-x/x_0}}{n} \sqrt{\frac{\gamma_w K}{E} \frac{2 \pi}{t_0}}$$

En fait on sait (Danel, 1952) que, dans un sable ou un gravier homogène, la première molécule de traceur va 2,3 fois plus vite que la moyenne; et il n'y a pas de terrain homogène. Suivant les terrains, le brassage de l'eau peut se faire sur des distances dix ou cent fois plus grandes que celles qui résultent de la formule ci-dessus.

CAS b : Limite étanche à ($x = +D$) :

Les figures 1 a et 2 a donnent l'amplitude et le déphasage en fonction de x/x_0 et de D/x_0 : amortissements et déphasages moins rapides que dans le cas de la nappe illimitée. Si la limite s'éloigne de $2x_0$ ($U = 4$) à l'infini (cas de Boussinesq), il n'y a presque rien de changé jusqu'à x_0 .

Nappes captives sous la mer

Soit d'abord une nappe illimitée captive sous la mer. A une distance du rivage grande par rapport à x_0 , l'eau de la nappe ne subit que des déplacements horizontaux négligeables. Deux cas extrêmes :

— Le terrain perméable est très compressible (par exemple sables d'estuaire très lâches) : lorsque le niveau de l'eau monte de A dans la mer, presque tout le supplément de pression au fond du lit se transmet à l'eau interstitielle de la couche perméable, où l'amplitude des variations de hauteur piézométrique est très voisine de A (si les deux eaux ont la même densité; ce sont évidemment les variations de pression qui comptent).

— Soit au contraire un terrain perméable très peu compressible et très poreux (par exemple un karst) : presque tout le supplément de pression sera transmis au rocher qui ne tassera presque pas; les variations du niveau piézométrique seront alors faibles.

L'amplitude phréatique est donc égale à (aA) , avec (a) compris entre 0 et 1, fonction du module d'élasticité cubique de l'eau E' , du module d'élasticité du terrain sans expansion latérale E'' et de la porosité totale n (en supposant que le module d'élasticité des solides — agrégats ou matière rocheuse — est très grand par rapport à E' et E''); on trouve :

$$a = \frac{E'}{E' + nE''} = \frac{E}{E''}$$

avec

$$E = \frac{E'E''}{E' + nE''}$$

E est le module d'élasticité « eau + terrain » déjà défini.

Pour l'eau à 5 °C, 15 °C et 23 °C : $E' = 2,0; 2,1$ et $2,15$ GPa (un gigapascal = 10 000 bars). Retenons le premier chiffre; voici quelques données usuelles :

A la limite, pour des terrains très compressibles, E voisin de E'' et a voisin de 1.

Pour des alluvions moyennement compressibles, à granulométrie serrée :

$E'' = 0,1$ GPa et $n = 40\%$, $E = 0,098$ GPa et $a = 0,98$.

Pour des alluvions assez compactes, à granulométrie étendue :

$E'' = 1$ à 5 GPa, $n = 35\%$

$E = 0,85$ à 2,66 GPa et $a = 0,85$ à 0,53.

Pour des grès compacts ou des alluvions à plusieurs centaines de mètres de profondeur : par exemple

$E'' = 20$ GPa, $n = 5$ à 30 %,

$E = 13,3$ à 5 GPa et $a = 0,66$ à 0,25.

Pour des roches compactes, par exemple :

$E'' = 40$ GPa, $n = 1$ à 20 %,

$E = 33$ à 8 GPa et $a = 0,83$ à 0,20.

Il suffit qu'il y ait un peu d'air occlus dans la couche perméable pour que a baisse beaucoup. Par exemple si 1 % de l'eau est remplacé par de l'air à 2 bars ($2 \cdot 10^{-4}$ GPa) absolus (hauteur piézométrique au-dessus du toit de la couche perméable : 10 m), l'élasticité de l'air compte presque seule, E' devient très voisin de $(2 \cdot 10^{-4} / 0,01 = 0,02$ GPa); a tombe à 0,33 (au lieu de 0,98) pour le premier exemple cité et à 0,0025 (au lieu de 0,20) pour le dernier exemple.

Les hydrogéologues utilisent surtout la « capacité d'em-

/2 a

Cas a, b, b', c, d_3 et d'_3
avec $\rho = 1$
(nappes parfaitement captives):
Déphasages.

2 b/

Cas a, b, b', c, d_3 et d'_3
avec $\rho = 2$: Déphasages.

3 a/
Cas d_1 et d'_1 :
Amplitudes côté terre pour les nappes
parfaitement captives
($\phi = 1$).

/3 b

Cas d_1 et d'_1
pour $\phi = 2$ et $a \neq 1$:
Amplitudes côté terre.

magasinement » S; on a ici : $S = M \cdot \gamma_w / E$, M étant l'épaisseur de la couche perméable.

