

**ANALYSE DE
LA STABILITÉ D'UN SYSTÈME
DE DEUX CHAMBRES D'ÉQUILIBRE
RESPECTIVEMENT
A L'AMONT ET A L'AVAL
DES TURBINES DANS LE DOMAINE
NON LINÉAIRE**

par

Y. OUELLET

Département de Génie Civil
Faculté des Sciences, Université Laval
(Québec)

Afin de pouvoir publier rapidement cet article, qui comporte une partie mathématique importante, nous avons adopté une présentation inhabituelle, qui, nous l'espérons, ne désorientera pas trop nos lecteurs

LA HOUILLE BLANCHE.

ANALYSE DE LA STABILITE D'UN SYSTEME DE DEUX
CHAMBRES D'EQUILIBRE RESPECTIVEMENT A L'AMONT OU
A L'AVAL DES TURBINES DANS LE DOMAINE NON LINEAIRE

I.- INTRODUCTION.

Le système à double chambre d'équilibre faisant l'objet de ce chapitre comprend une chambre située en amont des turbines et à l'extrémité aval de la galerie d'amenée, et une chambre du côté aval des turbines à l'origine amont du canal de fuite (voir figure 1). Etant donné l'intérêt que présentent actuellement les centrales souterraines, l'occurrence de tels systèmes est donc à prévoir.

Un tel système a été analysé de façon exhaustive au moyen des équations linéarisées. Escande et Huron¹ en ont fait une étude préliminaire de la stabilité basée sur des mémoires antécédents de Jeager² qui a lui-même³ complété ces travaux en systématisant la présentation des données du problème de façon à pouvoir en généraliser la discussion.

A notre connaissance, on n'a pas encore abordé le problème par un procédé non linéaire qui permettrait de prendre en compte les effets des orifices situés à la base des cheminées. Une telle étude⁴ a déjà été proposée pour les cheminées à orifice asymétrique et différentielles que nous proposons d'étendre aux systèmes de deux chambres d'équilibre respectivement en amont et en aval des turbines⁵.

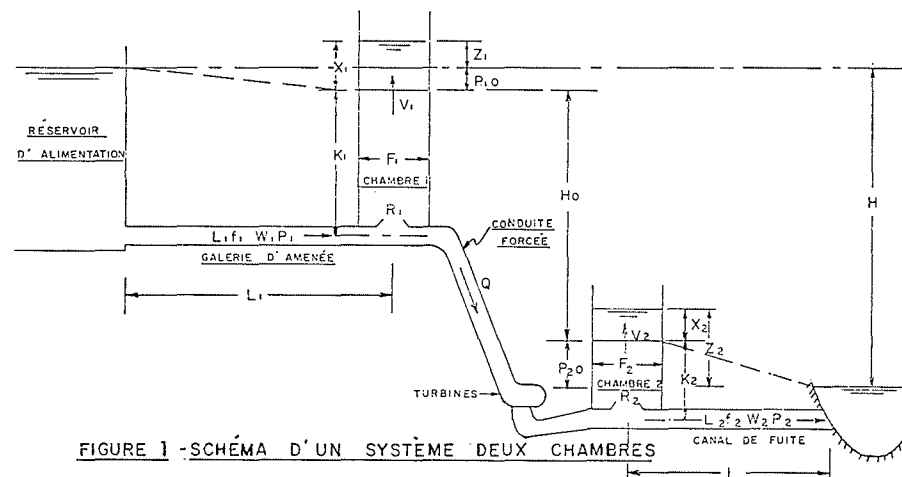


FIGURE 1 - SCHEMA D'UN SYSTEME DEUX CHAMBRES
RESPECTIVEMENT A L'AMONT ET A
L'AVAL DES TURBINES.

/2.

Nous calculerons, en première approximation, les solutions quasi périodiques du système d'équations différentielles décrivant le mouvement de l'eau dans une telle installation. Cela nous permettra de calculer le temps efficace d'amortissement des oscillations dans la chambre amont et dans la chambre aval respectivement. L'application de ces résultats se révélera utile pour faire le choix et le dimensionnement de chaque cheminée.

II.- MISE EN EQUATIONS DE PROBLEME.

Nous nous proposons de mettre en équations le mouvement de l'eau dans le système représenté à la figure 1, schématisant une installation à deux chambres d'équilibre dont l'une est à l'amont et l'autre à l'aval des turbines. Les caractéristiques géométriques et hydrauliques des systèmes sont:

1.- Galerie d'amenée:

- L = Longueur de la galerie
- f = section constante de la galerie de diamètre d
- W = vitesse moyenne instantanée dans la galerie
- P = perte de charge totale dans la galerie correspondant à la vitesse W.

Cheminée:

- K = Hauteur de la cheminée à partir du niveau de régime permanent
- F = section totale des deux chambres
- F' = section du tube différentiel

/3.

- V = vitesse moyenne instantanée dans la plus grande chambre
- X = dénivellation dans la plus grande chambre à partir du niveau de régime permanent
- R = perte de charge à l'orifice correspondant à la vitesse V.

Installation globale:

- Q = débit instantané alimentant la centrale
- H = hauteur de chute totale de l'installation
- T = temps réel.

- 2.- Les indices 1 réfèrent au système amont et les indices 2 au système aval.
- 3.- Nous admettons les hypothèses usuelles à l'exception d'une, à savoir que l'inertie de la masse d'eau contenue dans la cheminée d'équilibre n'est pas négligeable par rapport à celle de la masse d'eau contenue dans la galerie d'amenée.
Ces hypothèses sont les suivantes:
 - a) Les parois de la galerie d'amenée sont rigides et l'eau est incompressible. La répartition des vitesses dans la section de cette galerie est uniforme.
 - b) Les caractéristiques de l'écoulement en régime varié sont les mêmes qu'en mouvement permanent.
 - d) La longueur et la perte de charge dans la conduite forcée sont négligeables devant celles dans la galerie d'amenée.
 - e) Le rendement des turbines et les écarts du régulateur de vitesse n'interviennent pas dans le réglage à puissance constante. Le réglage est donc à puissance hydraulique rigoureusement

/4.

constante.

Avec ces hypothèses, l'équation de réglage, jointe aux équations de l'énergie de continuité appliquées aux parties amont et aval, nous conduit aux équations de base du mouvement de l'eau. Nous admettons que les cheminées sont du type différentiel, les indices primes (') référant alors au tube différentiel.

Les deux équations d'énergie sont, pour le système

amont:

$$\frac{L_1}{g} \frac{dW_1}{dT} + \frac{K_1'}{g} \frac{dV_1'}{dT} + P_1 + X_1' - P_{10} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{K_1'}{g} \frac{dV_1'}{dT} + X_1' = \frac{K_1}{g} \frac{dV_1}{dT} + X_1 + R_1 = 0$$

et pour le système aval:

$$\frac{L_2}{g} \frac{dW_2}{dT} - \frac{K_2'}{g} \frac{dV_2'}{dT} + P_2 - X_2' - P_{20} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{K_2'}{g} \frac{dV_2'}{dT} + X_2' = \frac{K_2}{g} \frac{dV_2}{dT} + X_2 + R_2$$

Pour la cheminée amont, l'équation de continuité s'écrit:

$$f_1 W_1 = (F_1 - F_1') V_1 + F_1' V_1' + Q \quad (3)$$

et pour la cheminée aval:

$$Q = (F_2 - F_2') V_2 + F_2' V_2' + f_2 W_2 \quad (4)$$

/5.

où les dénivellations et les vitesses dans les cheminées sont positives vers le haut.

