



QUELQUES ASPECTS DES ÉCOULEMENTS SECONDAIRES DANS LES FLUIDES TOURNANTS CONFINÉS

par **J.-C. GUILLOUD**

Docteur ès-Sciences
Ingénieur à la SOGREAH
Ancien attaché de recherches au C.N.R.S.

et **J. ARNAULT**

Assistant à l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble. U.E.R. de Mécanique

Introduction

Les écoulements tournants, caractérisés par l'existence d'une composante de la vitesse perpendiculaire au plan méridien dite composante tangentielle, posent le problème complexe de l'interaction entre mouvement dans les couches limites, courants secondaires et comportement de la vorticité.

A la giration est associé un gradient radial de pression évoluant axialement à cause de l'amortissement de la rotation provoqué généralement par la présence des parois. Le champ des pressions n'étant pas uniforme, il en résulte une modification de la composante axiale du mouvement. Ce mouvement méridien du fluide qui se superpose à la rotation est appelé «  coulement secondaire ». Dans les cas de confinement important, ces courants secondaires rejoignent les couches limites et entraînent la turbulence de paroi dans l'écoulement interne. Ces situations qui sont parfois recherchées pour améliorer les transferts de masse ou de chaleur, doivent, autant que possible, être évitées, dans les procédés de séparation par centrifugation [1] ou dans les cyclones dépoussiéreurs.

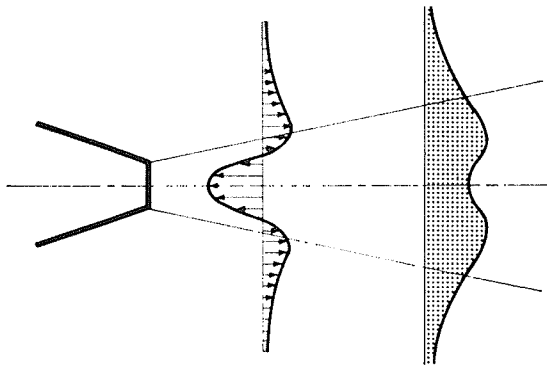
Cet article est consacré à un rappel sommaire de quelques écoulements tournants typiques, plus ou moins confinés, pour lesquels les mouvements secondaires sont bien connus, soit théoriquement, soit expérimentalement. On y présente en particulier une nouvelle classe de solutions exactes des équations de Navier-Stokes décrivant des écoulements en rotation fortement marqués par les courants secondaires. Dans le troisième paragraphe on s'intéresse au mouvement rampant d'un fluide tournant dans les

butées à rainures spirales. Ces rainures permettent de réaliser un écoulement secondaire intense de manière à créer un gradient radial de pression favorable à la sustentation. Ce type de paliers fluides auto-sustentateurs pourra être promu à un bel avenir le jour où l'on saura maîtriser les problèmes technologiques ardu qu'il pose. En effet, pour des fluides compressibles, il y a un intérêt évident à faire tourner très rapidement les machines :   puissance donnée, on diminue énormément leur volume. Un autre intérêt de ces paliers est de pouvoir assurer la sustentation avec une partie du gaz véhiculé ce qui évite tous les problèmes d'étanchéité dynamique tout en étant assuré de la non pollution du fluide transport .

1. — Quelques exemples d'écoulements secondaires typiques dans les fluides en rotation

La situation la plus simple est celle du fluide tournant non confiné évoluant en milieu infini. C'est le cas d'un jet libre (fig. 1) débouchant d'une buse avec une certaine giration. L'épanouissement d'un tel jet, plus important qu'en l'absence de rotation à cause notamment d'une augmentation de la turbulence, s'accompagne d'une diminution du mouvement circulaire.

Du fait de la dépression sur l'axe, conséquence de la rotation, la vitesse axiale décroît, et dans le cas des fortes rotations, peut même s'annuler où devenir négative. Il existe alors un bulbe de recirculation, circonstance



1/ Evolution schématique des vitesses axiales dans un jet tournant rapidement.
Axial velocity variation in a quickly rotating jet.

d'ailleurs assez favorable pour régler plus aisément la longueur des flammes dans les fours. Une étude systématique des vitesses moyennes et des caractéristiques turbulentes a été faite par M. Darrigol [2] pour des jets chauds et froids. Une solution affine particulière, mais très significative d'un tel écoulement a été obtenue, dans le cas d'un jet à poussée totale nulle, par A. Craya [3].

La présence des parois aide aussi à l'atténuation de la rotation qui est la cause de l'apparition de mouvements secondaires. L'exemple le plus typique est l'écoulement de Bödewadt [4].

On considère un fluide tournant en bloc au-dessus d'une plaque plane infinie et immobile (fig. 2). L'expérience montre et l'existence d'une solution exacte confirme la présence, au voisinage de la paroi, d'une couche limite.

A travers cette dernière, le gradient de pression

$$dp/dr = \rho\Omega_0 r^2$$

régnant loin au-dessus de la paroi fixe se transmet intégralement dans cette couche limite en sorte que les particules proches du plan et soumises à des forces centrifuges trop faibles pour équilibrer l'action des pressions se dirigent nécessairement vers l'axe. Ce phénomène élémentaire qui reçoit chez les anglo-saxons le nom de « teacup effect » est évidemment mis à profit dans les agitateurs.

Dans cette présentation, il est difficile de ne pas mentionner l'écoulement de Karman [5] créé par la rotation d'un disque dans un fluide immobile à l'infini. C'est en quelque sorte le cas symétrique du précédent. Au voisinage immédiat de la paroi, il existe encore une couche limite dans laquelle les particules, qui ne sont soumises à aucun gradient radial de pression puisque le fluide supérieur est quasiment au repos, subissent uniquement l'action des forces centrifuges et s'éloignent de l'axe en spiralant.

Cet écoulement mérite qu'on s'y arrête quelques instants. Il est caractérisé par une couche limite d'épaisseur constante. La théorie montre en effet que la production de la vorticité à la paroi est uniforme. Elle diffuse, tout comme la température, mais se trouve limitée dans sa propagation vers le haut par la convection, vers le bas du fluide supérieur « sain », aspiré d'une manière également uniforme et qui, lui, ne possède évidemment aucune vorticité.

On pourrait être tenté, dans ces conditions, de croire que la couche limite s'accroît avec la rotation du disque. En réalité, il se trouve que plus la rotation est importante, plus l'effet de pompage centrifuge diminue la propagation de la rotation. La convection prend le dessus sur la diffusion de la vorticité et l'épaisseur de la couche limite tend vers zéro avec $\Omega_0^{-1/2}$.

La figure 4 regroupe les configurations précédentes. On y voit les courants secondaires qui sont à l'origine de la transmission de puissance dans les coupleurs hydrauliques où l'on améliore évidemment le transfert par une association pompe-turbine.

1.1 Ecoulement dans les conduites cylindriques fixes.

Les exemples précédents qui mettent en jeu quelques mécanismes simples possèdent l'avantage d'être bien connus d'une manière théorique. Par contre, pour le confinement dans un tube cylindrique, et comme c'est souvent le cas en mécanique des fluides, la théorie ne « suit pas » et le relais doit être pris par l'expérience.