Voici les formules étudiées pour ce schéma :

CAS c :

Nappe captive illimitée de tous côtés : l'amplitude phréatique sera égale à (aA) à l'infini côté mer, nulle à l'infini côté terre : il n'est pas surprenant de la trouver égale à $aA/2$ au droit du rivage.

Le déphasage est nul au droit du rivage : c'est moins intuitif, mais l'étude des états successifs de la nappe pendant une période montre que c'est logique.

Au droit du rivage, on a donc le même déphasage nul que dans le cas de la formule de Boussinesq et une amplitude réduite dans le rapport de 1 à $(a/2)$; il en sera évidemment de même pour tout le côté terre.

Côté mer, formules plus complexes : l'amplitude passe de $(aA/2)$ au droit de la berge à (aA) à l'infini; le déphasage a une allure de sinussoïde amortie.

CAS d_1 :

Nappe captive limitée à $x = +D$ côté terre, illimitée côté mer : les nouvelles formules se déduisent des précédentes par addition ou multiplication de nouvelles fonctions de τ , U, et X. L'amortissement et le déphasage côté terre sont donnés par les graphiques 3 a et 4 a; ils s'obtiennent de la façon suivante :

/4 a

Cas d_1 et d'_1 avec $\phi = 1$ (nappes parfaitement captives) : Déphasages.

4 b/

Cas d_1 et d'_1
avec $\phi = 2$
et $a \neq 1$: Déphasages

5/

Cas d_2 , d'_1 , d_1 et d'_2 :
Amplitude au droit de la berge.

- on calcule d'abord l'amortissement et le déphasage au droit du rivage (on retrouvera ces fonctions dans le cas d'_2 étudié plus loin; résultats : graphiques 5 et 6);
- l'amplitude à la distance x du rivage est le produit de l'amplitude au droit du rivage par l'amplitude relative dans le cas b (comme on le voit facilement en substituant des exponentielles aux cosinus hyperboliques de la formule b);
- de même le déphasage à la distance x est la somme du déphasage au droit du rivage et du déphasage dans le cas b .

CAS d_2 :

Nappe limitée à $x = -D$ côté mer, illimitée côté terre : certaines des nouvelles fonctions se déduisent des précédentes par de simples changements de signe; d'autres se simplifient, et pour le côté terre il suffit de calculer (graphiques 5 et 6; courbes pour $\rho = 1$) :

- l'amplitude au droit du rivage, inférieure à $aA/2$ pour $U < 1,45$, maximale et égale à $0,53 aA$ pour $U = 2,28$ soit $D = 1,14 x_0$, ensuite très voisine de $aA/2$;
- le déphasage au droit du rivage, qui est négatif jusqu'à $U = \pi$, soit $D = \pi x_0/2$.

A partir de là vers le côté terre, amortissement et déphasage supplémentaires comme en formule de Boussinesq.

Notons que ce cas d_2 est celui des nappes alluviales ou d'estuaire à plan de symétrie : aucun débit ne traverse ce plan et tout se passe comme s'il y avait là une limite étanche.

La formule générale (d) du tableau I permet d'étudier les cas pour lesquels il y aurait deux limites, côté terre et côté mer; cela nécessite la résolution d'un système de quatre équations à quatre inconnues. Mais lorsque l'une ou l'autre des limites est à plus de $\pm 2 x_0$, les résultats obtenus

avec les formules d_1 ou d_2 sont en général bien assez précis jusqu'à $\pm x_0$. Notons seulement les formules les plus simples :

CAS d_3 :

Nappe s'étendant sous la mer, limitée à ($x = +D$) côté terre et à ($x = -D$) côté mer (symétrie par rapport au rivage) :

- pour x positif, la hauteur piézométrique est :

$$h_3 = \frac{a}{2} h_b$$

h_b étant la hauteur obtenue dans le cas b ; donc mêmes déphasages qu'en b et amplitudes multipliées par $a/2$;

- pour x négatif, soit h'_b la fonction obtenue en changeant le signe de X dans la fonction h_b : la hauteur piézométrique est :

$$h'_3 = aA \sin \tau - \frac{a}{2} h'_b$$

Nappes avec limites perméables

Supposons qu'au lieu d'une limite étanche, il y ait :

1. à $+D$ (cas b et d_1) une limite perméable à niveau constant ($h = 0$ quel que soit t), par exemple un étang ou un canal de drainage qui communique parfaitement avec la nappe,

2. ou à $-D$ (cas d_2) une communication imparfaite avec la mer telle que le niveau de la nappe soit :

$$h = aA \sin \frac{2\pi t}{t_0}$$

/6

Cas d_2 , d'_1 , d_1 et d'_2 :
Déphasage au droit de la berge.