A ces équations s'ajoute la condition de réglage à puissance constante qui exige que:

$$Q_o H_o = Q \left[H_o + X_1' + \frac{K_1'}{g} \frac{dV_1'}{dT} - K_2' - \frac{K_2'}{g} \frac{dV_2'}{dT} \right] \quad (5)$$

Dans ces équations, les vitesses d'écoulement et les pertes de charge dans la conduite d'amenée et à l'orifice s'expriment pour la chambre 1, par:

$$V_1 = \frac{dX_1'}{dT}, \quad V_1' = \frac{dX_1'}{dT}, \quad V_{10} = \frac{Q_o}{(F_1 - F_1')}, \quad W_{10} = \frac{Q_o}{f_1}$$

$$P_1 = \frac{\lambda_1 L_1}{d_1} \frac{W_1^2}{2g}, \quad P_{10} = \frac{\lambda_1 L_1}{d_1} \frac{W_{10}^2}{2g}, \quad P_1 = P_{10} \left[\frac{W_1}{W_{10}} \right]^2$$

$$R_1 = C_{11} \frac{V_1^2}{2g}, \quad R_1' = -\beta_1 C_{11} \frac{V_1'^2}{2g}, \quad R_{10} = C_{11} \frac{V_{10}^2}{2g} \quad (6)$$

$$R_1 = R_{10} j_1 \left[\frac{V_1}{V_{10}} \right]^2 \quad \text{où: } j_1 = \begin{cases} +1 & \text{pour } V_1 > 0 \\ -\beta_1 & \text{pour } V_1 < 0 \end{cases}$$

et pour les expressions correspondantes pour la chambre 2:

$$V_2 = \frac{dX_2'}{dT}, \quad V_2' = \frac{dX_2'}{dT}, \quad V_{20} = \frac{Q_o}{(F_2 - F_2')}, \quad W_{20} = \frac{Q_o}{f_2}$$

$$P_2 = \frac{\lambda_2 L_2}{d_2} \frac{W_2^2}{2g}, \quad P_{20} = \frac{\lambda_2 L_2}{d_2} \frac{W_{20}^2}{2g}, \quad P_2 = P_{20} \left[\frac{W_2}{W_{20}} \right]^2$$

$$R_2 = C_{12} \frac{V_2^2}{2g}, R'_2 = -\beta C_{12} \frac{V_2^2}{2g}, R_{20} = C_{12} \frac{V_{20}^2}{2g} \quad (7)$$

$$R_2 = R_{20} j_2 \left[\frac{V_2}{V_{20}} \right]^2 \quad \text{où: } j_2 = \begin{cases} +1 & \text{pour } V_2 > 0 \\ -\beta_2 & \text{pour } V_2 < 0 \end{cases}$$

Introduction des grandeurs relatives.

Les grandeurs relatives classiques de Calame et Gaden⁶ permettent de grouper les paramètres et de simplifier les équations de base. Elles se définissent, pour la chambre 1:

$$w_1 = \frac{f_1 W_1}{Q_0}, \quad q = \frac{Q}{Q_0}, \quad v_1 = \frac{F_1 V_1}{Q_0}, \quad v'_1 = \frac{F_1 V'_1}{Q_0}$$

$$x_1 = \frac{X_1}{X_{10}}, \quad x'_1 = \frac{X'_1}{X_{10}}, \quad x_{10K} = \frac{X_{10K}}{X_{10}}, \quad x_{10K'} = \frac{X_{10K'}}{X_{10}}$$

$$t_1 = \frac{T}{T_{10}}, \quad t_{10K} = \frac{T_{10K}}{T_{10}}, \quad t_{10K'} = \frac{T_{10K'}}{T_{10}} \quad (8)$$

$$e_{1K} = t_{10K} x_{10K} e_1^*, \quad e_{1K'} = t_{10K'} x_{10K'} e_1^*, \quad e_1^* = \frac{f_1}{F_1}$$

$$P_1 = \frac{P_{10}}{X_{10}}, \quad h_1 = \frac{H_0}{X_{10}}, \quad s_1 = \frac{F'_1}{F_1}, \quad r_1 = \frac{R_{10}}{X_{10}}$$

$$\text{où: } X_{10} = W_{10} \left[\frac{L_1 f_1}{g F_1} \right]^{1/2}, \quad X_{10K} = W_{10} \left[\frac{K_1 f_1}{g F_1} \right]^{1/2}, \quad X_{10K'} = W_{10} \left[\frac{K'_1 f_1}{g F_1} \right]^{1/2}$$

$$T_{10} = \left[\frac{L_1 F_1}{g f_1} \right]^{1/2}, \quad T_{10K} = \left[\frac{K_1 F_1}{g f_1} \right]^{1/2}, \quad T_{10K'} = \left[\frac{K'_1 F_1}{g f_1} \right]^{1/2}$$

et, pour la chambre 2:

$$w_2 = \frac{f_2 W_2}{Q_0}, \quad q = \frac{Q}{Q_0}, \quad v_2 = \frac{F_2 V_2}{Q_0}, \quad v'_2 = \frac{F_2 V'_2}{Q_0}$$

$$x_2 = \frac{X_2}{X_{20}}, \quad x'_2 = \frac{X'_2}{X_{20}}, \quad x_{20K} = \frac{X_{20K}}{X_{20}}, \quad x_{20K'} = \frac{X_{20K'}}{X_{20}}$$

$$t_2 = \frac{T}{T_{20}}, \quad t_{20K} = \frac{T_{20K}}{T_{20}}, \quad t_{20K'} = \frac{T_{20K'}}{T_{20}} \quad (9)$$

$$e_{2K} = t_{20K} x_{20K} e_2^*, \quad e_{2K'} = t_{20K'} x_{20K'} e_2^*, \quad e_2^* = \frac{F_2}{F'_2}$$

$$P_2 = \frac{P_{20}}{X_{20}}, \quad h_2 = \frac{H_0}{X_{20}}, \quad s_2 = \frac{F'_2}{F_2}, \quad r_2 = \frac{R_{20}}{X_{20}}$$

$$\text{où: } X_{20} = W_{20} \left[\frac{L_2 f_2}{g F_2} \right]^{1/2}, \quad X_{20K} = W_{20} \left[\frac{K_2 F_2}{g F_2} \right]^{1/2}, \quad X_{20K'} = W_{20} \left[\frac{K'_2 f_2}{g F_2} \right]^{1/2}$$

$$T_{20} = \left[\frac{L_2 F_2}{g f_2} \right]^{1/2}, \quad T_{20K} = \left[\frac{K_2 F_2}{g f_2} \right]^{1/2}, \quad T_{20K'} = \left[\frac{K'_2 F_2}{g f_2} \right]^{1/2}$$

Posons les rapports suivants:

$$m = \frac{X_{20}}{X_{10}} = \left[\frac{L_2 f_1 F_1}{L_1 f_2 F_2} \right]^{1/2}$$

$$m^* = \frac{T_{20}}{T_{10}} = \left[\frac{L_2 f_1 F_2}{L_1 f_2 F_1} \right]^{1/2} \quad (10)$$

/8.

$$k = \frac{F_2}{F_1}$$

qui sont des constantes dépendant uniquement des dimensions des ouvrages et non du débit du régime Q_0 considéré.