Ainsi, de nombreuses études expérimentales ont été faites sur les écoulements tournants dans des conduites cylindriques fixes. Elles ont eu souvent pour motif l'amélioration des performances des échangeurs de chaleur. La mise en rotation d'un fluide caloporteur permet en effet d'obtenir un écoulement plus turbulent et par suite une amélioration des coefficients d'échanges thermiques (*). Corrélativement, il y a accroissement des pertes de charge, d   essentiellement à la disparition de l'énergie cinétique de rotation. De ce fait, quelques travaux plus fondamentaux ont été axés sur l'amortissement du mouvement circulaire en conduite fixe.

C. Ozgur [6] s'est intéressé aux écoulements en conduites cylindriques et divergentes placées au refoulement d'un ventilateur muni, à son aval immédiat, d'un dispositif de mise en rotation par pales orientables. Il a constaté, pour des nombres de Reynolds compris entre 5 et $6 \cdot 10^5$, que le profil des vitesses tangentielles était constitué, au centre, d'une zone en rotation solide, suivie au voisinage de la paroi et en dehors de la couche limite, par une zone vortex.

D'après ces essais, A. Fortier [7] a pu établir que le rapport entre les composantes tangentielle et axiale de la vitesse au voisinage de la paroi décroît exponentiellement. Il se trouve que le coefficient de cet amortissement se confond avec le coefficient de perte de charge de l'écoulement purement axial de même débit. Dans la gamme des nombres de Reynolds étudiée, on peut en déduire que la rotation est divisée par trois sur quatre vingt diamètres.

F. Kreith et O.K. Sonju [8] opérant également en conduite cylindrique avec des nombres de Reynolds axiaux compris entre 10^4 et 10^5 ne retrouvent pas le coefficient de A. Fortier. Ils signalent, par ailleurs, que ce coefficient est d'autant plus important que le nombre de Reynolds est moins élevé.

Quoi qu'il en soit, ces études expérimentales montrent que le gradient axial de pression évolue nettement moins à la paroi que sur l'axe. Ainsi, l'amortissement de la rotation se traduit par une remontée de pression au centre du tube. En conséquence, le couplage entre les vitesses tangentielles et axiales qui constitue l'un des traits fondamentaux de la mécanique du fluide tournant peut s'expli-

(*) Cette circonstance se produit surtout pour les liquides. Pour les gaz, les effets de la stratification en densité dus à la centrifugation, si ils sont suffisants, peuvent empêcher la turbulence [1].

quer de la même manière que dans le cas du jet libre en giration.

Il est d'ailleurs aisé, en régime laminaire, de comparer les gradients de pression sur l'axe et à la paroi. Les vitesses radiales étant généralement faibles, le gradient transversal de pression est donné par

$$\partial p / \partial r = \rho V^2 / r$$

où V est la composante tangentielle du vecteur vitesse. L'écart de pression entre l'axe et la paroi pour un tube de rayon a s'écrit :

$$P_{\text{paroi}} - P_{\text{axe}} = \int_0^a \rho \frac{V^2}{r} dr$$

L'équation axiale du mouvement écrite à la paroi précise que :

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{P_{\text{paroi}}}{\rho} \right) = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} \right)_{r=a}$$

En définitive, l'ordre de grandeur du gradient de pression sur l'axe est :

$$\frac{d}{dx} \frac{p_0}{\rho (\Omega_{0a})^2} = \frac{1}{\text{Re} \sigma^2} - \omega \omega'$$

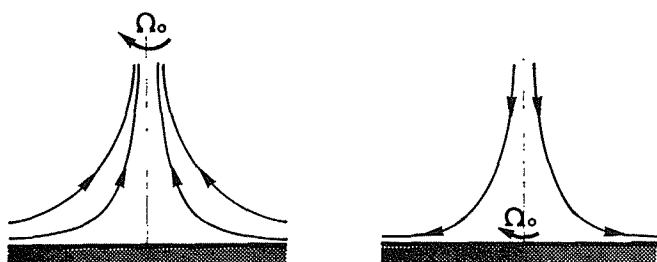
Dans cette expression Ω_0 est la vitesse angulaire d'entrée; Re le nombre de Reynolds axial formé avec la vitesse axiale moyenne U; $\sigma = \Omega_{0a} U^{-1}$ le nombre de Rossby; ω la rotation angulaire rapportée à Ω_0 dans la section d'abscisse réduite $x = z a^{-1}$.

Pour des nombres de Reynolds et de Rossby élevés, on constate que la remontée de pression sur l'axe n'est due pratiquement qu'à l'amortissement de la rotation. Les figures 5 et 6 extraites des essais de Mc. Neil [9] montrent les courants de retour et l'évolution des vitesses tangentielles dans un convergent suivi d'un tube cylindrique.

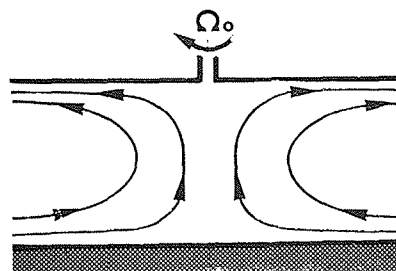
1.2 Ecoulements tournants dans les tubes de Ranque et les chambres vortex.

Pour des rotations intenses, ces appareils sont le siège d'écoulements complexes liés à l'existence de couches limites tridimensionnelles en interaction avec de violents courants secondaires. C'est dire que de tels mouvements, qui manquent de pureté, n'ont pas été étudiés en vue de découvertes fondamentales mais en vue de certaines applications.

En 1939, le physicien français Ranque découvre qu'il est possible par une violente centrifugation de séparer un débit d'air à la température ambiante en deux écoulements chaud et froid. L'appareil (fig. 7) est constitué par