Il suffit alors de changer la parité des signes indiqués en caractère gras sur les tableaux I et II pour obtenir les formules relatives à ces cas, que nous appellerons b' , d'_1 et d'_2 . Même transformation pour le cas d_3 qui devient d'_3 (amplitude nulle pour $x = D$; amplitude aA pour $x = -D$). Toutefois les formules pour $x = \pm D$ doivent être recalculées lorsqu'elles ne résultent pas immédiatement des conditions aux limites.

Influence de la drainance

Supposons maintenant que la couche étudiée (perméabilité dans le sens horizontal K , épaisseur M) soit surmontée par une couche de perméabilité dans le sens vertical K' et d'épaisseur M' , surmontée elle-même côté terre d'une réserve à niveau invariable (ou à variations négligeables : marais, ou nappe libre peu influencée par les échanges possibles à travers la couche caractérisée par K' et M') : c'est le schéma de la « drainance », dit aussi de « l'alimentation proportionnelle » (voir par exemple : Marty, 1969).

On trouve ici une nouvelle longueur caractéristique, la plus simple qui puisse se déduire des données :

$$B = \sqrt{MM'K/K'}$$

Soit par exemple, sous un marais de largeur illimitée, une couche perméable non alimentée naturellement, séparée du marais par une couche peu perméable et recoupée par une tranchée drainante exploitée à débit constant ; l'équation de la surface de la nappe sera :

$$h = h_0 e^{-x/B}$$

et la relation entre le débit du fossé et le rabattement h_0 dans ce fossé sera la même que si toute l'eau venait de la distance B . Autrement dit, B est ici un « rayon d'action apparent ».

Dans le cas de la drainance, l'équation différentielle côté terre s'écrit, en notations réduites :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial X^2} - 2 \frac{\partial h}{\partial \tau} = \frac{x_0^2}{B^2} h$$

Pour les ondes phréatiques sinusoïdales, toutes les solutions des cas élémentaires peuvent s'écrire :

$$\frac{h}{A} = \alpha_1 e^{\rho X} \sin\left(\tau + \frac{X}{\rho} - \varphi_1\right) + \alpha_2 e^{-\rho X} \sin\left(\tau - \frac{X}{\rho} - \varphi_2\right)$$

avec :

$$\rho^2 = \sqrt{1 + \frac{x_0^2}{4B^4}} + \frac{x_0^2}{2B^2}, \text{ soit } \rho^2 - \frac{1}{\rho^2} = \frac{x_0^2}{B^2}$$

α_1 , φ_1 , α_2 et φ_2 déterminés par des conditions aux limites.

Les formules des tableaux I et II pour les cas a et b restent donc valables à condition de remplacer X et U :

— par ρX et ρU dans les fonctions hyperboliques et les exponentielles ;

— et par X/ρ et U/ρ dans les fonctions trigonométriques.

Par exemple pour $B = x_0$ (soit $\rho = 1,27$), la formule de Boussinesq (cas a) devient :

$$h = A e^{-1,27x/x_0} \sin\left(\frac{2\pi t}{t_0} - \frac{x}{1,27x_0}\right)$$

d'où des ondes phréatiques encore peu modifiées. Pour $B = 0,5x_0$, soit $\rho = 2,06$, l'influence de la drainance devient considérable. Les figures 1 b et 2 b donnent quelques courbes pour $\rho = 2$, soit $B = 0,517x_0$.

Nappes libres

A la limite, pour B/x_0 tendant vers zéro, ρ tend vers $x_0/B + B^3/2 x_0^3$ et il vient pour le cas a :

$$h \approx A e^{-x/B - B^3 x / 2 x_0^3} \sin \left(\frac{2 \pi t}{t_0} - \frac{2 B x_0^2 x}{2 x_0^4 + B^4} \right)$$

Donc déphasage tendant vers zéro et méridienne tendant vers celle de la drainance en régime stabilisé, au sinus près.

**

Côté mer, l'équation différentielle est :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial X^2} - 2 \frac{\partial h}{\partial \tau} = \frac{x_0^2}{B^2} (h - A \sin \tau) - 2 a A \cos \tau$$

On obtient des solutions valables quel que soit a en écrivant :

$$\frac{h}{A} = \mu \sin(\tau - \nu) + \alpha_3 e^{\rho X} \sin \left(\tau + \frac{X}{\rho} - \varphi_3 \right) + \alpha_4 e^{-\rho X} \sin \left(\tau - \frac{X}{\rho} - \varphi_4 \right)$$

avec :

$$\mu = \sqrt{\frac{x_0^4 + 4 a^2 B^4}{x_0^4 + 4 B^4}}$$

et :

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{1 - a}{\frac{x_0^2}{2 B^2} + \frac{2 a B^2}{x_0^2}}$$

Si a peut être confondu avec l'unité (terrains saturés assez compressibles), $\mu = 1$ et $\nu = 0$, aucune difficulté : le traitement qu'on a appliqué plus haut aux cas a et b est aussi valable pour les cas c et d . D'où les graphiques 1 b à 4 b pour $\rho = 2$ et les graphiques 5 et 6 pour diverses valeurs de ρ .

