

UNE NOUVELLE MÉTHODE DE RÉPARTITION DES POINTS DE MESURE DES VITESSES DANS LES JAUGEAGES EN CONDUITE FORCÉE CIRCULAIRE

par Gh. COSMA

Docteur en Sciences Techniques
Conseiller à l'IRME (Entreprise pour la Rationalisation
et la Modernisation des Installations Énergétiques
Bucarest)

1. — Énoncé du problème

L'une des méthodes les plus utilisées pour la mesure du débit dans une conduite forcée circulaire, est la méthode des vitesses ponctuelles.

On peut distinguer deux étapes de son application : celle de la mesure des vitesses à l'aide des moulinets, tubes Pitot, etc., et celle du calcul.

Du point de vue mathématique, le calcul se réduit à un problème de quadrature, c'est-à-dire à une intégration d'une fonction interpolée entre un nombre de valeurs connues, nommées « vitesses ponctuelles ».

En conséquence, la précision du calcul dépend de la qualité de l'interpolation, donc de la répartition des points de mesure des vitesses.

Toute amélioration de cette précision connue jusqu'à présent a été obtenue par le perfectionnement de l'interpolation radiale, c'est-à-dire par le perfectionnement de la répartition radiale des points de mesure dont la position sur les m bras du support reste toujours homologue (d'habitude $m = 4$; fig. 1).

Nous essaierons de démontrer qu'une réduction nouvelle — remarquable et sûre — de l'erreur de calcul — en comparaison avec les résultats déjà atteints et connus dans la littérature et en pratique — n'est désormais possible qu'en renonçant à cet emplacement circulaire, homologue.

En anticipant, ce résultat est possible en adoptant la répartition en spirale des points de mesure des vitesses (fig. 4).

2. — Prémisses

2.1 Les limites des méthodes actuelles de réduction de l'erreur de calcul.

Nous précisons d'abord que ces recherches ont comme objet exclusif l'erreur de calcul. Elles ne s'occupent pas des erreurs de mesure; nous pouvons donc négliger celles-ci en considérant toute vitesse mesurée égale à la vitesse réelle correspondante.

2.1.1 BASE THÉORIQUE DE LA RÉPARTITION CIRCULAIRE, HOMOLOGUE.

Rappelons que — pour la méthode des vitesses ponctuelles — le calcul du débit Q est représenté par l'intégrale finie :

$$Q = \int_0^R \int_0^{2\pi} u r dr d\alpha \quad (1)$$

où u est la vitesse au point (r, α) de la section normale de mesure du débit (*).

La fonction :

$$u = u(r, \alpha) \quad (2)$$

(*) Nous ne retenons pas l'attention du lecteur spécialiste avec l'explication des notations comme r, α, R, u, S , etc., que nous considérons très connues.

$$\bar{u}_i = \frac{\sum_{j=1}^m u_{ij}}{m} \quad (4)$$

C'est la base théorique de la répartition circulaire, homologue, des points de mesure des vitesses (fig. 1).

2.1.2 L'INTERPOLATION COMME ORIGINE DES ERREURS DE CALCUL.

Si chaque vitesse u_{ij} représente la vitesse moyenne d'une surface élémentaire s_{ij} soumise aux conditions :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m s_{ij} = S$$

$$s_{ij} = s = S/N \quad (5)$$

L'intégrale (1) a pour solution numérique :

$$v = \frac{Q}{S} = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m u_{ij}}{N} \quad (6)$$

La formule (6) inclut l'expression (4) donc son application suppose aussi la répartition circulaire (fig. 1).

Si les conditions (5) ne sont pas respectées, l'intégrale (1) peut être simplifiée sous la forme :

$$Q = 2\pi \int_0^R \bar{u} r dr \quad (7)$$

où :

$$\bar{u} = \bar{u}(r) \quad (8)$$

est l'hodographe radial moyen connu par les points :

$$(\bar{u}_i, r_i) \quad (9)$$

et l'intégrale est calculée par des méthodes graphiques, analytiques ou graphiques-analytiques [1].

Pour les deux catégories de méthodes — numériques et graphiques-analytiques — on admet donc une fonction d'interpolation :

$$\widehat{u} = \widehat{u}(r) \quad (10)$$

qui représente la fonction physique inconnue (8) avec une certaine approximation et qui est satisfaite par les points (9).