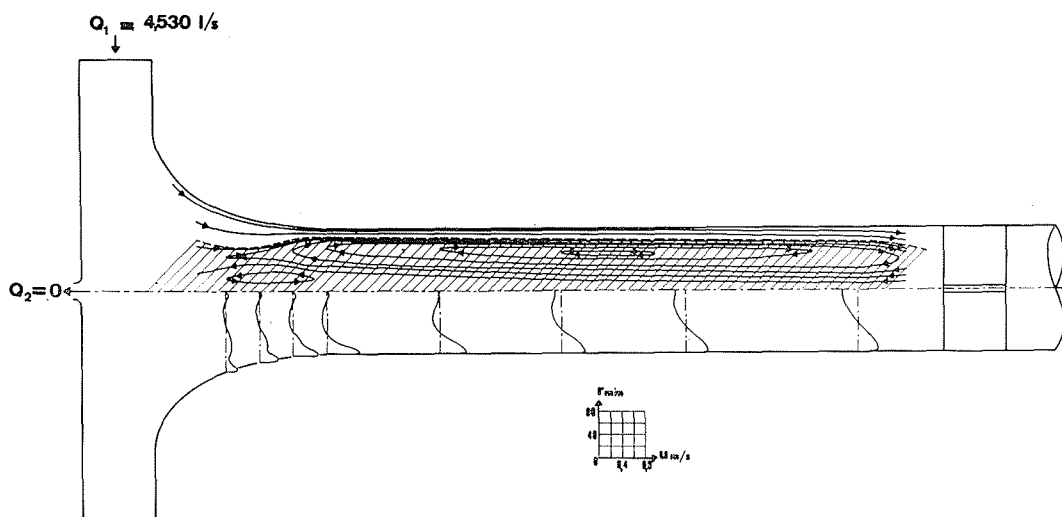


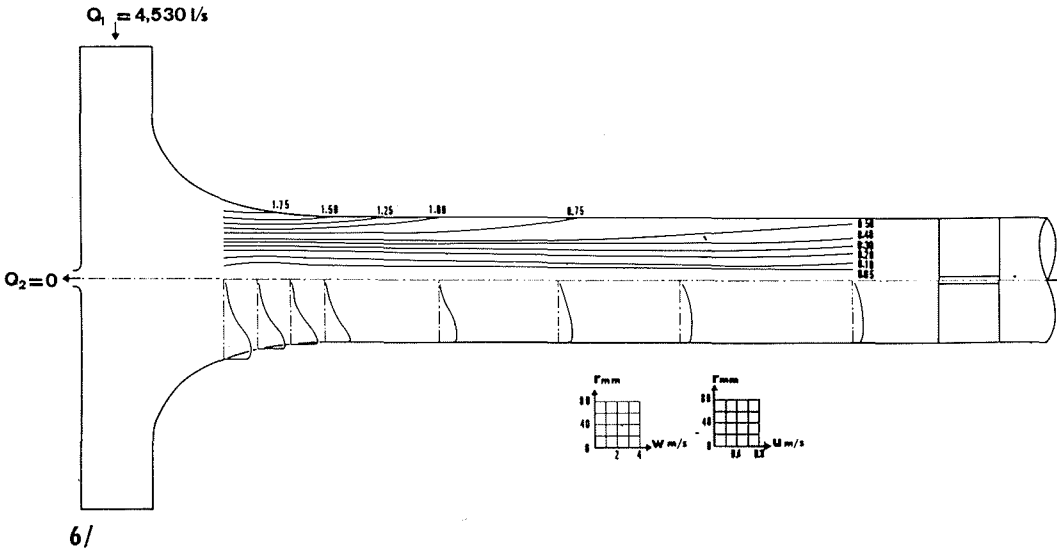
2-3/ Schémas des courants secondaires dans les écoulements de Bödewadt et de Karman.
Secondary currents in Bödewadt and Karman flows.



4/ Ecoulement secondaire entre un disque tournant et un disque fixe.
Secondary flow between fixed and rotating discs.

5/ Evolution des vitesses axiales et lignes de courant dans le tube vortex (débit secondaire nul). D'après Mac-Neil.
Variation of streamlines and axial velocities in a vortex tube without secondary flow (after Mac-Neil).





6/

Evolution des vitesses tangentielles et lignes d'égale circulation dans le tube vortex (débit secondaire nul). D'après Mac-Neil.

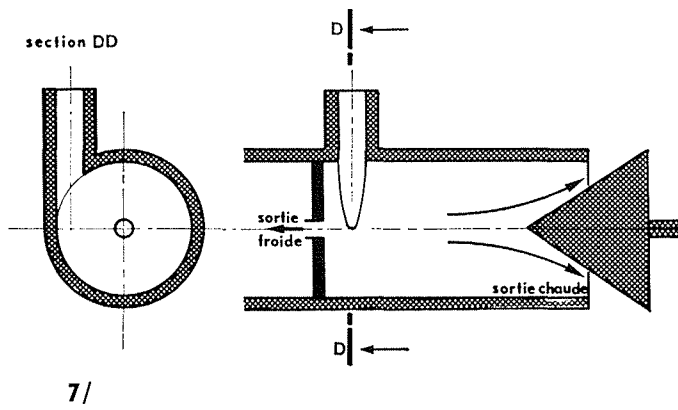
Variation of tangential velocities and equal circulation contours in a vortex tube without secondary flow (after Mac-Neil).

7/

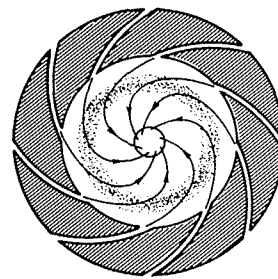
Schéma d'un tube de Ranque.
Diagram of a Ranque tube.

8/

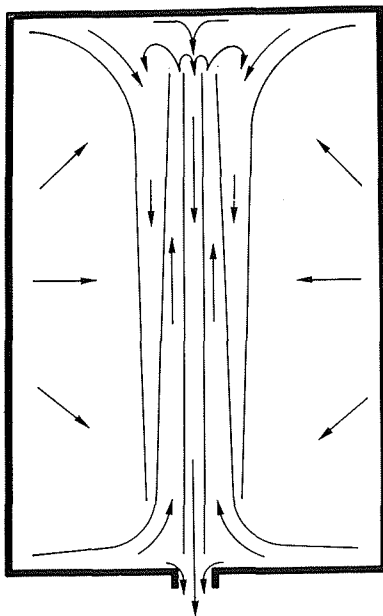
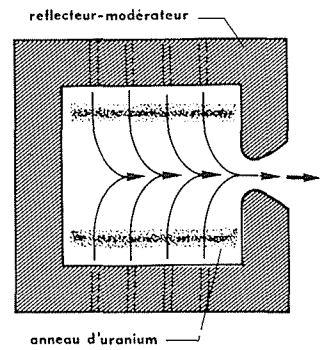
Schéma d'un réacteur nucléaire.
Diagram of a nuclear reactor.



7/

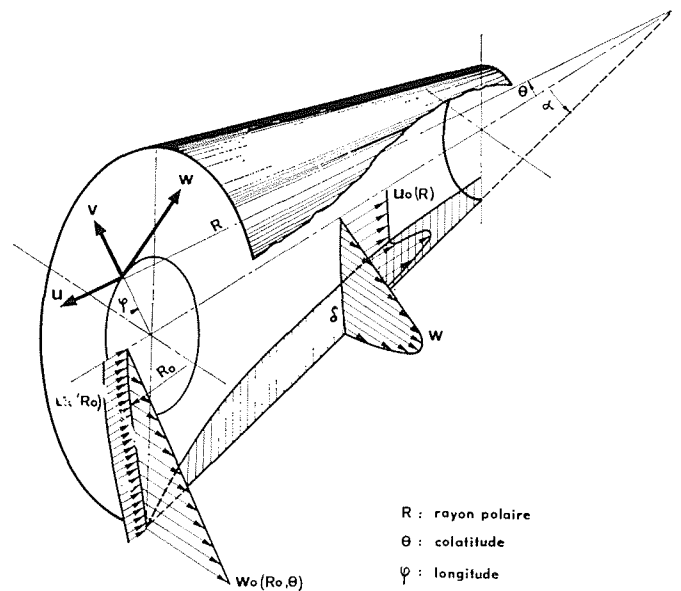


8/



9/ Schéma des courants secondaires dans une chambre vortex « injection tangentielle ». D'après D.H. Ross [10]

Secondary flows in a tangential-entry vortex chamber (after D.H. Ross [10]).



10/

R : rayon polaire
 θ : colatitude
 φ : longitude

une portion de cylindre muni d'une croce d'injection tangentielle; l'admission se fait à 3 ou 4 bars.

Le phénomène de Ranque a évidemment suscité longtemps l'intérêt des thermodynamiciens et, de ce fait, peu d'études ont été entreprises pour en connaître l'écoulement interne. On sait cependant qu'il existe un bulbe de recirculation important dans lequel l'air emprisonné s'échauffe par dissipation. Ce « point chaud » évidemment localisé au voisinage de la paroi réchauffe l'air circulant à la périphérie vers la droite. La sortie froide, située dans l'axe, est alimentée par de l'air qui subit une détente radiale importante.