Si a ne peut être confondu avec l'unité, pour le cas c , le plus simple, on a évidemment $\alpha_1 = \alpha_4 = 0$. D'où :

— côté mer :

$$\frac{h_2}{A} = \mu \sin(\tau - \nu) + \alpha_3 e^{\rho X} \sin \left(\tau + \frac{X}{\rho} - \varphi_3 \right)$$

— côté terre :

$$\frac{h_1}{A} = \alpha_2 e^{-\rho X} \sin \left(\tau - \frac{X}{\rho} - \varphi_2 \right)$$

Pour déterminer les quatre paramètres on dispose de quatre équations : même hauteur et même débit pour $X = 0$ (développer en $\sin \tau$ et $\cos \tau$ et annuler chaque fois les deux facteurs) : résultat : $\alpha_3 = -\mu/2$; $\alpha_2 = \mu/2$; $\varphi_3 = \varphi_2 = \nu$. Donc courbes $h(X)$ pour chaque couple de valeurs de a et de x_0/B .

Pour les cas d_1 ou d_2 (une limite côté terre, ou une côté mer), h_1 contient de plus une fonction en $e^{+\rho X} \dots$ ou h_2 une fonction en $e^{-\rho X} \dots$; donc deux paramètres de plus, et deux équations de plus fournies par les conditions aux limites ; et finalement un système qui nous paraît ne pas pouvoir être explicité.

Pour les applications pratiques, il vaudrait mieux placer un piézomètre au droit du rivage ; on étudierait ensuite séparément les ondes côté terre et côté mer, ce qui serait plus simple — ce sera d'ailleurs indispensable chaque fois que x_0 et B ne seront pas les mêmes de part et d'autre du rivage, cas le plus courant...

Si la variation périodique de niveau h est partout négligeable par rapport à l'épaisseur perméable noyée moyenne M , toutes les formules restent valables à condition de remplacer E/γ_w par M/S , S étant la porosité de drainage (capacité d'emmagasinement).

Dans le cas contraire, c'est l'équation différentielle de Boussinesq (1904) qu'il faut appliquer ; mais nous n'en connaissons pas de solution tabulée utilisable. Qualitativement, on retrouvera la dissymétrie des marées d'estuaire :

- à marée haute, grande hauteur noyée, grande valeur de x_0 , l'onde va vite très loin ;
- à marée basse, x_0 petit, le vidage de la nappe est lent ;
- d'où marée montante rapide, marée descendante lente, longue étale de pleine mer, brève étale de basse mer ; et niveau moyen au-dessus du niveau moyen de la mer (un peu au-dessus si le substratum est très en dessous des basses mers, très au-dessus si le substratum est découvert à marée basse).

Tout ce qui précède, sauf ce qui concerne les nappes parfaitement captives, suppose implicitement que les épaisseurs M (et M') multipliées par les degrés d'anisotropie (racine carrée du quotient de la perméabilité horizontale par la perméabilité verticale de chaque couche) sont négligeables par rapport aux longueurs x_0 (et B). Divers cas pour lesquels cette hypothèse simplificatrice n'est plus admissible ont été étudiés notamment par R. Meyer (1955, à propos de murs de quai) et C. Jain (1969). Nous avons aussi supposé implicitement que, dans le cas de la drainance, la perméabilité verticale K' du toit semi-perméable était négligeable par rapport à la perméabilité verticale de la couche drainante. Ces conditions sont presque toujours réalisées pour les nappes susceptibles d'être exploitées ou drainées.

Fonctionnement théorique des piézomètres

Tout puits ou piézomètre exploité à un débit assez faible pour que la nappe ne soit pas influencée au voisinage peut être caractérisé, dans les conditions usuelles, par :