Une fois la fonction d'interpolation (10) admise, on l'introduit dans l'intégrale (7) à la place de la fonction inconnue (8) :

$$Q_c = 2\pi \int_0^R \widehat{u} r dr \quad (7 \text{ bis})$$

En admettant que l'intégrale (7 bis) puisse être calculée exactement (ou avec une erreur tout à fait négligeable), Q_c représente Q avec l'approximation de l'interpolation admise.

L'erreur de calcul provient donc explicitement de l'imperfection de la coïncidence entre les fonctions (8) et (10) et implicitement de l'approximation de l'interpolation angulaire (4), c'est-à-dire de l'écart entre les fonctions (2) et (10).

L'erreur totale de calcul est une erreur d'interpolation Ω qui est égale à l'intégrale spatiale de l'erreur de coïncidence σ , c'est-à-dire de l'erreur locale d'interpolation :

$$\sigma = \sigma(r, \alpha) \quad (11)$$

$$\Omega = \int_0^R \int_0^{2\pi} \sigma r dr d\alpha \quad (12)$$

L'interpolation angulaire (4) admet l'approximation (fig. 2) :

$$\Omega \cong \Omega_r = 2\pi \int_0^R \sigma_r r dr \quad (13)$$

$$\sigma_r = \sigma_r(r) \quad (14)$$

L'erreur de calcul du débit ΔQ est donc :

$$\Delta Q = \Omega \quad (15)$$

et l'erreur de la vitesse moyenne v , est :

$$\Delta v = \Omega/S \quad (16)$$

2.1.3 L'INTERDÉPENDENCE ENTRE LA LOI D'INTERPOLATION ADMISE ET LA RÉPARTITION RADIALE DES POINTS DE MESURE.

Pour l'intégration numérique (6), l'ensemble des positions radiales r_i des points de mesure de la vitesse est strictement lié à la loi d'interpolation (10) admise. Les valeurs r_i sont calculées à l'aide de l'expression analytique de la fonction d'interpolation (10) dans la condition du premier alinéa du paragraphe 2.1.2, ce qui peut être exprimé sous la forme :

$$u = \widehat{u}(r) \Leftrightarrow \{r_{Ii}\} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (17)$$

L'indice I indique une certaine série des valeurs de r_i , spécifique de la loi d'interpolation admise.

Pour les méthodes graphiques d'interpolation, la condition (17) n'est pas strictement nécessaire, cependant elle est recommandée [1] afin d'assurer une précision maximale de l'interpolation.

Autrement dit, l'application de la méthode graphique-analytique implique, elle aussi, une certaine répartition des points de mesure (r_i) qui est recommandée par le Code C.E.I. [1].

En conséquence à chaque loi d'interpolation admise (10) correspond une certaine série (r_i ; $i = 1, 2, \dots, n$) des positions radiales des points de mesure qui lui est caractéristique.

Pour des motifs que nous exposerons plus loin, nous avons adopté la loi d'interpolation proposée par Winternitz [2] qui a utilisé dans ce but la relation connue de Nikuradze :

$$u = A \log Y/D + B Y/D + C \quad (18)$$

où : $Y = R - r$, $D = 2R$.

Winternitz a calculé les positions Y_i pour $n = 2 \div 5$, mais — en utilisant ses formules [2] — nous les avons calculées pour $n = 2 \div 40$ pour des motifs liés à l'application de la méthode spirale de répartition (tableau I).

2.1.4 LES LIMITES ACTUELLES DES MÉTHODES DE RÉDUCTION DE L'ERREUR DE CALCUL.

Théoriquement, l'erreur d'interpolation Ω , égale à l'erreur de calcul (15, 16), peut être réduite par deux voies : — l'augmentation du nombre n des intervalles partiels d'interpolation;

— l'amélioration de la coïncidence (fig. 2).

Quant à la première de ces solutions, il faut préciser qu'elle n'est efficace que dans certaines conditions [3]. Pour ne pas charger notre exposé avec des détails encombrants, nous retenons ici que — dans notre cas — ces conditions sont satisfaites.