A l'origine des études sur les chambres vortex existe un projet américain de réacteur nucléaire aussi élégant qu'ambitieux (fig. 8). Le principe est d'injecter, tangentiellement aux parois d'une chambre cylindrique, un comburant gazeux léger ainsi qu'un combustible lourd (Uranium) de sorte que la centrifugation permette de contenir cet uranium loin des parois.

Le comburant, en diffusant à travers l'anneau d'uranium, augmente son énergie interne avant de se détendre dans une tuyère de propulsion qui fait suite à la chambre vortex.

Le problème est de contenir cet uranium sans en entraîner trop dans la tuyère de propulsion. Malheureusement, les courants secondaires extrêmement violents qui prennent naissance dans la chambre ne permettent pas un maintien suffisant du combustible lourd (fig. 9). Pour ces raisons, le projet a dû être abandonné.

La figure 9 illustre parfaitement les difficultés d'approche théorique du problème des fluides tournants fortement confinés. Il n'est plus possible de séparer l'écoulement principal de l'écoulement secondaire et l'on doit être admiratif des tentatives de calculs effectués notamment par Lewellen [10] et Rosenzweig-Lewellen [11].

2. — Ecoulements tournants dans les cônes

Lorsqu'un fluide tournant rapidement aborde un convergent, on constate que le débit passe en grande partie au voisinage des parois. Cette accélération périphérique est bien mise en évidence sur la figure 5.

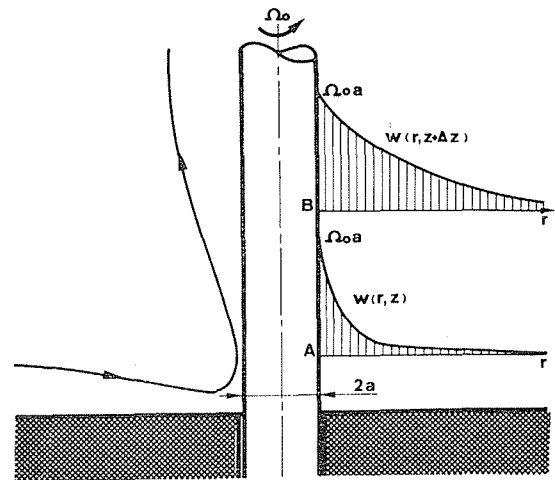
G. I. Taylor [12] a précisé, par un calcul global, l'évolution de la couche limite de paroi en posant d'emblée la nullité du gradient de pression et des vitesses axiales au centre d'un convergent conique. Il suppose, pour cela, l'existence au centre du cône d'un vortex pur d'intensité Γ_0 .

Ce schéma conduit, à coup sûr, à la description du phénomène périphérique puisque le fluide proche des parois, en convergeant vers l'axe ne peut que rencontrer des pressions décroissantes. Cette étude ne permet pas, pour un débit et un moment cinétique d'entrée donnés, de prévoir la portion du débit qui passera au voisinage des parois ainsi que l'interaction entre vitesses axiales et tangentielles dans le cas des fortes rotations.

C'est en voulant améliorer ce schéma que nous avons découvert une nouvelle classe de solutions exactes des équations de Navier-Stokes. Il se trouve, qu'en coordonnées sphériques (fig. 10), et en posant les vitesses sous la forme :

$$u = \frac{v}{R} H(\theta); \quad V = -\frac{v}{R} h(\theta);$$

$$w = \frac{\Gamma_0}{R \sin \theta} G(\theta)$$



11/Ecoulement induit par un arbre tournant perpendiculairement à une plaque infinie.

Flow induced by a rotating shaft perpendicular to an infinite plate.

Les équations de Navier se ramènent à un système différentiel ordinaire du cinquième ordre. Pour l'aspect analytique et numérique de ce problème, on pourra consulter les références [1] et [13]; en ce qui concerne l'interprétation physique de ces solutions découvertes par hasard, il y a deux possibilités :

- soit l'écoulement créé par un fil vortex, c'est-à-dire un arbre infiniment fin mais tournant infiniment vite de façon à induire une circulation donnée Γ_0 sur l'axe d'un cône fermé rempli d'un fluide visqueux;
- soit l'écoulement d'un fluide visqueux à travers une grille d'aubes infiniment minces réparties uniformément sur un cône.

2.1 Ecoulement du fil-vortex.

Considérons (fig. 11) un arbre de rayon a tournant à la vitesse angulaire Ω_0 dans un fluide visqueux au-dessus d'un plan fixe. En tout point de l'arbre, la vitesse du fluide est $\Omega_0 a$. Loin, au-dessus de la plaque, la répartition radiale des vitesses tangentielles est une portion de vortex. Plus on se rapproche de la paroi, plus les profils $W(r, z)$ deviennent déficitaires. De ce fait, la pression au point A est supérieure à la pression au point B.

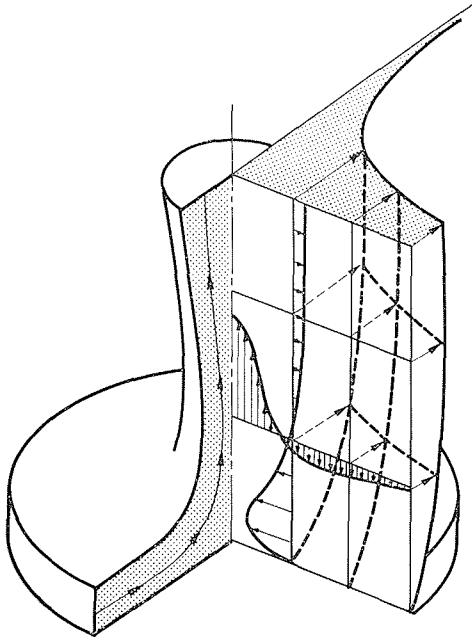
La différence des pressions aux niveaux A et B s'écrit donc approximativement :

$$P_A - P_B = \rho \int_a^\infty (W_B^2 - W_A^2) \frac{dr}{r}$$

Ce gradient de pression axial est le moteur de l'écoulement secondaire induit (fig. 12).

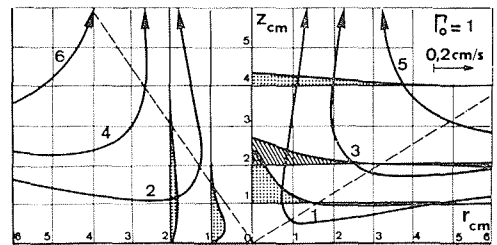
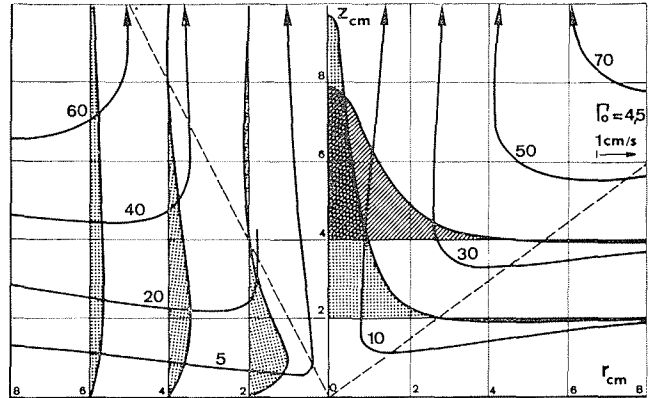
L'évolution des vitesses axiales, radiales et les lignes de courant sont données aux figures 13 et 14. La forme des vitesses axiales, portées en coordonnées cylindriques dans le cas du plan, peut faire penser à celle d'un jet.