- une section intérieure Ω ;
- et une relation entre le débit Q et la différence de niveau par rapport à la nappe, H , qu'on peut écrire :

$$Q = KCH$$

K est ici une perméabilité « apparente », fonction du remaniement du terrain, du filtre, etc. ; C , qui a la dimension d'une longueur (et qui est égal au « rayon hydraulique », rayon de la poche sphérique équivalente, multiplié par 4π), est fonction des caractéristiques géométriques de la prise de pression ; pour une longueur L et un diamètre D petits par rapport à l'épaisseur de la nappe (Brillant, 1962) :

$$C = \frac{2 \pi L}{\ln(4 L / e D)}$$

Si le niveau de la nappe varie à vitesse constante, on trouve que le retard du piézomètre est :

$$t_r = \Omega / KC$$

Si les variations de la nappe sont de la forme :

$$h = A \sin(2 \pi t / t_0)$$

E. DE CAZENOVE

le niveau dans le piézomètre sera :

$$h = A \cos \frac{2 \pi \varphi}{t_0} \sin \frac{2 \pi (t - \varphi)}{t_0}$$

avec :

$$\text{déphasage } \varphi = \frac{t_0}{2 \pi} \arctg \frac{2 \pi t_r}{t_0}$$

et amplitude :

$$A \cos \frac{2 \pi \varphi}{t_0} = \frac{A t_0}{\sqrt{t_0^2 + 4 \pi^2 t_r^2}}$$

Par exemple, pour $L = 2$ m, $D = 0,1$ m (soit $C = 4,66$ m), $\Omega = 2 \cdot 10^{-3}$ m² (tube de 50 mm) et $t_0 = 44\,700$ s (marées de l'Atlantique) :

K	t_r	φ	AMPLITUDE
10^{-4} m/s	4 s	4 s	1,000 A
10^{-5} m/s	43 s	43 s	1,000 A
10^{-6} m/s	430 s	429 s	0,998 A
10^{-7} m/s	4 300 s	3 850 s	0,854 A
10^{-8} m/s	43 000 s	10 015 s	0,164 A
10^{-9} m/s	430 000 s	11 058 s	0,016 A

Cas réels

Aucune des hypothèses nécessaires à l'établissement des formules n'est jamais parfaitement satisfaite; voici quelques remarques sur les écarts les plus importants et les moyens d'en tenir compte :

Piézomètres.

D'après les résultats qu'on vient de voir, dans un terrain à $K = 2 \cdot 10^{-6}$ m/s le retard d'un piézomètre courant serait négligeable. Avec un tube de 12 mm, il en serait de même pour $K = 10^{-7}$ m/s : avec $E = 10$ GPa (terrain déjà très compact) et $\gamma_w = 9\,800$ Pa/m (1 tf/m³), cela correspondrait à $x_0 = 38$ m seulement. Il est très rare qu'on se trouve dans des conditions si extrêmes.

Mais tout forage remanie le terrain, et le colmate souvent partiellement; de plus le piézomètre a parfois tendance à se colmater avec le temps, surtout pour les écoulements dans le sens tube-terrain.

Tout piézomètre doit donc être fréquemment vérifié; pour cela le plus simple est d'y déverser un petit volume d'eau en un temps très bref : la décroissance de la surcharge est exponentielle dans les cas courants, et cette surcharge est alors divisée par ($e = 2,718...$) pour tout intervalle de temps égal à t_r . Donc essai très simple, directement interprétable, et qui a l'avantage d'éprouver le piézomètre dans le sens où t_r est généralement le plus élevé.

Mais il y a parfois un inconvénient : les densités de l'eau déversée et de l'eau de la nappe peuvent être trop différentes; il faut alors opérer par pompage (en général à l'émulseur), et mesurer la densité. Cette vérification est indispensable même si plusieurs piézomètres voisins indiquent des niveaux variant de façon analogue : nous avons vu ainsi un piézomètre variant de ± 2 m deux fois par

jour pendant un mois et qui indiquait un niveau trop bas de 0,2 m parce qu'un bouchon de boue très fluide, mais encore thixotrope, surnageait, malgré sa densité de 1,04, au-dessus de l'eau entrant par la prise de pression à chaque marée.

Marées.

Les variations de niveau en fonction du temps dessinent souvent des sinusoïdes très déformées; les décomposer en séries de Fourier donnerait une précision illusoire et il suffit généralement de les assimiler à des sinusoïdes équivalentes :

- niveau moyen calculé par demi-marées, par marées ou sur de plus longues périodes (résultat : généralement 0,01 à 0,03 A au-dessus du niveau médian);
- amplitude : multiplier par π/t_0 la moyenne des surfaces entre la courbe $h(t)$ et le niveau moyen;
- et surtout heures-repères : milieux des intervalles de temps découpés par l'intersection de la droite du niveau moyen avec la courbe des niveaux (fig. 7).

Traitement identique pour les relevés piézométriques; calcul des amortissements et des déphasages par comparaison des sinusoïdes équivalentes à la marée et aux ondes phréatiques. Notons que pour les nappes libres communiquant avec la mer, la pente du rivage d'une part, son colmatage d'autre part, peuvent accentuer l'effet d'estuaire déjà décrit, ou le diminuer : à marée haute l'eau s'infiltre par une plus grande surface, mais la vase est plaquée contre les ouvertures du sol, à marée basse la pente du sol

7/ Marées du 8 janvier 1966 à Tancarville et sinusoïde équivalente.

freine l'écoulement, mais des résurgences peuvent se faire jour à travers la vase.