Il s'ensuit que:

$$m^* = m k \quad (11)$$

$$dt_1 = m k dt_2 = m^* dt_2 \quad (12)$$

L'introduction des valeurs relatives (8) et (9) dans les équations (1) à (5) fournit le système d'équations suivant:

$$\frac{dw_1}{dt_1} + e_{1K} \frac{dv_1'}{dt_1} + P_1 w_1^2 + x_1' - P_1 = 0$$

$$e_{1K} \frac{dv_1'}{dt_1} + x_1' = e_{1K} \frac{dv_1}{dt_1} + x_1 + r_1 j_1 v_1^2$$

(13)

$$\frac{dw_2}{dt_2} - e_{2K} \frac{dv_2'}{dt_2} + P_2 w_2^2 - x_2' - P_2 = 0$$

$$e_{2K} \frac{dv_2'}{dt_2} + x_2' = e_{2K} \frac{dv_2}{dt_2} + x_2 + r_2 j_2 v_2^2$$

/9.

$$w_1 = (1-s_1) v_1 + s_1 v_1' + q$$

$$q = (1-s_2) v_2 + s_2 v_2' + w_2$$

$$q = \frac{1}{1 + \frac{x_1'}{h_1} - \frac{x_2'}{h_2}}$$

Éliminons de ces équations les variables $v_1, w_2, v_1', v_2, v_1', v_2'$ et q . Si l'on dénote x_1' et x_2' par y_1 et y_2 , et si l'on pose $e_{1K} = e_{1K}', = e_1$ et $e_{2K} = e_{2K}', = e_2$, en rapportant les variables au même temps t_1 à l'aide de la relation (12), on obtient l'équation finale du mouvement:

$$(1-s_1) x_1 + (s_1+e_1) y_1 + y_1 = u_1 \left[(1-n_1 s_1) y_1^{n_1} (1-s_1) x_1^{-m} y_2^{\frac{n_1}{2}} \right. \\ \left. \left[(1-s_1) x_1 + s_1 y_1 \right]^2 \right] \\ + u_1^2 (y_1^{-m} y_2) \left[-(2-n_1 s_1) y_1^{n_1} (1-s_1) x_1 + \right. \\ \left. 2 m y_2 + n_1 \right] \\ + u_1^3 (y_1^{-m} y_2)^2 \dots \\ -e_1 x_1 - x_1 + e_1 y_1 + y_1 = r_1 (1-s_1)^2 j_1 x_1^2$$

$$\begin{aligned}
m^{*2}(1-s_2) \ddot{x}_2 + m^{*2}(s_2+e_2) \ddot{y}_2 + \dot{y}_2 = u_1 m^* m \left[(1-n_2 s_2) \dot{y}_2 - n_2 (1-s_2) \dot{x}_2 \right. \\
\left. - \frac{1}{m} \dot{y}_1 - \frac{n_2 m^*}{2} \left[(1-s_2) \dot{x}_2 + s_2 \dot{y}_2 \right]^2 \right] \\
(14) \\
+ u_1^2 m^* (y_1 - m y_2) \left[-(2-n_2 s_2) \dot{y}_2 + n_2 (1-s_2) \dot{x}_2 \right. \\
\left. + \frac{2}{m} \dot{y}_1 - \frac{n_2}{m^*} \right] \\
+ u_1^3 \dots
\end{aligned}$$

$$e_2 m^{*2} \ddot{y}_2 + \dot{y}_2 - e_2 m^{*2} \ddot{x}_2 - \dot{x}_2 = r_2 (1-s_2)^2 j_2 m^{*2} \dot{x}_2^3$$

où nous avons posé $u_1 = \frac{1}{h_1}$, $u_2 = \frac{1}{h_2}$, $u_2 = m_1$, $n_1 = 2p_1 h_1$ et $n_2 = 2p_2 h_2$.

Il s'agit d'un système d'équations différentielles autonome non linéaire, à quatre degrés de liberté.

En général, on peut aisément admettre que les paramètres de ces équations, pour les parties amont et aval, ont pratiquement les mêmes valeurs extrêmes que celles déjà considérées dans le cas d'un système à une seule cheminée. Ces limites sont [6], [7] et [8]

$$\begin{aligned}
0.05 < s < 0.20 \\
0.14 < u < 0.36 \\
1.0 < n < 2.0 \\
0.7 < r < 1.0 \\
1.0 < \beta < 2.0 \\
0.0 < e < 1/8
\end{aligned}
\quad (15)$$

III.- LINEARISATION DU SYSTEME.

En étudiant le mouvement pour de très faibles écarts des variables x_1 , y_1 , x_2 et y_2 autour de leur position d'équilibre $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $x_2 = 0$ et $y_2 = 0$, on peut alors négliger les petites quantités et les produits d'écarts des variables et de leurs dérivées.

Le système d'équations (14) linéarisé s'écrit, si l'on néglige les termes caractérisant l'inertie de l'eau dans chacune des chambres et l'on pose $s_1 = s_2 = 0$:

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_1 - \left(\frac{1}{h_1} - 2 p_1 \right) \dot{x}_1 + \left(1 - \frac{2 p_1}{h_1} \right) x_1 - \frac{m}{h_1} \dot{x}_2 - m \frac{2 p_1}{h_1} x_2 \\
\ddot{x}_2 - \frac{1}{m^*} \left(\frac{1}{h_2} - 2 p_2 \right) \dot{x}_2 + \frac{1}{m^{*2}} \left(1 - \frac{2 p_2}{h_2} \right) x_2 = - \frac{k}{m^{*2}} \frac{1}{h_2} x_1 - \frac{k}{m^{*3}} \frac{2 p_2}{h_2} x_1
\end{aligned}
\quad (16)$$

Le système prend donc la forme:

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_1 + a_1 \dot{x}_1 + b_1 x_1 &= A_1 \dot{x}_2 + B_1 x_2 \\
\ddot{x}_2 + a_2 \dot{x}_2 + b_2 x_2 &= A_2 \dot{x}_1 + B_2 x_1
\end{aligned}
\quad (17)$$

$$\begin{aligned}
\text{où: } a_1 &= - \left(\frac{1}{h_1} - 2 p_1 \right) & b_1 &= \left(1 - \frac{2 p_1}{h_1} \right) \\
a_2 &= - \frac{1}{m^*} \left(\frac{1}{h_2} - 2 p_2 \right) & b_2 &= \frac{1}{m^{*2}} \left(1 - \frac{2 p_2}{h_2} \right) \\
A_1 &= - \frac{m}{h_1}, \quad B_1 = - m \frac{2 p_1}{h_1}, & A_2 &= - \frac{k}{m^{*2}} \frac{1}{h_2}, \quad B_2 = - \frac{k}{m^{*3}} \frac{2 p_2}{h_2}
\end{aligned}$$

/12.

L'examen de la stabilité repose alors sur l'étude des racines de l'équation caractéristique:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + a_1 \lambda + b_1 & -(A_1 \lambda + B_1) \\ -(A_2 \lambda + B_2) & \lambda^2 + a_2 \lambda + b_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (18)$$

racines qui doivent avoir leurs parties réelles négatives.

En développant le déterminant (18), on obtient l'équation du quatrième degré:

$$\lambda^4 + \alpha_1 \lambda^3 + \alpha_2 \lambda^2 + \alpha_3 \lambda + \alpha_4 = 0$$

où:

$$\alpha_1 = a_1 + a_2$$

$$\alpha_2 = b_1 + b_2 + a_1 a_2 - A_1 A_2$$

$$\alpha_3 = a_1 b_2 + b_1 a_2 - A_1 B_2 - B_1 A_2$$

$$\alpha_4 = b_1 b_2 - B_1 B_2$$

Compte tenu de ces notations, les conditions de Routh et Hurwitz¹⁰, appliquées à (19), s'écrivent:

/13.

$$\alpha_1 > 0, \quad \alpha_2 > 0, \quad \alpha_3 > 0, \quad \alpha_4 > 0,$$

(20)

$$\Gamma = \alpha_3^2 - \alpha_1 (\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1 \alpha_4) < 0$$

Etant donné le trop grand nombre de paramètres, Escande et Huron¹ conclurent qu'une étude générale de ces conditions se révélait trop laborieuse et passèrent aux valeurs numériques.