En conséquence on peut utiliser les relations suivantes [3] entre les erreurs totales d'interpolation sur un intervalle total (0, R) : $\Omega(n_1)$, $\Omega(n_2)$ et le nombre n_1 , n_2 des intervalles partiels dont on aurait divisé l'intervalle total donné (*):

$$\Omega(n_2) = \Omega(n_1) n_1/n_2 \quad (19)$$

ou bien :

$$\Omega(n_2) = \Omega(n_1) (n_1/n_2)^{3/2} \quad (20)$$

Cette méthode ne s'est pas imposée en pratique à cause de l'encombrement supplémentaire des moulinets (tubes Pitot, etc.), qui peut provoquer une erreur d'influence réciproque de nature à annuler l'avantage escompté. De plus, il y a une tendance à réduire le nombre de moulinets utilisés [2]. Pour le moment nous pouvons considérer que le nombre n (en fonction de R) recommandé par le code C.E.I. [1] représente un optimum technico-économique.

Quant à la deuxième des solutions énoncées, nous considérons que les résultats obtenus par Winternitz et Fischl [2] représentent une limite pratique au-delà de laquelle un progrès remarquable et sûr n'est plus possible.

En effet :

a) L'erreur moyenne Δv obtenue par la répartition des points de mesure des vitesses correspondant à la loi d'interpolation (18) est l'une des plus petites en comparaison de celles obtenues par d'autres lois d'interpolation, (voir les données tableau II extrait de [2]):

MÉTHODES D'INTERPOLATION	Δv_m % moyenne	Δv_k %
Tangentielle	+ 0,5	- 0,0
Winternitz	- 0,3	- 0,9
Empirique (nouvelle)	- 0,5	- 0,8
Aichelen	- 0,2	+ 0,1
Gauss-Sherwood	- 0,3	- 0,6

Parmi les méthodes ayant des erreurs moyennes comparables, celle de Winternitz s'impose par la simplicité du calcul [2].

b) La valeur $\Delta v_m = -0,3\%$ du tableau II représente la moyenne des erreurs Δv de dix-huit essais individuels faits avec la méthode de Winternitz. Les valeurs Δv couvrent un domaine de $-1,0\%$, à $+0,3\%$ [2]. Cette observation est valable aussi pour les résultats moyens Δv_m des autres méthodes présentées.

Il est donc parfaitement possible que, pour un essai individuel quelconque, l'erreur Δv obtenue par la méthode Winternitz soit plus grande que celle obtenue par une

autre méthode statistiquement moins exacte. Comme pièce à conviction nous avons extrait dans le tableau II l'une des dix-huit séries de valeurs individuelles Δv_k dans laquelle la méthode Winternitz a donné la plus grande erreur ($-0,9\%$) en comparaison avec les autres méthodes.

D'ailleurs il est assez difficile de s'imaginer une coïncidence (fig. 2) qui donnerait des résultats statistiques supérieurs aux interpolations de Winternitz, Aichelen et Gauss-Sherwood, ci-dessus mentionnées.

En conclusion :

- la fonction d'interpolation admise par Winternitz (18) a une justification théorique et donne des erreurs assez réduites. Toute autre loi d'interpolation (10) ne paraît pas pouvoir donner une réduction supplémentaire remarquable et sûre, de l'erreur d'interpolation, donc de l'erreur de calcul, à cause du caractère aléatoire de la fonction physique (2);
- théoriquement, l'augmentation du nombre n des points d'essai sur le même bras du support donnerait des résultats statistiques remarquables (19 et 20), mais elle ne représente pas une solution technico-économique acceptable et, de plus, elle risque d'introduire des erreurs supplémentaires de nature à annuler l'avantage escompté.

2.2 Les sources de la solution du problème.

2.2.1 L'EXISTENCE DES PROPRIÉTÉS INFORMATIONNELLES DE L'ESPACE D'ESSAI.

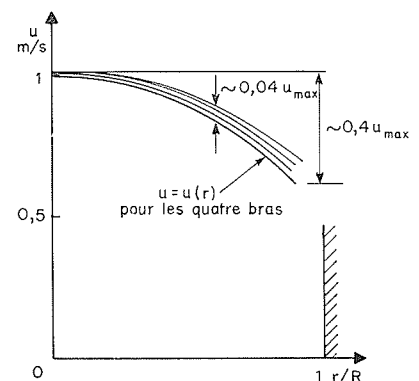
La mesure du débit est une opération rationnelle — physique et théorique — dont le résultat est représenté par un chiffre, Q , caractérisant un certain paramètre de l'écoulement, opération qui apporte donc une information sur cet écoulement.

Pour éviter toute confusion, nous faisons une différence nette entre le contenu de l'information et la quantité d'information, notion que nous utiliserons plus loin.