Le phénomène d'éjection qui se produit à la jonction du fil et de la paroi (vitesses en $1/R$) se propage d'autant plus loin du plan que la circulation augmente ou que la



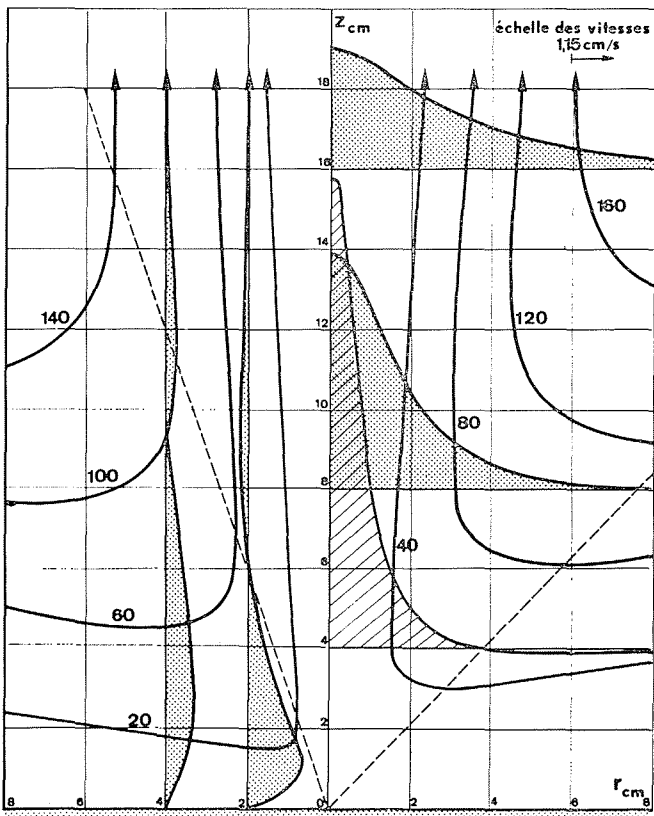
12/ Schéma de l'écoulement créé par un fil vortex au-dessus d'un plan fixe.

Flow induced by a line vortex above a fixed plane.



13/ Ecoulement dans un plan méridien pour $\Gamma_0 = 4,5$ et $\Gamma_0 = 1$; $\nu = 1$ stokes; $\rho = 1$ g/cm³; lignes de courant citées en cm²/s.

Flow in a meridional plane for $\Gamma_0 = 4.5$ and $\Gamma_0 = 1$; $\nu = 1$ stokes; $\rho = 1$ g/cm³; streamlines given in cm²/s.

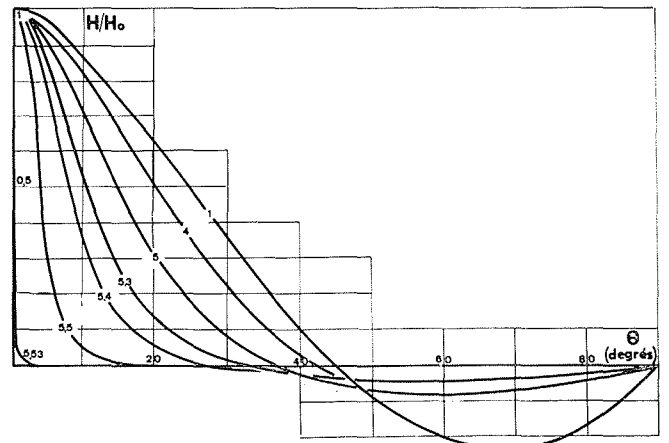


14/ Ecoulement secondaire pour $\Gamma_0 = 5,20$; $\nu = 1$ stokes; $\rho = 1$ g/cm³.

Secondary flow for $\Gamma_0 = 5.20$; $\nu = 1$ stokes; $\rho = 1$ g/cm³.

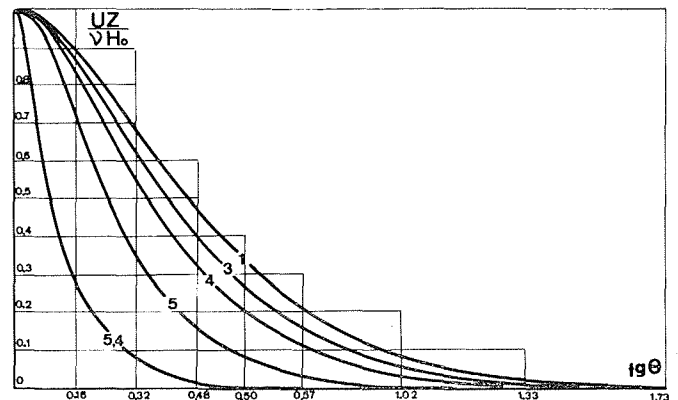
16/ Nombre de Reynolds axial norme par H_0 en fonction de $\tan \theta$ et Γ_0/ν .

Axial Reynolds number based on $H_0 \tan \theta$ and Γ_0/ν .



15/ Evolution de $H(\theta)/H(0)$ en fonction de Γ_0/ν , cas du plan.

$H(\theta)/H(0)$ vs Γ_0/ν for a plane.



viscosité diminue. Les figures 15 et 16 montrent que l'écoulement secondaire devient de plus en plus concentré au voisinage de l'axe lorsque le paramètre Γ_0/ν s'approche de la valeur 5,4.

La caractéristique la plus surprenante de cet écoulement est consignée sur la figure 17. On y constate que pour une viscosité donnée, le fluide tourne d'autant moins que le vortex central est plus puissant.

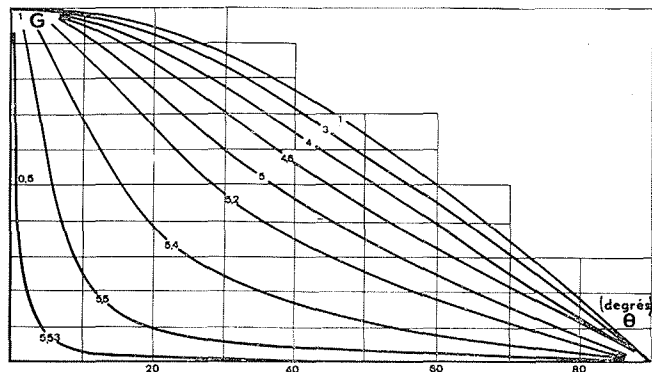
Pour des circulations faibles, l'inertie est négligeable et en particulier les vitesses radiales sont quasiment nulles. On peut alors montrer que la fonction $G(\theta)$ est pratiquement égale à $\cos \theta$. Dans ces conditions, la composante la plus importante du tourbillon, à savoir ω_R , diffuse librement dans tout l'espace à partir du fil-vortex :

$$(\omega_R \# - \Gamma_0/R^2)$$

Corrélativement, les lignes de courant sont à peu près circulaires, même au voisinage de la paroi, comme le montre la figure 18.