Jaeger³ a pu continuer la discussion en choisissant un ensemble de paramètres nouveaux qui sont fonctions des sections de Thoma. Les sections de Thoma comprenant déjà implicitement de nombreux paramètres, la réduction du nombre de paramètres libres rend alors possible une discussion générale.

Ces nouvelles valeurs relatives sont:

$$p'_1 = \frac{P_{10}}{X'_{10}}, \quad h'_1 = \frac{H_0}{X'_{10}}, \quad p'_2 = \frac{P_{20}}{X'_{20}}, \quad h'_2 = \frac{H_0}{X'_{20}} \quad (21)$$

$$\text{où: } X'_{10} = W_{10} \left[\frac{L_1 f_1}{g F_{th1}} \right]^{1/2}, \quad X'_{20} = W_{20} \left[\frac{L_2 f_2}{g F_{th2}} \right]^{1/2}$$

$$T'_{10} = \left[\frac{L_1 F_{th1}}{g f_1} \right]^{1/2}, \quad T'_{20} = \left[\frac{L_2 F_{th2}}{g f_2} \right]^{1/2}$$

$$F_{th1} = \frac{W_{10}^2 L_1 f_1}{2 g P_{10} H_0}, \quad F_{th2} = \frac{W_{20}^2 L_2 f_2}{2 g P_{20} H_0}$$

Comme les valeurs de X_{10} et X'_{10} , X_{20} et X'_{20} sont reliées par:

$$X'_{10} = X_{10} \sqrt{n_1}, \quad X'_{20} = X_{20} \sqrt{n_2} \quad (22)$$

il s'ensuit que:

$$h_1 = h'_1 \sqrt{n_1}, \quad h_2 = h'_2 \sqrt{n_2} \quad (23)$$

$$p_1 = p'_1 \sqrt{n_1}, \quad p_2 = p'_2 \sqrt{n_2}$$

En vertu de la définition des sections de Thoma, on a:

$$2 p'_1 h'_1 = 1, \quad 2 p'_2 h'_2 = 1 \quad (24)$$

Définissant les nouveaux rapports:

$$\bar{m} = \frac{X'_{20}}{X'_{10}} = \left[\frac{L_2 f_1 F_{th1}}{L_1 f_2 F_{th2}} \right]^{1/2}$$

$$\bar{m}^* = \frac{T'_{20}}{T'_{10}} = \left[\frac{L_2 f_1 F_{th2}}{L_1 f_2 F_{th1}} \right]^{1/2} \quad (25)$$

$$\bar{k} = \frac{F_{th2}}{F_{th1}} \quad \text{avec: } \bar{m}^* = k m$$

nous obtenons les relations suivantes:

$$\bar{m} = m \left[\frac{n_2}{n_1} \right]^{1/2}, \quad \bar{m}^* = m^* \left[\frac{n_1}{n_2} \right]^{1/2}, \quad \bar{k} = k \frac{n_1}{n_2} \quad (26)$$

A l'aide de ces dernières valeurs, les constantes du système d'équations (17) deviennent:

$$a_1 = -2 p'_1 \left(\frac{1}{\sqrt{n_1}} - \sqrt{n_1} \right) \quad b_1 = \left[1 - (2 p'_1)^2 \right]$$

$$a_2 = -\frac{2 p'_2 \sqrt{n_1}}{\bar{m}^* \sqrt{n_2}} \left(\frac{1}{\sqrt{n_2}} - \sqrt{n_2} \right) \quad b_2 = \frac{1}{\bar{m}^{*2}} \frac{n_1}{n_2} \left[1 - (2 p'_2)^2 \right]$$

$$A_1 = \frac{\bar{m}}{h'_1} \frac{1}{\sqrt{n_2}} \quad B_1 = -\bar{m} \frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{n_2}} (2 p'_1)^2 \quad (27)$$

$$A_2 = -\frac{\bar{k}}{\bar{m}^{*2} h'_2 \sqrt{n_2}} \quad B_2 = -\frac{\bar{k}}{\bar{m}^{*3}} \frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{n_2}} (2 p'_2)^2$$

et les coefficients de l'équation caractéristique:

$$\alpha_1 = - \left[2 p'_1 \left(\frac{1}{\sqrt{n_1}} - \sqrt{n_1} \right) + \frac{2 p'_2 \sqrt{n_1}}{\bar{m}^* \sqrt{n_2}} \left(\frac{1}{\sqrt{n_2}} - \sqrt{n_2} \right) \right]$$

$$\alpha_2 = \left[1 - (2 p'_1)^2 \right] + \frac{1}{\bar{m}^{*2}} \frac{n_1}{n_2} \left[1 - (2 p'_2)^2 \right] + \frac{(2 p'_1) (2 p'_2)}{\bar{m}^*}$$

$$\frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{n_2}} \left(\frac{1}{\sqrt{n_1}} - \sqrt{n_1} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{n_2}} - \sqrt{n_2} \right) - \frac{(2 p'_1) (2 p'_2)}{\bar{m}^* n_2}$$

$$(28)$$

$$\alpha_3 = -2 p_1' \left(\frac{1}{\sqrt{n_1}} - \sqrt{n_1} \right) \frac{1}{\bar{m}^{*2}} \frac{n_1}{n_2} \left[1 - (2 p_2')^2 \right] - \frac{2 p_2' \sqrt{n_1}}{\bar{m}^* \sqrt{n_2}} \left(\frac{1}{\sqrt{n_2}} - \sqrt{n_2} \right)$$

$$\left[1 - (2 p_1')^2 \right] - \frac{(2 p_1') (2 p_2')^2 \sqrt{n_1}}{\bar{m}^{*2} n_2} - \frac{(2 p_2') (2 p_1')^2 \sqrt{n_1}}{\bar{m}^* n_2}$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{\bar{m}^{*2}} \frac{n_1}{n_2} \left[1 - (2 p_1')^2 \right] \left[1 - (2 p_2')^2 \right] - \frac{(2 p_1')^2 (2 p_2')^2 n_1}{\bar{m}^{*2} n_2}$$

La discussion des conditions de stabilité du système se résume donc à la solution des formules (20) et (28). Les coefficients α_1 , α_2 , α_3 , α_4 et la fonction Γ dépendent de deux variables indépendantes n_1 et n_2 et de trois paramètres \bar{m}^* , p_1' et p_2' , qui peuvent être calculés préalablement puisqu'ils dépendent des sections de Thoma F_{th1} et F_{th2} .

On remarque que le quatrième paramètre \bar{k} s'est simplifié. Mais il y a toutefois lieu de noter que les quatre paramètres sont liés les uns aux autres par la relation:

$$\frac{p_2'}{p_1'} = \frac{h_1'}{h_2'} = \frac{Z_1'}{Z_2'} = \bar{m} = \frac{\bar{m}^*}{\bar{k}} \quad (29)$$

Les conditions de Routh Hurwitz peuvent donc être représentées dans le plan n_1 , n_2 pour certaines valeurs des paramètres, pour des courbes qui délimitent progressivement la zone de stabilité. En général la condition $\Gamma < 0$ est la plus restrictive.