L'information globale Q est obtenue à l'aide d'une série d'informations partielles :

- a) sur les résultats des mesures élémentaires : u_{ij} et r_{ij} ;
- b) sur les conditions dans lesquelles on effectue ces mesures, à savoir :

α) la limite admissible de la dissymétrie de l'hodographe spatial des vitesses [1] (fig. 3);



(*) Pour des raisons évidentes, nous avons adopté — comme une approximation admissible — l'égalité des points de mesure n et des intervalles partiels ainsi déterminés sur l'intervalle total (0, R) [3].

β) le domaine et le caractère de la variation radiale de la vitesse *u* (fig. 3).

La méthode actuelle de répartition circulaire, homologue, des points de mesure, n'utilise que partiellement l'information (*b — α*) et sa conséquence sur l'information *a*); elle n'utilise d'aucune façon l'information (*b — β*).

Il est intuitivement évident que la plénitude des informations expérimentales a une influence directe, positive, sur la précision des essais respectifs.

C'est par l'analyse quantitative de ces propriétés informationnelles de l'espace d'essai qu'il est possible d'obtenir un progrès substantiel de la réduction des erreurs de calcul du débit *Q* ou de la vitesse moyenne *v*.

Nous présenterons d'abord quelques notions élémentaires sur le calcul de la quantité d'information que nous pourrions utiliser dans le but ci-dessus énoncé.

2.2.2 L'EXPRESSION DE LA QUANTITÉ D'INFORMATION (L'ENTROPIE).

Le résultat d'une expérience *E* n'est pas connu d'avance mais, d'habitude, on peut connaître l'ensemble fini des *K* événements élémentaires possibles : *a*₁, *a*₂, ..., *a*_{*k*}, ... *a*_{*K*} dont les probabilités de réalisation sont : *p*₁, *p*₂, ..., *p*_{*k*}, ..., *p*_{*K*}.

Considérons que le système d'événements *a*₁, *a*₂, ..., *a*_{*K*} est un système complet, ce qui veut dire qu'il inclut le résultat, encore inconnu, de l'expérience *E*, donc [5]

$$p_k \geq 0, \quad 1 \leq k \leq K; \quad \sum_{k=1}^K p_k = 1 \quad (21)$$

L'expérience *E* met en évidence un certain champ de probabilité {*E*, *a*, *p*(*a*)} caractérisé par une certaine répartition que nous noterons ainsi :

$$E \left(\begin{matrix} a_1 & a_2 & \dots & a_K \\ p_1 & p_2 & \dots & p_K \end{matrix} \right) \quad (22)$$

La réalisation de l'expérience *E* enlève son indétermination. La mesure de l'indétermination, égale à la quantité d'information ou à l'entropie *H* de l'expérience *E*, peut être calculée avec la formule de Shannon [4, 5] :

$$H(E) = - \sum_{k=1}^K p_k \log_2 p_k \quad (23)$$

ou :

$$H(E) = - A \sum_{k=1}^K p_k \log p_k \quad (24)$$

où *A* est la constante de transformation des logarithmes de base 10 en ceux de base 2.

2.2.3 L'ENTROPIE DE LA MESURE DU DÉBIT. L'ANISOTROPIE INFORMATIONNELLE DE L'ESPACE D'ESSAI.

La mesure du débit *Q* — ou de la vitesse moyenne *v* — est une expérience complexe *D* qui inclut l'ensemble des expériences *U*_{*ij*} — correspondant aux mesures des vitesses *u*_{*ij*}. On peut écrire :

$$H(D) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m H(U_{ij}) \quad (25)$$

Donc on peut calculer l'entropie de l'expérience *D* dans différentes variantes de la mesure du débit et on peut comparer les valeurs correspondantes afin de trouver celle ayant l'entropie maximale, c'est-à-dire l'erreur minimale, à condition qu'on trouve un moyen d'écrire l'entropie de l'expérience *U* et d'établir le critère de la variation de sa valeur numérique en fonction des conditions d'essai.

Nous pouvons utiliser dans ce but les valeurs relatives des vitesses *u*_{*ij*} en rapport avec leur valeur maximale *u*_{max} et l'unité de mesure de ces valeurs relatives, par exemple 0,001 (0,1 % de *u*_{max}).