Pour les ondes encore moins sinusoïdales de certaines rivières (notamment rivières à débits modulés par les turbinages des usines hydroélectriques aux heures de pointe, ou par les éclusages, et certains canaux d'irrigation ou de drainage), même traitement si les piézomètres sont assez éloignés de la berge (relativement à x_0) pour avoir des réactions à peu près sinusoïdales. Autre procédé : on tracera deux sinusoïdes encadrant au mieux la courbe de niveau de la rivière et on cherchera des valeurs de x_0 et B telles que les courbes transformées encadrent de la même façon les courbes de niveau des piézomètres. Pour les piézomètres plus proches, il est parfois préférable d'adapter aux niveaux de la rivière des lois non sinusoïdales (voir par exemple Garnier, 1967; formules résumées par le tableau III). On retrouve ici la notion de « rayon d'action apparent » R; pour x/R petit, on a toujours :

$$h = h_0 (1 - x/R)$$

h_0 étant la variation de niveau à la berge depuis l'origine de la perturbation.

Ces formules du tableau III sont relatives à des nappes illimitées côté terre et communiquant directement avec une rivière, l'équivalent de la formule de Boussinesq. Il reste à établir les formules dérivées. Indiquons seulement les cas les plus simples : pour une nappe captive sous une rivière très large par rapport à R (à l'instant étudié), en cas de montée brusque de la rivière égale à h_0 (cas 2 en bas du tableau III; u est défini en haut du tableau) :

$$\text{Côté terre : } h = \frac{a}{2} h_0 \operatorname{erfc}(\sqrt{u})$$

$$\text{Côté rivière : } h = ah_0 - \frac{a}{2} h_0 \operatorname{erfc}(\sqrt{u})$$

Même traitement lorsque le niveau de la rivière monte à vitesse constante — formule avec $C(u)$ — ou proportionnellement à la racine carrée du temps-formule 3.

Rivages.

Les rivages de marée basse et de marée haute peuvent être assez éloignés; on prendra une ligne moyenne telle que la section hors d'eau à marée basse vers les x négatifs soit égale à la section noyée à marée haute vers les x positifs.

Si la nappe étudiée est surmontée par une nappe libre en communication directe avec la mer, l'intrusion de l'eau dans cette nappe libre agira par son poids sur la nappe profonde : perturbation en général négligeable parce que ce poids est proportionnel à la porosité de drainage S , toujours faible (et d'ailleurs la perturbation dans cette nappe libre s'étendra à une distance moyenne variant comme $1/\sqrt{S}$, et généralement faible).

Le rivage n'est souvent pas rectiligne à l'échelle de x_0 ; nous ne connaissons pas de formule de complication acceptable pour de tels cas. La berge est souvent plus ou moins colmatée, et parfois beaucoup plus dans le sens mer-terrain que dans le sens inverse.

Terrains perméables.

Il n'y a pas de terrain homogène. Cas extrême : pour des alluvions telles que celles de la Seine par exemple, le terrain peut être assimilé à une matrice à perméabilité de l'ordre de 10^{-4} m/s (sables; et galets à interstices remplis de sables) avec des lentilles cent à dix mille fois plus per-

méables (sables grossiers uniformes, graviers et galets sans sable). Si il n'y a qu'un mètre noyé, il n'y a pas partout de lentilles très perméables et la perméabilité moyenne à grande échelle peut être inférieure à $5 \cdot 10^{-4}$ m/s; là où il y a 10 m noyés, chaque verticale recoupe plusieurs lentilles très perméables, l'eau passe facilement d'une lentille à l'autre et la perméabilité moyenne est de l'ordre de $5 \cdot 10^{-3}$ m/s : d'où des transmissivités variant statistiquement à peu près comme le carré de l'épaisseur.

Mais les perturbations étudiées ici agissent à plus grande échelle et souvent plus lentement que lors des essais de pompage; d'où souvent des résultats bien plus cohérents, surtout pour les nappes libres où la variation de la porosité de drainage fausse souvent les essais interprétables en formule de Theis (Cazenove, 1971) ou de Hantush-Brilliant (Brilliant, 1961).

Applications pratiques

Lorsqu'on ignore les débits, il est impossible de déterminer la perméabilité par l'interprétation des ondes phréatiques, qui fournit seulement la diffusivité, KE/γ_w pour les nappes captives, KM/S pour les nappes libres; et, le cas échéant, a et B.