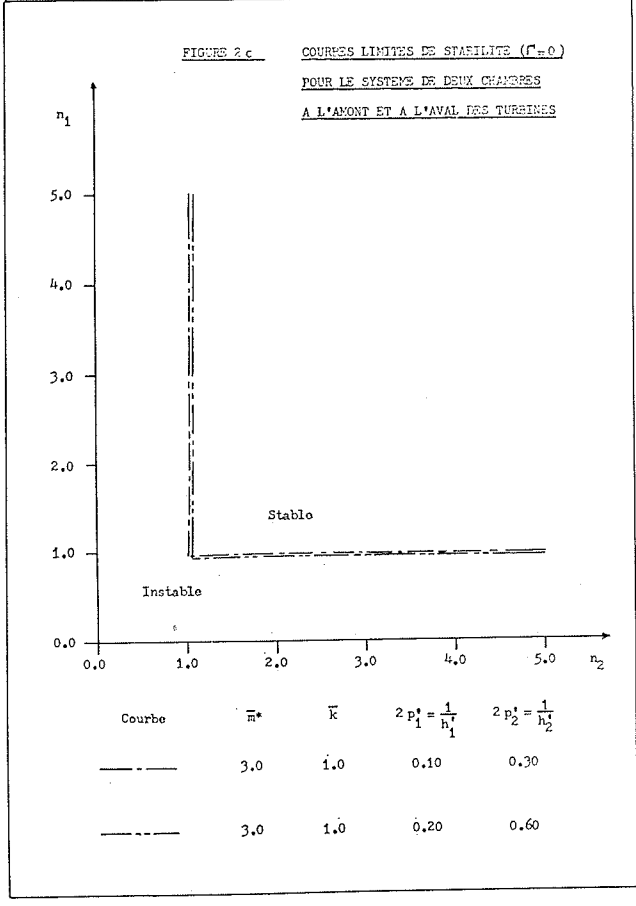
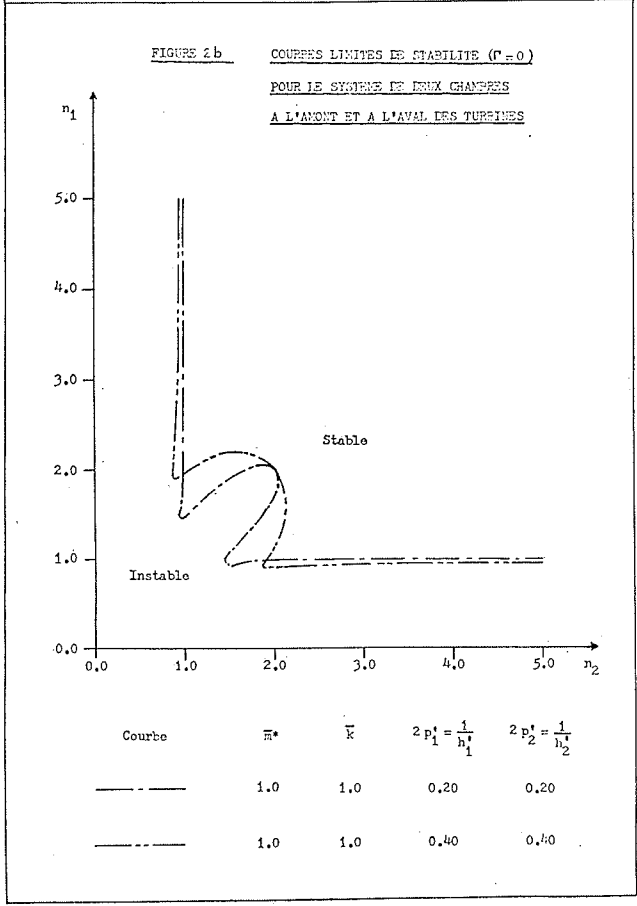
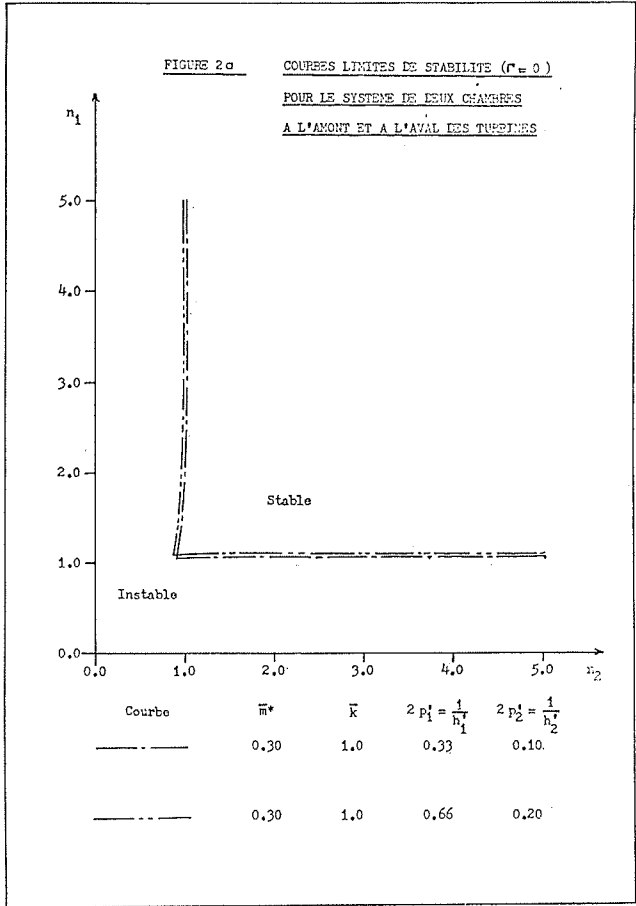
Les diagrammes des figures 2 montrent les courbes limites de stabilité ($\Gamma = 0$) pour des combinaisons typiques des valeurs des paramètres. La condition $\Gamma < 0$ se trouve alors vérifiée dans la région située à droite et au-dessus des courbes. Les figures 2a, 2b et 2c ont été tracées avec $\bar{m}^* = 0.3$, $\bar{m}^* = 1.0$, $\bar{m}^* = 3.0$ respectivement. Le premier cas correspond généralement à une galerie de fuite courte tandis que le dernier cas caractérise une longue galerie de fuite.

L'ordre de grandeur de k s'obtient facilement par substitution dans les sections de Thoma pour les chambres amont et aval des expressions correspondantes des pertes de charge données par la formule de Darcy (6) et (7):

$$k = \frac{F_{th2}}{F_{th1}} = \frac{W_{20}^2 L_2 f_2 P_{10}}{W_{20}^2 L_1 f_1 P_{2-}} = \frac{\lambda_1 d_2^3}{\lambda_2 d_1^3} \quad (30)$$

où λ_1 et λ_2 sont respectivement les coefficients de Darcy de la conduite d'amenée et du canal de fuite.

Dans la plupart des installations de ce genre réalisées, le canal de fuite possède un diamètre plus grand que celui de la conduite d'amenée et n'est pas revêtu, présentant ainsi un coefficient de friction plus élevé. La valeur de \bar{k} doit donc être de l'ordre de l'unité.



IV.- SOLUTIONS QUASI PERIODIQUES SU SYSTEME D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES A PLUSIEURS DEGRES DE LIBERTE.

La méthode de variation des paramètres, établie suivant le procédé de Lagrange, a été développée pour les systèmes à deux degrés de liberté par Butenin¹¹. Elle correspond à celle de Kryloff et Bogoliuboff¹² des systèmes à un degré de liberté. Cette méthode peut aussi s'adapter aux systèmes à n degrés de liberté. Dans ce cas, il est nécessaire de prendre les moyennes sur n périodes.