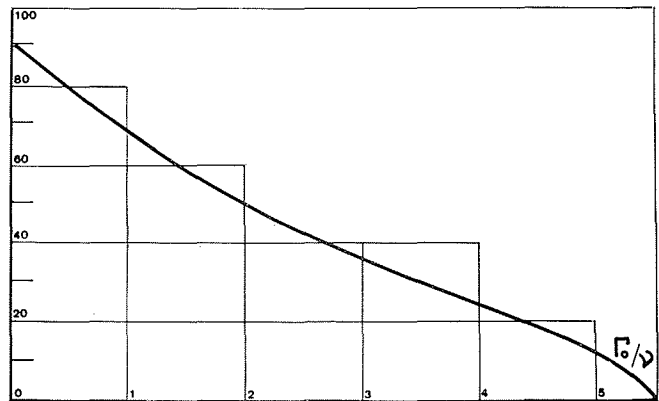
Pour des rotations plus importantes, tout semble se passer comme si le fil-vortex aspirait de l'infini du fluide « non tournant » et que cette convection centripète empêchait complètement la diffusion de la vorticité qui, de ce fait, reste confinée au centre. L'écoulement secondaire devient alors purement radial comme le confirme :

- la diminution de l'angle des hélices au voisinage de la paroi (fig. 18);
- la red croissance du frottement tangentiel sur le plan après son passage par un maximum pour $\Gamma_0/\nu = 4$ (fig. 19);
- l'important accroissement du frottement radial (fig. 20).



17/ Evolution de la répartition des circulations en fonction du paramètre Γ_0/ν ; cas du plan.

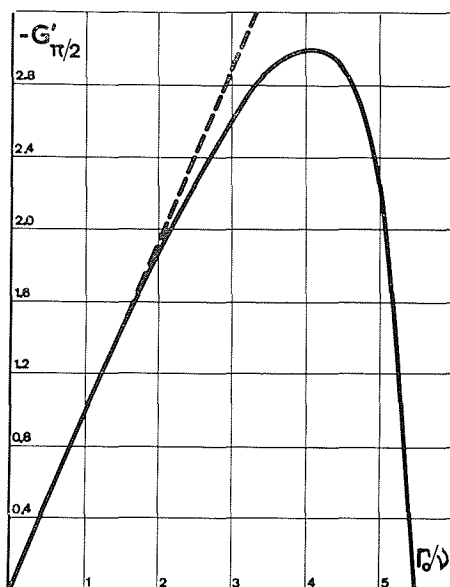
Circulation distributions as a function of parameter Γ_0/ν (plane case).



18/ Variation de l'angle des hélices à la paroi en fonction de Γ_0/ν ; cas du plan.

Variation of propeller angle at the wall with Γ_0/ν (plane case).

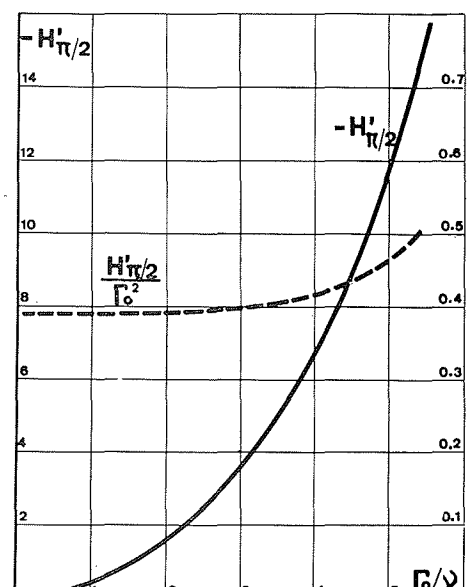
Γ_0/ν	$-G'_{\pi/2}$
1	0,9822
2	1,897
3	2,6099
4	2,9933
4,5	2,3978
5	2,3533
5,2	1,3448
5,3	1,4428
5,35	1,1859
5,4	0,87998
5,5	0,18224
5,52	0,05960
5,53	0,917571



19/ Frottement tangentiel $dG/d\theta$ à la paroi dans le cas du plan ($\alpha = \pi/2$).

Tangential friction at the wall $dG/d\theta$ in the plane case ($\alpha = \pi/2$).

Γ_0/ν	$-H'_{\pi/2}$
1	0,3878
2	1,571
3	3,6189
4	6,7029
4,5	8,7648
5	11,381
5,2	12,691
5,3	13,445
5,35	13,849
5,4	14,271
5,5	15,085
5,52	15,215
5,53	15,288



20/ Frottement axial $dH/d\theta$ à la paroi dans le cas du plan.

Axial friction at the wall $dH/d\theta$ in the plane case.

Des remarques précédentes il ressort, en définitive, que l'écoulement dégénère pour une valeur de Γ_0/ν très légèrement supérieure à 5,53. On peut démontrer que le domaine d'existence est borné [13]. On trouvera dans [1] les résultats pour des cônes de demi-angle au sommet 30, 45 et 60°. L'allure de l'écoulement y est analogue. La valeur de la circulation limite augmente quand on referme l'angle du cône.

2.2 Ecoulement vortex dans une « grille d'aubes ».

L'interprétation précédente est liée au choix d'une circulation nulle sur l'axe. Avec la même séparation de variables, on peut envisager d'imposer au système la condition $G(\alpha) = 0$. D'après la monotonie de $G(\theta)$, la circulation doit prendre une valeur non nulle sur la paroi du cône. En supposant qu'il existe des vitesses radiales à la paroi, évidemment en R^{-1} , il est possible d'interpréter l'écoulement de la manière suivante. A la frontière du cône, le rapport entre la vitesse radiale $-\nu/R h(\alpha)$ et la vitesse tangentielle $\Gamma_0/R \sin \alpha$ est constant. Cette condition suggère l'image d'une grille d'aubes infiniment plates (fig. 21) inclinées sur le cône d'un angle β tel que

$$\text{tg } \beta = \frac{\nu}{\Gamma_0} h(\alpha) \sin \alpha$$

et supposées alimentées suivant la loi de débit :

$$Q(R) = 2 \pi \nu R h(\alpha)$$

Dans le cas d'un plan et si $\beta = 0$, on obtient l'écoulement créé par une paroi non solide tournant en vortex (fig. 22). Ce schéma qui constitue une réplique de la solution exacte de Karman [5] est d'un intérêt bien moindre à cause de cette condition à la limite très particulière. Si β est non nul, la solution est plus intéressante. On notera (fig. 23) que pour des rotations suffisamment grandes, il apparaît un courant de retour qui s'explique [3] par l'existence d'un gradient de pression positif au voisinage de l'axe de symétrie de l'écoulement.

3. — Portance des butées hydrodynamiques à rainures spirales

L'idée de réaliser des rainures dans une butée pour assurer une sustentation sans contact est due, semble-t-il, à Gumbel [14] (1925). Whipple [15] fit les premiers essais en 1949. Les premiers calculs théoriques sont dus à Muijderman [16] en 1963. Leur méthode consistait essentiellement à se donner le champ des pressions comme fonction linéaire des coordonnées, l'expérience aidant à déterminer les coefficients inconnus. Depuis, des calculs beaucoup plus complets ont été effectués; on peut citer par exemple les travaux de la Société Alcatel consistant à intégrer numériquement l'équation de Sommerfeld dans tout l'espace occupé par le fluide y compris les rainures. Du fait de la complexité des conditions aux limites, les difficultés du calcul sont considérables.