Il faut procéder de proche en proche, en envisageant toujours toutes les hypothèses compatibles avec les données hydrogéologiques. Voici le schéma de ce processus pour les cas les plus simples :

1. Nappes communiquant directement avec la mer.

S'il n'y a qu'un seul piézomètre, ou plusieurs à la même distance du rivage et donnant les mêmes indications, il se peut que déphasage et amortissement conduisent à la même valeur de la diffusivité d'après la formule de Boussinesq, et que la valeur correspondante de x_0 soit petite par rapport à la largeur probable de la nappe; tout paraîtra cohérent et on en déduira : B très supérieur à x_0 . Si au contraire l'amortissement conduit à une valeur de x_0/ρ différente de la valeur de ρx_0 déduite du déphasage, on aura immédiatement ρ , d'où B. Reste à voir si les résultats ainsi obtenus sont plausibles.

S'il y a plusieurs piézomètres à différentes distances du rivage :

— on commencera par étudier les ondes phréatiques au droit du rivage (obtenues directement s'il y a un piézomètre sur place, par extrapolation dans le cas contraire) : cela renseigne seulement sur le colmatage de la berge, et l'effet de la pente de cette berge;

— on étudiera ensuite les amortissements et les déphasages en fonction de la distance au rivage. C'est ici qu'il ne faut pas perdre de vue l'hétérogénéité du terrain. Soit par exemple trois piézomètres à x_1 , x_2 et x_3 de la berge, avec $x_1 < x_2 < x_3$: une diminution anormalement lente de l'amplitude de x_2 à x_3 peut être due tout aussi bien à l'existence d'une limite étanche au-delà de x_3 (ou à une diminution de la diffusivité au-delà de x_3 ou un peu avant) qu'à une valeur de la diffusivité plus forte (ou une drainance plus faible) entre x_2 et x_3 qu'entre x_1 et x_2 . Inversement, si l'amplitude décroît anormalement vite de x_2 à x_3 , ce peut être dû à une limite perméable ou à un accroissement de la diffusivité au-delà de x_3 , à une diffusivité plus faible entre x_2 et x_3 qu'entre x_1 et x_2 ou enfin à l'influence de la drainance. Et enfin si tous les piézomètres suivent de près la loi de Boussinesq, ce peut être parce que l'influence de la drainance compense l'influence des variations

Tableau III

NIVEAU À L'EXUTOIRE VARIANT À VITESSE V CONSTANTE DEPUIS ($t = 0$).

de diffusivité. L'interprétation des essais de pompage conduit d'ailleurs souvent aux mêmes ambiguïtés (R. Plegat, 1969).

Il arrive certes que l'étude des déphasages permette de resserrer l'éventail des hypothèses plausibles. Mais conclure en proposant une diffusivité à $\pm 20\%$ près et en négligeant la drainance et l'hétérogénéité n'est généralement admissible qu'en cas d'étude sommaire; une étude fouillée devra s'appuyer sur la comparaison des courbes expérimentales (amplitude et déphasage en fonction de la distance à la berge) et d'une famille de courbes théoriques calculées pour terrains homogènes avec diverses limites et diverses valeurs plausibles des longueurs B et x_0 ; puis estimation des hétérogénéités possibles

2. Nappes s'étendant sous la mer.

Nous n'avons pas eu l'occasion d'étudier des réactions de piézomètres en mer. Lorsqu'il y a seulement des piézomètres côté terre et sur le rivage, l'interprétation se fait en deux temps :

- étude de l'amortissement et du déphasage côté terre depuis le rivage, comme ci-dessus;
- essai d'évaluation de a en fonction des observations au droit du rivage.

Conclusions

Dans les cas courants d'études de nappes, un essai de pompage à grande échelle fournit des données infiniment plus précises que vingt essais « ponctuels » (essais type Le-franc), qui fournissent eux-mêmes des données généralement beaucoup plus sûres que cent analyses granulométriques ou mesures sur échantillons; mais le fonctionnement de la nappe ne pourra être précisé qu'après étude des alimentations, des exutoires, des variations saisonnières de niveau, etc.

Dans cet éventail de moyens d'investigation, l'étude des variations périodiques de niveau a une place modeste : c'est un phénomène à grande échelle, mais les débits

échangés sont inconnus. Par contre c'est une étude qui ne coûte guère, et qui est souvent très utile, notamment lorsqu'il s'agit de préciser le schéma hydrologique pour déterminer les moyens susceptibles d'éviter les intrusions d'eaux salées; l'analyse détaillée d'observations précises peut en effet déceler l'influence de la drainance et des variations de transmissivité si la couche perméable étudiée est relativement homogène.