Nous en développerons les équations générales pour la première approximation pour ensuite les appliquer au système d'équations de la stabilité d'un groupe de deux chambres respectivement à l'amont et à l'aval des turbines.

Soit le système:

$$\sum_{s=1}^n (b_{is} \ddot{x}_s + c_{is} \dot{x}_s) = u f_i(x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \quad (31)$$

$$(i=1, 2, \dots, n)$$

où b_{is} et c_{is} sont des coefficients constants et f_i des fonctions non linéaires.

Pour $u=0$, nous retrouvons le système linéarisé dont la solution peut s'exprimer par:

$$x_s = \sum_{r=1}^n k_{sr} a_r \cos(w_r t + \theta_r) = \sum_{r=1}^n k_{sr} a_r \cos \psi_r \quad (32)$$

où les fréquences w_r sont données par les solutions de l'équation ca-

ractéristiques et les valeurs de k_{sr} que l'on obtient en portant la solution x_s dans le système linéarisé.

Procédant formellement, on obtient pour la dérivée de x_s :

$$\dot{x}_s = \sum_{r=1}^n -k_{sr} w_r a_r \sin \psi_r \quad (s = 1, 2, \dots, n) \quad (33)$$

et les conditions de compatibilité:

$$\sum_{r=1}^n [k_{sr} \dot{a}_r \cos \psi_r - k_{sr} a_r \dot{\theta}_r \sin \psi_r] = 0 \quad (34)$$

Dérivons une seconde fois x_s ; il vient:

$$\ddot{x}_s = \sum_{r=1}^n [-k_{sr} w_r^2 a_r \cos \psi_r - \dot{a}_r w_r \sin \psi_r - k_{sr} a_r \dot{\theta}_r \cos \psi_r] \quad (35)$$

En introduisant les valeurs de \ddot{x}_s et x_s dans le système initial, on tire:

$$\sum_{s=1}^n \left[b_{is} \sum_{r=1}^n -k_{sr} w_r^2 a_r \cos \psi_r + c_{is} \sum_{r=1}^n k_{sr} a_r \cos \psi_r \right] + b_{is} \quad (36)$$

$$\sum_{r=1}^n [-k_{sr} w_r \dot{a}_r \sin \psi_r - k_{sr} w_r a_r \dot{\theta}_r \cos \psi_r] = u f_i^*$$

Comme x_s est solution du système homogène correspondant, il s'ensuit que la première expression entre crochets s'annule et cette dernière relation se réduit à:

$$\sum_{s=1}^n b_{is} \sum_{r=1}^n \left[-k_{sr} w_r \dot{a}_r \sin \psi_r - k_{sr} w_r a_r \dot{\theta}_r \cos \psi_r \right] = u f_i^* \quad (37)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

Les équations (34) et (37) forment un système linéaire de $2n$ équations pour les $2n$ variables \dot{a}_r et $a_r \dot{\theta}_r$.

Ce système d'équations peut s'écrire plus simplement:

$$\sum_{r=1}^n \left[k_{sr} \dot{a}_r \cos \psi_r - k_{sr} a_r \dot{\theta}_r \sin \psi_r \right] = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, n) \quad (38)$$

$$\sum_{r=1}^n \left[-D_{ir} w_r \dot{a}_r \sin \psi_r - D_{ir} w_r a_r \dot{\theta}_r \cos \psi_r \right] = u f_i^* \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

où $D_{ir} = \sum_{s=1}^n b_{is} k_{rs}$ peut être considéré comme le produit matriciel de

b_{is} par k_{rs} et les f_i^* sont les fonctions du système initial dans lesquelles on a remplacé les valeurs de x_s et \dot{x}_s par leurs solutions du système générateur.

V.- APPLICATION AU SYSTEME D'EQUATIONS DE LA STABILITE DE DEUX CHAMBRES RESPECTIVEMENT A L'AMONT ET A L'AVANT DES TURBINES.

Nous utiliserons la méthode précédente pour le calcul, en première approximation, des solutions transitoires des systèmes autonomes quasi linéaires à plusieurs degrés de liberté.

Pour résoudre le système général (14), il faut commencer par déterminer la solution du système générateur correspondant:

$$(1-s_1) \ddot{y}_1 + (s_1+e_1) \dot{y}_1 + y_1 = 0$$

$$-e_1 \ddot{y}_1 - \dot{y}_1 + e_1 \dot{y}_1 + y_1 = 0$$

(39)

$$m^* (1-s_2) \ddot{y}_2 + m^* (s_2+e_2) \dot{y}_2 + y_2 = 0$$

$$e_2 m^* \ddot{y}_2 + y_2 - e_2 m^* \dot{y}_2 - x_2 = 0$$

Les solutions de ce système sont données par les racines de l'équation caractéristique:

$$\begin{vmatrix} (1-s_1) \lambda^2 & (s_1 + e_1) \lambda^2 + 1 & 0 & 0 \\ -(e_1 \lambda^2 + 1) & (e_1 \lambda^2 + 1) & \delta & 0 \\ 0 & 0 & m^*(1-s_2) \lambda^2 & m^*(s_2+e_2) \lambda^2 + 1 \\ 0 & 0 & -(e_2 m^* \lambda^2 + 1) & (e_2 m^* \lambda^2 + 1) \end{vmatrix} \quad (40)$$

$$= \left[(1+e_1)\lambda^2+1 \right] \left[e_1\lambda^2+1 \right] \left[m^{*2}(1+e_2)\lambda^2+1 \right] \left[m^{*2}e_2\lambda^2+1 \right]$$

$$= 0$$

D'où dérivent les fréquences:

$$-\lambda_1^2 = w_1^2 = \frac{1}{(1+e_1)} \quad -\lambda_2^2 = w_2^2 = \frac{1}{e_1}$$

$$-\lambda_3^2 = w_3^2 = \frac{1}{m^{*2}(1+e_2)} \quad -\lambda_4^2 = w_4^2 = \frac{1}{m^{*2}e_2}$$

(41)

Les solutions pour x_1, x_2, y_1 et y_2 sont de la forme:

$$x_s = \sum_{r=1}^4 k_{sr} a_r \cos \psi_r \quad (s = 1, 2, 3, 4) \quad (42)$$

où $\psi_r = w_r t + \theta_r$ et x_s correspond respectivement à x_1, y_1, x_2 et y_2 pour $s = 1, 2, 3$ et 4 .