On se propose de montrer ici qu'un calcul élémentaire guidé par les idées de Reynolds sur la lubrification permet d'aboutir à de bons ordres de grandeur, suffisants pour un avant-projet.

3.1 Principe de fonctionnement des butées et principe du calcul.

Le plateau supérieur (fig. 24), tournant à grande vitesse et à quelques microns du plateau inférieur, entraîne par viscosité le fluide dans les rainures. Le débit ainsi véhiculé vers le centre est obligé de ressortir entre les deux plateaux. Le laminage qui en résulte impose un gradient radial de pression négatif engendrant la portance du plateau supérieur.

Le principe de notre calcul est d'appliquer la théorie de la lubrification de Reynolds entre les deux parois supposées lisses, le plateau inférieur étant alimenté par le débit sortant des rainures. Pour des raisons constructives, ces rainures sont supposées être des spirales logarithmiques.

3.2 Calculs.

Dans un but de simplification extrême, on considère que la vitesse tangentielle s'écrit :

$$v(r, z) = r\Omega_0 z/\delta$$

Compte tenu des conditions $u(0) = u(\delta) = 0$ pour les vitesses radiales, l'équation radiale du mouvement (*) :

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} = \frac{v^2}{r} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

s'intègre deux fois pour donner $u(r, z)$ et on en déduit le débit $Q(r)$ traversant toute portion de cylindre de rayon r limitée par les deux plateaux

$$Q(r) = 2 \pi \int_0^\delta u r dz = \frac{\pi}{20} r^2 \delta \Omega_0 \alpha - \frac{\pi}{6 \Omega_0} \frac{\delta r \alpha}{\rho} \frac{dP}{dr} \quad (1)$$

$\alpha = \Omega_0 \delta^2/\nu$ est le nombre de Reynolds caractéristique du problème.

Pour expliciter le gradient de pression, on doit préciser l'entraînement visqueux afin de déterminer $Q(r)$. La contrainte « motrice », projection suivant l'axe de la rainure de la contrainte tangentielle de frottement s'écrit :

$$\tau_c = \mu \frac{r}{\delta + h} \Omega_0 \cos \varphi$$

Sur les parois de chaque rainure, existe une contrainte de frottement τ_f de l'ordre de $2 \mu U_0(r)/h$ ou $U_0(2)$ est la vitesse moyenne dans un canal au rayon r . En traduisant l'équilibre pression-frottement dans une rainure de largeur a :

$$\tau_c a dx = dpah + \tau_f a dx$$

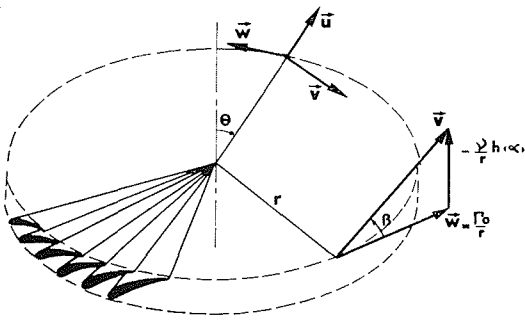
$dx = dr/\sin \varphi$ est l'élément de longueur de la tranche fluide considérée. On obtient :

$$U_0(r) = \frac{r \Omega_0 \cos \varphi}{2(1 + \beta)} + \alpha \frac{\sin \varphi}{2 \rho \Omega_0 \beta^2} \frac{dP}{dr} \quad (2)$$

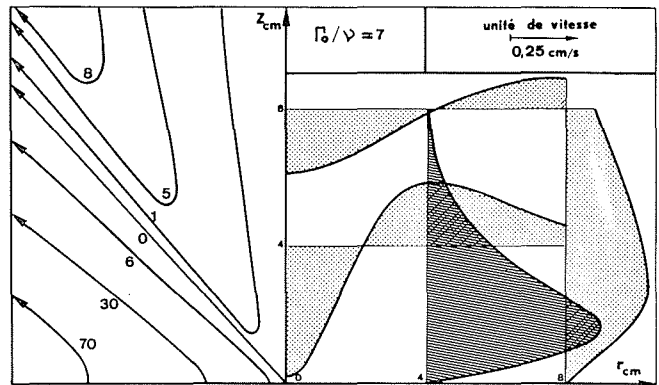
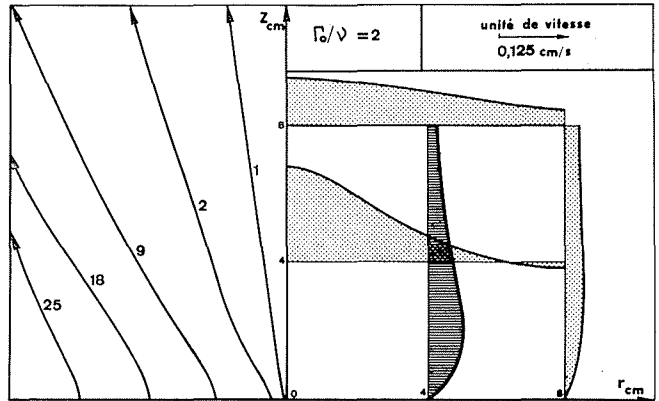
avec $\beta = \delta/h$.

En introduisant le paramètre λ , rapport entre la surface occupée par les rainures et la surface totale de chaque plateau, on peut exprimer le débit circulant dans l'ensemble

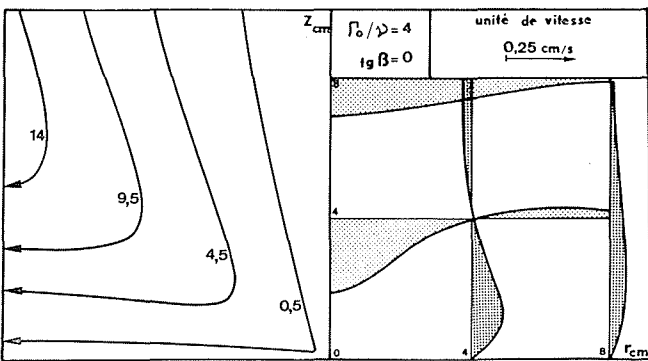
(*) Conformément aux idées de Reynolds, on néglige les termes d'inertie sauf le terme centrifuge V^2/r qui, étant donné les rotations très rapides, peut être important *a priori*.



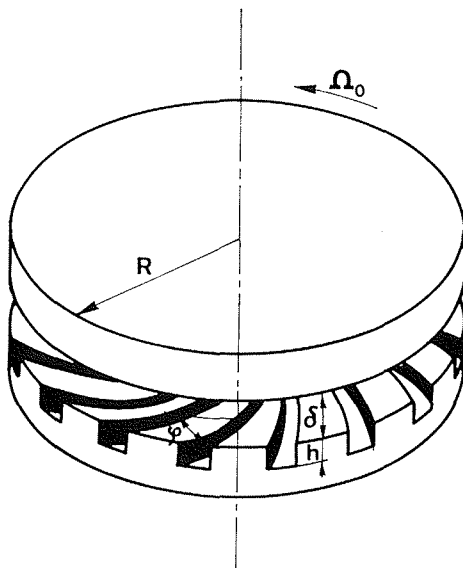
21/ Schéma des aubes.
Diagram showing blades.