Bibliographie

- BOUSSINESQ (J.). — Essai sur la théorie des eaux courantes. Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences, Paris, Imprimerie Nationale (1877), voir p. 252.
- BOUSSINESQ (J.). — Recherches théoriques sur l'écoulement des nappes d'eau infiltrées dans le sol et sur le débit des sources. Journal de mathématiques appliquées, fasc. 1, Gauthier-Villars (1904).
- BRILLANT (J.). — Rabattements de nappe, théorie linéaire et application aux essais. *La Houille Blanche*, n° 3, p. 239 (1961).
- BRILLANT (J.). — Débit des puits cylindriques pénétrant partiellement la nappe aquifère. *La Houille Blanche*, p. 87, B (1962).
- CAZENOVE (E. de). — Une mesure à grande échelle de la porosité de drainage. *Techniques et Sciences Municipales*, n° 12, décembre 1971, p. 459.
- DANEL (P.). — La mesure des débits des nappes d'eaux souterraines. Actes du colloque d'Ankara sur l'hydrologie de la zone aride. UNESCO, tome II, p. 104 (1952).
- GARNIER (J. C.) et CLARION (Mlle Cl.). — Transmission des ondes de crue du Verdon à travers le massif d'appui R. D. du futur barrage de Sainte-Croix. *La Houille Blanche*, n° 1, p. 61 (1967).
- JAIN (C.), LAGARDE (A.), CHAUMET (P.) et EMSSELLEM (Y.). — Interprétation des essais de pompage dans les aquifères multistrates. Chronique d'Hydrogéologie n° 12, *B.R.G.M.*, p. 19 (1969).
- MARTY (R.). — Calcul en écoulement linéaire du comportement de la pression d'une nappe soumise ou non au phénomène de drainance : même revue, p. 31.
- MEYER (R.). — Quelques résultats théoriques récents concernant les nappes d'eau souterraines. *La Houille Blanche*, p. 86 et 744 (1955) et p. 23 (1956).
- PLEGAT (R.) et ARMANGAU (C.). — Alimentation des nappes aquifères et détergents. *Terres et Eaux*, p. 19 (janvier 1969).

Abstract

Sinusoidal waves in ground water

The Boussinesq equation is concerned with the elementary case of confined ground water extending indefinitely inland and directly connected either to the sea or to a sinusoidal tidal river. It contains a reference length x_0 (defined in Table I) which is a function of diffusion coefficient ($K.E./\gamma_w$ for confined ground water) and tidal period, t_0 .

The other formulae given in Tables I and II relate to the situations described by the diagrams in Table I. For ground water extending under the sea bed, there appears a coefficient a whose value, always less than unity, depends on the elastic moduli of water and the terrain. Given also is the formula for ground water extending a finite distance seaward and inland up to impermeable boundaries set at the same distance from the coast-line.

By changing the signs in heavy type, formulae are obtained for (a) ground water directly connected to a constant-level inland lake and (b) ground water partially connected to the sea, in such a way that the limiting amplitude on the seaward side is equal to a times the amplitude of the tide.

The above is concerned only with perfectly confined ground water. Should the ground water roof be semipermeable with a constant-level or almost constant-level reservoir above the roof (e.g. the sea, a lake or a marsh), a seepage situation arises which is characterized by the length B . In this case, use is made of a coefficient ϕ (> 1) which is a function of x_0/B . This coefficient ϕ multiplies the reduced variables U and X when these appear in exponential or hyperbolic functions and divides them in the case of trigonometric functions. In this manner formulae are obtained for the above seepage situation, with the reserve that a must be able to be set equal to one wherever the ground water extends beneath the sea i.e. the permeable

soil should be sufficiently compressible and should not contain air or gas pockets.

Formulae for confined ground water directly connected to the sea may be applied to free-surface ground water provided level variations may be neglected in comparison with the mean water depth.

Table III summarises formulae for ground water of infinite inland extent connected to a river whose level variation is non-sinusoidal. They may readily be adapted to ground water passing beneath the river.

This arsenal of formulae is certainly not complete. However, in practice difficulties arise in the main on account of the following:

- (i) Sea waves and, above all, river waves are not perfectly sinusoidal. Equivalent waves may be calculated by applying the same rules for the sea or river as for the pressure levels. In particular, time lags at half-tide should be used.
- (ii) Homogeneous soils do not exist and the evidence supplied by phreatic wave deformations is often ambiguous. For example, if there are three observation pipes set inland at increasing distances x_1 , x_2 , x_3 from the coast and if the amplitude decreases more slowly between x_2 and x_3 than between x_1 and x_2 , then there are two possible explanations: there could either be a permeable or partially permeable boundary close to x_3 or the diffusion coefficient might be smaller (or the seepage greater) between x_1 and x_2 than between x_2 and x_3 .

Nevertheless, the study of ground water waves is generally of considerable interest because it is an easy way of obtaining an indication of large-scale ground-water behaviour.