En supposant $k_{sr} = 1$ pour $s = r$ et en portant la solution (42) dans trois des quatre équations du système original (39), on trouve les valeurs de k_{sr} qui, sous forme matricielle, s'écrit:

$$[k_{sr}] = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{s_1}{(1-s_1)} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{s_2}{(1-s_2)} \end{bmatrix} \quad (43)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Pour déterminer la solution en première approximation du système (14) nous emploierons, pour simplifier l'écriture, le symbole somme. Le système (14) devient:

$$\sum_{s=1}^4 (b_{is} \dot{x}_s + c_{is} x_s) = u f_i \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (44)$$

où b_{is} et c_{is} sont donnés par les matrices:

$$[b_{is}] = \begin{bmatrix} (1-s_1) & (s_1+e_1) & 0 & 0 \\ -e_1 & e_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m^{*2}(1-s_2) & m^{*2}(s_2+e_2) \\ 0 & 0 & -m^{*2}e_2 & m^{*2}e_2 \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$[c_{is}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & -1 & +1 \end{bmatrix} \quad (46)$$

et $u f_i$ des fonctions non linéaires des variables x_s et de leurs premières dérivées et de u_1 :

$$\begin{aligned}
 u f_1 &= u_1 \left[(1-n_1 s_1) y_1 - n_1 (1-s_1) x_1 - m \frac{n_1}{2} \left[(1-s_1) x_1 + s_1 y_1 \right]^2 \right] \\
 u f_2 &= u_1 \left[r_1 (1-s_1)^2 h_1 j_1 x_1^2 \right] \\
 u f_3 &= u_1 m^* m \left[(1-n_2 s_2) y_2 - n_2 (1-s_2) x_2 - \frac{1}{m} y_1 \frac{n_2 m^*}{2} \left[(1-s_2) x_2 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + s_2 y_2 \right]^2 \right] \\
 u f_4 &= u_1 m^{*2} m \left[r_2 (1-s_2)^2 h_2 j_2 x_2^2 \right]
 \end{aligned} \tag{47}$$

Pour la première approximation, les valeurs de \dot{a}_r et $a_r \dot{\theta}_r$ sont données comme solutions du système d'équations (38), qui, pour le cas présent, s'écrit:

$$\sum_{r=1}^4 \left[k_{sr} \dot{a}_r \cos \psi_r - k_{sr} a_r \dot{\theta}_r \sin \psi_r \right] = 0 \quad (s = 1, 2, 3, 4) \tag{48}$$

$$\sum_{r=1}^4 \left[-D_{ir} w_r \dot{a}_r \sin \psi_r - D_{ir} w_r a_r \dot{\theta}_r \cos \psi_r \right] = u f_i^* \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

avec $D_{ir} = \sum_{s=1}^4 b_{is} k_{sr}$, produit des matrices b_{is} et k_{sr} , égal à:

$$D_{ir} = \begin{bmatrix} (1+e_1) & e_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{s_1}{(1-s_1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m^{*2} (1+e_2) & m^{*2} e_2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{m^{*2} e_2}{(1-s_2)} \end{bmatrix} \tag{49}$$

où les f_i^* sont les fonctions non linéaires du système initial dans lesquelles on a remplacé les valeurs de x_s et y_s par leurs solutions du système générateur:

$$\begin{aligned}
 x_s &= \sum_{r=1}^4 k_{sr} a_r \cos \psi_r \quad (s=1, 2, 3, 4) \\
 y_s &= \sum_{r=1}^4 -k_{sr} w_r a_r \sin \psi_r \quad (s=1, 2, 3, 4)
 \end{aligned} \tag{50}$$

Dans le cas qui nous occupe, ces équations s'écrivent, pour la chambre amont:

$$x_1 = a_1 \cos \psi_1 - \frac{s_1}{(1-s_1)} a_2 \cos \psi_2 \tag{51}$$

$$y_1 = a_1 \cos \psi_1 + a_2 \cos \psi_2$$

et, pour la chambre aval:

$$x_2 = a_3 \cos \psi_3 - \frac{s_2}{(1-s_2)} a_4 \cos \psi_4 \tag{52}$$

$$y_2 = a_3 \cos \psi_3 + a_4 \cos \psi_4$$

Les valeurs de a_1 sont données par \dot{a}_1 , ces dernières résultant du système d'équations (48).

On constate donc que les oscillations dans chacune des chambres présentent un comportement bien distinct, et se révèlent sans interaction de l'une sur l'autre. Comme nous l'avons vu pour les cheminées différentielles, les amplitudes a_2 et a_4 ont en régime stable peu d'importance vis-à-vis a_1 et a_3 et peuvent être négligées. Avec ces hypothèses, les équations (51) et (52) deviennent, pour la chambre amont:

$$y_1 = x_1 = a_1 \cos \psi_1 \quad (53)$$

$$\dot{y}_1 = \dot{x}_1 = -a_1 w_1 \sin \psi_1$$

et pour la chambre aval:

$$y_2 = x_2 = a_3 \cos \psi_3 \quad (54)$$

$$\dot{y}_2 = \dot{x}_2 = -a_3 w_3 \sin \psi_3$$

Réolvons le système d'équations (48) pour \dot{a}_1 et \dot{a}_3 et substituons D_{ir} et k_{sr} par leurs valeurs respectives; on obtient ainsi pour la chambre amont:

$$\dot{a}_1 = -u_1 w_1 \left[f_1^* - (1-s_1) f_2^* \right] \sin \psi_1 \quad (55)$$

$$\text{où: } f_1^* = (1-n_1) \dot{x}_1 - m \dot{y}_2 - \frac{n_1}{2} \dot{x}_1^2$$

$$f_2^* = r_1 (1-s_1)^2 h_1 j_1 \dot{x}_1^2$$

et pour la chambre aval:

$$\dot{a}_3 = -u_1 w_3 \left[f_3^* - (1-s_2) f_4^* \right] \sin \psi_3 \quad (56)$$

$$\text{où: } f_3^* = m m^* \left[(1-n_2) \dot{x}_2 - \frac{1}{m} \dot{y}_1 - \frac{n_2}{2} \dot{x}_2^2 \right]$$

$$f_4^* = m m^{*2} r_2 (1-s_2)^2 h_2 j_2 \dot{x}_2^2$$

On aboutit à deux équations similaires à celles déjà étudiées dans le cas d'un système à une cheminée différentielle; toutefois, les fonctions non linéaires f_1^* et f_3^* contiennent en plus des variables communes aux deux fonctions.

Pour pouvoir appliquer les méthodes précédentes, il faut donc que les fréquences w_1 et w_3 soient différentes ou, compte tenu de ces valeurs, que le rapport des périodes m^* soit différent de l'unité. Comme l'a remarqué Jeager, c'est le paramètre primordial du problème; si sa valeur s'approche de l'unité, il y a danger de résonance et la stabilité exige des sections beaucoup plus grandes. Mais, le plus souvent le second tronçon a une longueur plus courte que celle du premier, cette restriction n'est donc pas gênante. Sinon, il faut alors avoir recours à des sections de chambres beaucoup plus grandes.

Portant les solutions (53) et leurs dérivées (54) dans les fonctions non linéaires, on obtient pour \dot{a}_1 , en faisant la moyenne des résultats sur la période $\frac{2\pi}{\omega_1}$:

$$\dot{a}_1 = \frac{da_1}{dt_1} = - \frac{u_1}{(1+e_1)^{\frac{1}{2}}} \left[- \frac{(1-n_1)}{2(1+e_1)^{\frac{1}{2}}} a_1 + \frac{2(1+\beta_1)r_1(1-s_1)^3 h_1}{3\pi(1+e_1)} a_1^2 \right] \quad (57)$$

et, pour \dot{a}_3 , en faisant la moyenne des résultats sur la période $\frac{2\pi}{\omega_3}$:

$$\dot{a}_3 = \frac{da_3}{dt_1} = - \frac{u_1 m}{m^*(1+e_2)^{\frac{1}{2}}} \left[- \frac{(1-n_2)}{2(1+e_2)^{\frac{1}{2}}} a_3 + \frac{2(1+\beta_2)r_2(1-s_2)^3 h_2}{3\pi(1+e_2)} a_3^2 \right] \quad (58)$$

où les fonctions f_2^* et f_1^* ont été développées en série de Fourier à cause de la présence des paramètres j_1 et j_2 .