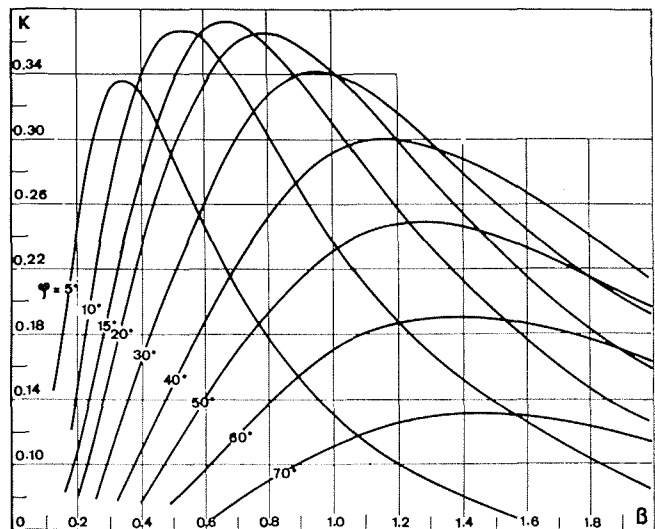
23/ Lignes de courant et profils des vitesses comparés pour $\tan \beta = 0,25$; $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$; $\nu = 1 \text{ stokes}$. Les lignes de courant sont cotées en cm^2/s .
Comparison of streamlines at velocity distributions for $\tan \beta = 0,25$, $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$, $\nu = 1 \text{ stokes}$. Streamlines are indicated in cm^2/s .



22/ Lignes de courant et profils de vitesses du plan vortex. ($\rho = 1 \text{ g/cm}^3$; $\nu = 1 \text{ stokes}$).
Streamlines and velocity distributions in a plane vortex ($\rho = 1/\text{cm}^3$, $\nu = 1 \text{ stokes}$).



24/



25/ Coefficient de portance des butées planes.
Plane thrust-bearing lift coefficient.

des rainures à un rayon r quelconque. Du fait de la continuité, ce débit est précisément égal à celui circulant entre les plateaux :

$$Q(r) = 2 \pi r (h/\lambda) U_0 \sin \varphi \quad (3)$$

L'élimination de Q et U_0 des équations (1), (2) et (3) donne l'expression cherchée du gradient de pression :

$$\frac{dP}{dr} = \frac{3}{10} \rho r \Omega_0^2 \frac{\beta^2}{1 + \beta} \frac{\lambda \beta (1 + \beta) - 10/\alpha \sin 2 \varphi}{6 \sin^2 \varphi + \beta^3 \lambda}$$

Pour des spirales logarithmiques ($\varphi = \text{Cte}$) et en supposant des rainures de hauteur h constante ($\beta = \text{Cte}$), la portance s'exprime par :

$$P = K \mu \frac{\Omega_0 R^4}{\delta^2}$$

avec :

$$K = \frac{3 \pi}{4} \frac{\beta^2}{1 + \beta} \frac{\sin 2 \varphi - \alpha/10 \beta \lambda (1 + \beta)}{6 \sin^2 \varphi + \beta^3 \lambda}$$

Comme α est faible, la valeur approchée du coefficient de portance est :

$$K \# \frac{3 \pi}{4} \frac{\beta^2}{1 + \beta} \frac{\sin 2 \varphi}{6 \sin^2 \varphi + \beta^3 \lambda}$$

Les résultats numériques sont portés à la figure 25 qui donne K en fonction de β pour différents angles φ et pour $\lambda = 1/2$. On retrouve très exactement les valeurs de Muijderman [15]. En particulier, l'angle de rainure optimum est de 15° (au lieu de $15^\circ 7$). La valeur maximum du coefficient de portance K est de 0,375. Cette valeur est nettement supérieure à celle des butées Michell ($K = 0,04$).

Ce calcul simple se généralise aisément aux butées hémisphériques pour lesquelles on montre d'une façon analogue et à l'aide des mêmes hypothèses simplificatrices que $K_{\text{sph.}} \# 2,66 K_{\text{plan}}$. Cette valeur élevée de la portance ainsi que les qualités propres de centrage des butées sphériques en montrent tout l'intérêt.

Références

- [1] GUILLOUD (J. C.). — Thèse de Doctorat d'Etat : « Quelques aspects de la diffusion moléculaire dans les écoulements touronnants. Application éventuelle à la séparation isotopique par centrifugation en parois fixes ». Université Scientifique et Médicale de Grenoble (avril 1971).
- [2] DARRIGOL (M.). — « Etude aérothermique d'un jet libre tournant ». Thèse d'Etat (à paraître), Université Scientifique et Médicale de Grenoble.
- [3] CRAYA (A.) and DARRIGOL (M.). — "Turbulent Swirling jet". *The Physics of Fluids*, supplément vol. 10, n° 9 (septembre 1967).
- [4] BÖDEWADT (U. T.). — "Die Drehströmung über Festem Grunde." *Z. Angew. Math. Mech.*, 1, 241-53 (1940).
- [5] KARMAN (Th. V.). — "Über Laminare and Turbulente Reibung." *Z. Angew. Math. Mech.*, 1, 233-51 (1921).
- [6] ÖZGÜR (C.). — "Contribution à l'étude de l'écoulement giratoire dans les divergents et les conduites cylindriques." *Publi. Sci. et Tech. du ministère de l'Air*, n° 394 (1963).
- [7] FORTIER (A.). — "Amortissement de la rotation et pertes de charge des écoulements giratoires dans les canalisations cylindriques de section circulaire." Extrait de *La Houille Blanche*, n° Spécial B/1954.
- [8] KREITH (F.) and SONJU (O. K.). — "The Decay of a Turbulent Swirl in a Pipe." *J. Fluid. Mech.*, vol. 22 part. 2, p. 257-7 (1965).
- [9] MCNEIL. — "Sur la structure d'un écoulement tournant dans un conduit cylindrique avec aspiration axiale." Thèse de docteur ingénieur, Université de Grenoble (septembre 1970).
- [10] LEWELLEN (W. S.). — "Three Dimensional Viscous Vortices in Incompressible Flow." Thèse de l'Université de Californie-Los Angeles (1964).
- [11] ROSENZWEIG and LEWELLEN. — "Confined Vortex Flows with Boundary Layer Interaction." Report N° ATN, 64 (9227), 2, *Aerospace Corporation*, El Segundo, Calif (1964).
- [12] TAYLOR (G. I.). — "The Boundary Layer in the Converging Nozzle of a Swirl Atomizer." — *Quart. Journ. of Mech. and Appl. Math.* vol. 3 (1950).
- [13] GUILLOUD (J. C.), ARNAULT (J.) et DICRESCENZO (C.). — "Sur une nouvelle famille de solutions exactes des équations de Navier-Stokes." *Journal de Mécanique*, à paraître en 1973.
- [14] GUMBEL and EVERLING (E.). — "Reibung und Schmierung im Maschinenbau." *Krayn Verlag*, Berlin (1925).
- [15] WHIPPLE (R. T. P.). — *The Inclined Groove Bearing*, AERE T/R 622 (Revised (octobre 1958)).
- [16] MUIJDERMAN. — "Analysis and Design of Spiral Groove Bearings." *De Ingénieur*, vol. 75, n° 10, p. 35 (1963).