Dans ce cas une vitesse quelconque *u*_{*ij*}, considérée comme la première vitesse mesurée *u*_{*p*}, peut avoir n'importe quelle valeur discrète entre 0,001 et 1,000. La série des valeurs (0,001; 0,002 ... 0,999; 1,000) peut être considérée comme la série des *K* événements, élémentaires *a*_{*k*}, également possibles de l'expérience *U*_{*p*} caractérisée par un champ de probabilité ayant la répartition (22) :

$$U_p \left(\begin{matrix} 0,001 & 0,002 & \dots & 0,999 & 1,000 \\ 1/1000 & 1/1000 & \dots & 1/1000 & 1/1000 \end{matrix} \right) \quad (26)$$

et l'entropie *H*(*U*_{*p*}) :

$$H(U_p) = - A 1000 \frac{1}{1000} \log \frac{1}{1000} = 3 A \quad (27)$$

Par « la première vitesse » on entend une vitesse mesurée quelconque, sans aucune indication préalable sur sa valeur numérique.

Mais, conformément à l'alinéa *b*) nous connaissons d'avance le domaine de variation radiale de la vitesse le long d'un bras du support, soit, par exemple, le domaine des *K* = 400 valeurs également possibles de 0,601 à 1,000 (fig. 3).

En notant *u*_{*r*} une telle vitesse, l'expérience correspondante *U*_{*r*} est caractérisée par un champ de probabilité ayant la répartition :

$$U_r \left(\begin{matrix} 0,601 & 0,602 & \dots & 0,999 & 1,000 \\ 1/400 & 1/400 & \dots & 1/400 & 1/400 \end{matrix} \right) \quad (28)$$

et l'entropie *H*(*U*_{*r*}) :

$$H(U_r) = - A 400 \frac{1}{400} \log \frac{1}{400} \cong 2,6 A \quad (29)$$

Parmi les *N* vitesses *u*_{*ij*}, *n* seulement participent au processus d'information sur la variation radiale de la vitesse d'un certain bras du support.

Les autres *N-n* vitesses *u*_{*ij*} apportent une information seulement sur la variation angulaire des vitesses par rapport aux *u*_{*r*} correspondantes. Nous les notons *u*_{*a*}.

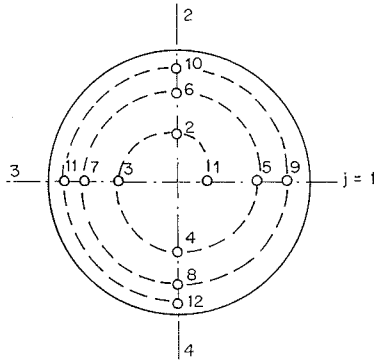
Conformément aux indications du code C.E.I. [1], on peut admettre une variation de ± 1 % ÷ ± 2 % d'une vitesse quelconque *u*_{*a*} par rapport à la vitesse homologue respective *u*_{*r*} (fig. 3).

L'expérience correspondante *U*_{*a*} peut être caractérisée par un nombre *K* voisin de 40 événements également possibles, et une entropie *H*(*U*_{*a*}), de valeur égale ou inférieure à celle donnée par la formule :

$$H(U_a) = - A 40 \frac{1}{40} \log \frac{1}{40} \cong 1,6 A \quad (30)$$

L'entropie totale *H*(*D*) de l'essai du débit *Q* — ou de la vitesse moyenne *v* — est égale à la somme des entropies des expériences *U*_{*r*} et *U*_{*a*} :

$$H(D) = n H(U_r) + (N - n) H(U_a) \quad (31)$$



4/

La relation (31) met en évidence la contribution des points distribués d'après le rayon ou d'après l'angle α , à la valeur numérique de l'entropie totale $H(D)$.

Pour pouvoir déterminer la distribution optimale des N points d'essai, considérons (31) comme une fonction de n , dans le domaine d'existence $n \in (1, 2, \dots, N)$.

La forme :

$$H(D) = [H(U_r) - H(U_\alpha)] n + NH(U_\alpha) \quad (32)$$

de (31), met en évidence son caractère de fonction linéaire. Elle est croissante avec la condition :

$$H(U_r) > H(U_\alpha) \quad (33)$$

Conformément à (29) et (30), cette condition est satisfaite.