Récrite en fonction des paramètres du système 2, l'équation (58) devient:

$$m^* \frac{da_3}{dt_1} = \frac{da_3}{dt_2} = - \frac{u_2}{(1+e_2)^{\frac{1}{2}}} \left[- \frac{(1-n_2)}{2(1+e_2)^{\frac{1}{2}}} a_3 + \frac{2(1+\beta_2)r_2(1-s_2)^3 h_2}{3\pi(1+e_2)} a_3^2 \right] \quad (59)$$

Basée sur les expressions (57) et (59), la première approximation nous montre que les variations des amplitudes par rapport au temps dans les deux chambres s'effectuent comme si chacune d'elles se produisait séparément. Cela justifie les conclusions auxquelles Meyer¹³ avait abouti au moyen d'équations linéarisées.

VI.- UTILISATION DES RESULTATS.

Compte tenu des considérations précédentes, il s'ensuit que le dimensionnement des cheminées d'équilibre par le critère de stabilité peut donc s'appliquer de façon intégrale à la chambre amont et à la chambre aval respectivement. On peut alors utiliser les méthodes déjà développées pour les systèmes ne comportant qu'une seule chambre.⁴

Dans les nouvelles variables d'amplitude et de temps:

$$\alpha = u a = \frac{A}{H_0} \quad (60)$$

$$\tau = u n t = \frac{T \lambda W_0}{d} \quad (61)$$

le temps efficace d'amortissement est défini par:

$$\theta = \frac{1}{C_1} \left[10.5 - \ln \left(\frac{ch \sqrt{n}}{K} + \frac{C_2}{C_1} \sigma \right) \right] \quad (62)$$

$$\text{où: } C_1 = \frac{(n-1)}{2n(1+e)}$$

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{4(1-s) r (1-s)^2 h^2 (1+\beta) n^{3/2}}{3\pi(n-1) \sqrt{1+e}}$$

En donnant aux paramètres leurs valeurs correspondantes à la partie amont et puis à la partie aval du système, on obtient respectivement le temps efficace d'amortissement dans chacune des chambres. Le dimensionnement et le choix du type de cheminée peuvent alors s'effectuer conformément aux résultats obtenus pour les systèmes ayant une seule cheminée en les appliquant respectivement à la chambre amont et à la chambre aval.

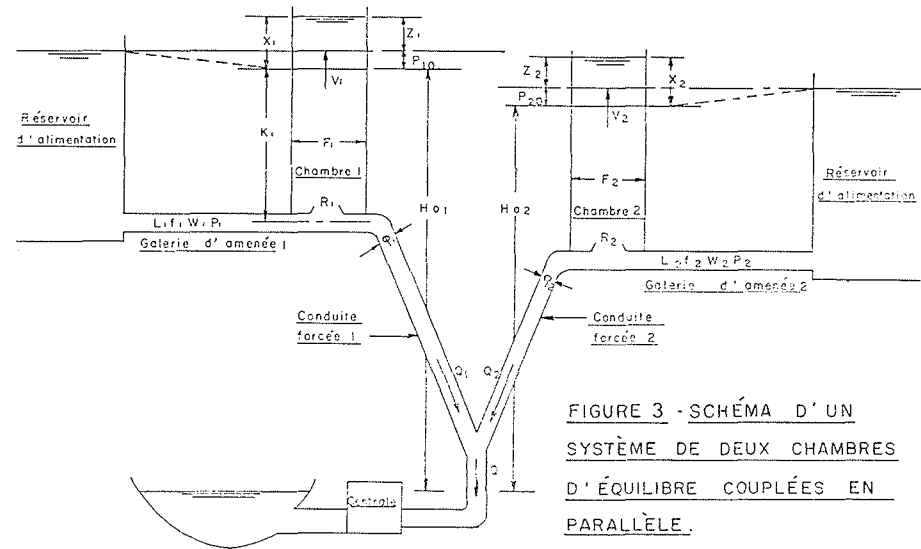
On pourrait aussi, par les mêmes méthodes étudier la stabilité du système de deux chambres d'équilibre couplées en parallèle (figure 3). Sidériades¹³ l'a fait dans le domaine linéaire; les résultats obtenus ont montré que le couplage pouvait permettre une réduction des sections, donc du coût des chambres. Mais comme il existe toujours la possibilité qu'un système soit appelé à alimenter seul, temporairement, la centrale, il vaut donc mieux, généralement projeter chaque chambre séparément de façon qu'elle soit stable. Par conséquent, les remarques précédentes s'appliquent également à ce système.

VII.- CONCLUSION.

L'analyse de la stabilité dans le champ des amplitudes réelles d'un système comportant une chambre à l'amont et une chambre à l'aval des turbines nous amène à la conclusion suivante: le dimensionnement des chambres d'équilibre par le critère de stabilité s'effectue comme si chaque chambre agissait séparément sur le système.

On peut alors appliquer, pour choisir le type de cheminée, à l'amont et à l'aval, les résultats déjà obtenus pour le temps efficace d'amortissement des oscillations dans une chambre unique.

Enfin, le rapport des périodes s'est révélé le paramètre le plus important; pour éviter le danger du phénomène de résonance, il faut viser à ce que ce rapport soit nettement différent de l'unité. Sinon on doit recourir à des sections beaucoup plus grandes.



REFERENCE BIBLIOGRAPHIQUE

- (1) ESCANDE L. & HURON R. : "Stabilité de deux chambres d'équilibre respectivement solidaires des canaux d'amenée et de fuite". La Houille Blanche, VIII, No 5, Octobre 1953, pp. 647-654.
- (2) JEAGER C. : "De la stabilité des chambres d'équilibre et des systèmes de chambres d'équilibre". Schweizerische. Bauzeitung, Vol. 122, Nos 21, 24, 25, 26, Nov./Déc. 1943.
- (3) JEAGER C. : "Le système à double chambre d'équilibre". La Houille Blanche, no 4, Sept. 1957, pp. 481-495. Water Power, Juillet 1957, pp. 253-258, Août 1957, pp. 301-305.
- (4) MICHEL B. & OUELLET Y. : "Dimensionnement des cheminées d'équilibre par le critère de stabilité". Transactions de l'Institut Canadien des Ingénieurs EIC-70-HYDEL 1, Vol 13, No C-2, Mars 1970.
- (5) OUELLET Y. : "Analyse des systèmes de chambres d'équilibre dans le domaine non linéaire". Thèse de doctorat, Laval 1967.
- (6) CALAME J. & GADEN D. : "Théorie des chambres d'équilibre". Lausanne, La Concorde 1926.
- (7) VARLET H. : "Usines de dérivation". Tome II, Eyrolles, 1959.
- (8) STUCKY A. : "Chambres d'équilibre". Science et Technique, Lausanne 1958.
- (9) JEAGER C. : "Present Trends in Surge Tank Design". Proc. Inst. Mech. Eng. Vol. 168, 1954.
- (10) ROUTH E.J. : "On the Stability of Motion". Macmillan, London, 1877.
- (11) BUTENIN N.V. : "Elements of the Theory of Nonlinear Oscillations". English Translation 1965, Blaisdell Publishing Company.
- (12) KRYLOFF N. & BOGOLIUBOFF N. : "Introduction to Nonlinear Mechanics". Princeton University Press, Princeton, N.J., 1943.
- (13) MEYER R. : "Conditions analogues à celles de Thoma pour une installation hydro-électrique ayant une cheminée d'équilibre à l'amont et une autre à l'aval des turbines". La Houille Blanche, Oct. 1953, pp. 640-646.
- (14) SIDERIADIS L. : "Stabilité de deux cheminées d'équilibre couplées sans perte d'insertion". La Houille Blanche, NO 4, 1958, pp. 442-449, C.R.A.S. t.249, Déc. 1959, p. 2486.