Dans ce cas, le maximum de la fonction (32) — dans son domaine d'existence — se réalise pour $n = N$, ce qu'on peut écrire sous la forme :

$$H(D)_{\max} \xrightarrow[n \in (1, 2, \dots, N)]{H(U_r) > H(U_\alpha)} n = N \quad (34)$$

ou :

$$H(D)_{\max} \xrightarrow[n \in (1, 2, \dots, N)]{H(U_r) > H(U_\alpha)} \begin{matrix} |U_r| = N \\ |U_\alpha| = 0 \end{matrix} \quad (35)$$

En conclusion : la valeur maximale de l'entropie $H(D)$ de l'expérience D est obtenue à condition que les N points de mesure soient caractérisés par des expériences de type U_r , c'est-à-dire à condition que les points d'essais soient placés d'après une distribution radiale.

Ce résultat est exprimé un peu trop schématiquement à cause de la forme assez grossière de l'établissement des distributions (22) admises.

En réalité chacune des expériences des ensembles $\{U_r\}$ et $\{U_\alpha\}$, a son propre champ de probabilité et sa propre entropie. Il est difficile de les exprimer distinctement, mais ceci est inutile car — sans entrer dans des détails encombrants pour le démontrer — la relation (35) reste valable même dans la simplification schématique admise.

Ces considérations nous défendent d'interpréter le résultat (34) ou (35) d'une manière trop rigide à savoir de distribuer les N points de mesure sur le même bras physique du support, solution incorrecte — au moins incomplète — pratiquement irréalisable et de nature à annuler l'avantage théorique escompté (voir les conclusions du paragraphe 3.4.).

3. — La répartition en spirale des points d'essai

La matérialisation la plus adroite que nous ayons pu imaginer du résultat (34) ou (35), est représentée par la répartition des points de mesure en spirale (fig. 4).

Dans cette répartition, tous les N points de mesure sont caractérisés par des expériences $\{U_r\}$ — ayant des entropies plus grandes que les expériences $\{U_\alpha\}$ — sans qu'ils abandonnent les bras du support auxquels ils appartenaient dans la répartition classique, circulaire (fig. 1).

3.1 La réalisation pratique de la répartition en spirale.

On répartit les N points de mesure sur un même bras hypothétique d'après une certaine loi d'interpolation. Pour les raisons exposées au paragraphe 3.2, nous préférons la distribution de Winternitz (tableau I).

On redistribue les N points en les déplaçant successivement sur les m bras du support (fig. 4). On peut obtenir ainsi m spirales distinctes, d'après le bras du commencement de la spirale.

Si — pour mesurer les vitesses u_{ij} — on utilise des moulinets, on sait que le moulinet à proximité de la paroi doit respecter une certaine distance minimale notée par a .

Les valeurs Y du tableau I rendent possible le cas où la distance Y de ce moulinet soit plus petite que a :

$$Y_j < a \quad (36)$$

pour l'un ou plusieurs ($j \leq m$) des bras du support.

Dans ce cas, les moulinets à proximité de la paroi sont placés à la distance normale a , mais les vitesses u_{ij} mesurées en ces points, seront recalculées pour obtenir la valeur correspondante à la position Y_j .

Pour cette extrapolation on peut utiliser la formule recommandée par le code C.E.I. [1] :

$$u_y = u_a (a/y)^{1/7} \quad (37)$$

Dans la figure 5, nous donnons le nomogramme de la formule (37) pour $u_a = 0,25 \div 2,5$ m/s et $a \leq 120$ mm.

Evidemment, la correction (37) s'applique seulement aux vitesses des points pour lesquels $Y < a$.

La vitesse moyenne v du fluide dans la conduite forcée est la simple moyenne arithmétique (6) des vitesses u_{ij} mesurées aux points de la spirale, en tenant compte des corrections mentionnées ci-dessus.

3.2 La précision de la méthode spirale.

En considérant l'interpolation angulaire suffisamment exacte (paragraphe 2.1), l'erreur totale d'interpolation Ω peut être considérée égale à l'erreur d'interpolation radiale Ω_r :

$$\Omega \cong \Omega_r \quad (38)$$

Le nombre des points de mesure qui participent à l'interpolation radiale est n pour la méthode classique circulaire de répartition (fig. 1), et N pour la méthode spirale. La relation entre les erreurs respectives d'interpolation $\Omega(n)$ et $\Omega(N)$ peut être écrite conformément à (19) et (20) :

$$\Omega_s(N) = \left[\frac{n}{N} \div \left(\frac{n}{N} \right)^{3/2} \right] \Omega_c(n) \quad (39)$$

ou bien :

$$\Omega_s(N) = \left(\frac{1}{m} \div \frac{1}{m^{3/2}} \right) \Omega_c(n) \quad (40)$$

Pour $m = 4$ (40) devient :

$$\Omega_s(N) = \left(\frac{1}{4} \div \frac{1}{8} \right) \Omega_c(n) \quad (41)$$

donc l'erreur de calcul liée à la méthode spirale de répartition est beaucoup plus petite que celle de la méthode classique; pour $m = 4$, elle est 4 à 8 fois plus petite, ce qui représente une réduction remarquable.

La formule (40) ou (41) a une valeur statistique, moyenne, à cause du caractère aléatoire du phénomène auquel il s'applique.

Il faudrait que l'écart aléatoire de l'erreur de coïncidence σ autour de sa moyenne soit quatre à huit fois plus grande que celle-ci pour que l'erreur Ω_s puisse atteindre la valeur de Ω_c , ce qui n'est guère probable.

Pour cette raison, on peut affirmer que la formule (41) reste valable au moins sous la forme :

$$\Omega_s(N) < \Omega_c(n) \quad (42)$$

La réduction de l'erreur dont nous nous occupons ici est certaine, donc effective dans chaque cas d'application de la méthode spirale.

3.3 Vérification théorique.

Les figures 6 et 7 représentent les schémas des interpolations radiale et angulaire. Les courbes 1 représentent les fonctions physiques réelles $u = u(r)$ et $u = u(\alpha)$, et les courbes 2 représentent les fonctions d'interpolation admises : $\hat{u} = \hat{u}(r)$ et $\hat{u} = \hat{u}(\alpha)$.

Les fonctions $u = u(r)$ et $\hat{u} = \hat{u}(r)$ sont des expressions de certaines lois physiques et théoriques respectivement, donc leur différence $\sigma(r)$ est toujours positive ou toujours

négative (fig. 6). En conséquence l'erreur totale d'interpolation radiale Ω_r est égale à la somme arithmétique des erreurs partielles respectives ω_{r_i} :

$$\Omega_r = \sum_{i=1}^n \omega_{r_i} \quad (43)$$

Si l'on admet l'approximation :

$$\omega_{r_i} \cong \omega_r \quad (44)$$

(43) devient :

$$\Omega_r = n \omega_r \quad (45)$$

Si on considère que les erreurs partielles ω_{r_i} ont des signes inconnus, aléatoires, la sommation (43) s'effectue d'après les lois du calcul probabiliste, mais ceci ne change pas essentiellement les conclusions finales [3]; nous n'insistons donc pas sur ce point.

Les courbes $u = u(\alpha)$ et $\hat{u} = \hat{u}(\alpha)$ sont des courbes fermées, donc leurs intersections déterminent des paires d'erreurs partielles d'interpolation angulaire, par exemple la paire : $\omega_{\alpha 1} > 0$ et $\omega_{\alpha 2} < 0$.

L'erreur totale d'interpolation angulaire Ω_α est donc égale à la différence de leur valeur absolue :

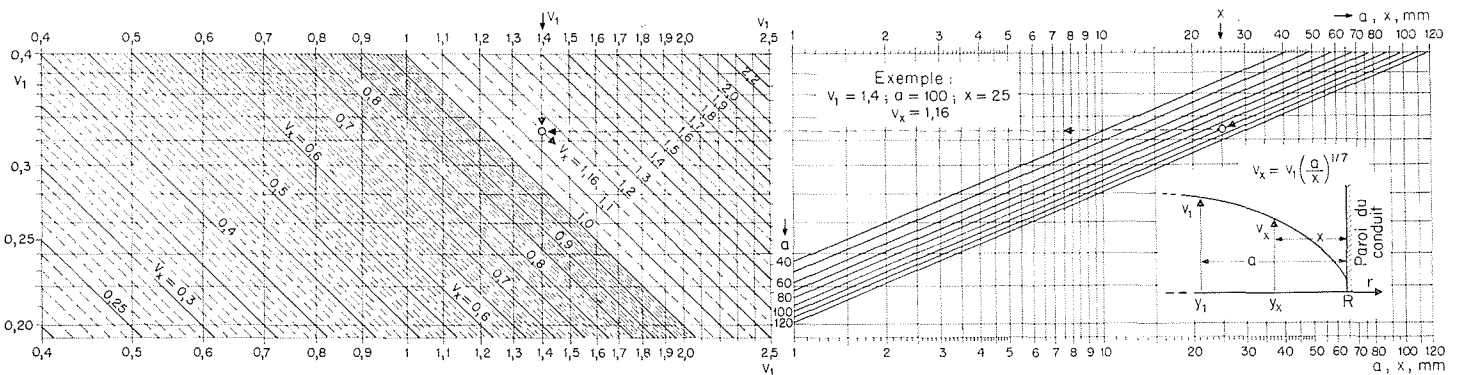
$$\Omega_\alpha = |\omega_{\alpha 1}| - |\omega_{\alpha 2}| \quad (46)$$

Admettons — comme hypothèse de calcul — que la différence (46) ne dépasse pas 1 % de la moyenne ω_α :

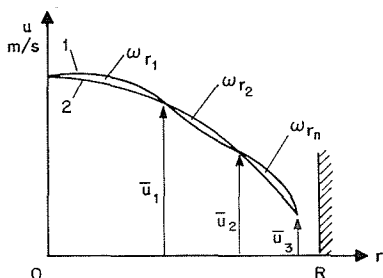
$$\omega_\alpha = \frac{|\omega_{\alpha 1}| + |\omega_{\alpha 2}|}{2} \quad (47)$$

donc :

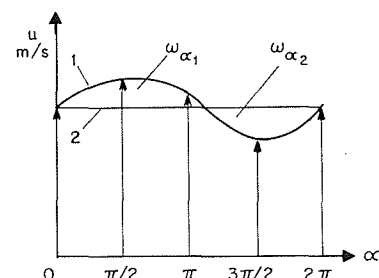
$$|\omega_{\alpha 1}| - |\omega_{\alpha 2}| \cong 0,01 \omega_\alpha \quad (48)$$



5/



6/



7/

et (46) devient :

$$\Omega_\alpha = 0,01 \omega_\alpha \quad (49)$$

En comparant (45) à (49) il paraît évident que :

$$\Omega_\alpha < \Omega_r \quad (50)$$

En introduisant (45) et (49) en (50) il résulte :

$$\omega_\alpha < 100 n \omega_r \quad (51)$$

comme une condition de la validité de l'inégalité (50).

Il faudrait que l'erreur partielle angulaire ω_α soit plusieurs centaines de fois plus grande que l'erreur partielle radiale ω_r , pour que les inégalités (50) et (51) ne soient plus valables, ce qu'on ne peut supposer.

Il est plus probable que l'ordre de grandeur de leur valeur soit le même :

$$\omega_\alpha \approx \omega_r \quad (52)$$

La tolérance de l'approximation (52) est tellement large, qu'on peut l'accepter sans réserve. En conséquence l'inégalité (50) peut être écrite sous la forme :

$$\Omega_\alpha \ll \Omega_r \quad (53)$$

c'est-à-dire : l'erreur totale d'interpolation angulaire Ω_α est négligeable en comparaison avec l'erreur radiale Ω_r , et, donc, l'erreur totale d'interpolation est pratiquement égale à Ω_r :

$$\Omega = \Omega_r \quad (54)$$

d'où la validité des formules (40), (41) et (50).

3.4 Vérification expérimentale.

Nous avons précisé (paragraphe 2.1) que nous pouvons négliger les erreurs de mesure. Ce fait simplifie la vérification expérimentale des formules (40) ou (41). En effet — dans ces conditions — nous n'avons pas besoin d'un essai complet du débit. Nous pouvons partir d'un hodographe spatial donné sous une forme graphique. Les valeurs $u(r, \alpha)$ de l'hodographe spatial représentent — à l'échelle — les vitesses réelles aux points qui nous intéressent de la section d'essai.

En admettant $m = 4$ (un support à quatre bras), l'hodographe spatial est représenté par les quatre hodographes

radiaux respectifs qui, une fois tracés, peuvent être considérés comme les courbes réelles $u = u(r)$ pour les quatre bras.

Nous pouvons ainsi obtenir les valeurs réelles des vitesses u_{ij} en n'importe quel point des quatre bras, avec l'approximation de l'erreur graphique que nous pouvons réduire à notre gré : elle est tout à fait négligeable.

Nous avons tracé les hodographes des 16 essais de débit effectués en 1968 dans la conduite forcée de $\varnothing 4\,142$ mm de la C.H.E. Arges-Roumanie. Nous ne reproduisons ici, comme exemple, qu'une des planches qui contient les hodographes des trois premiers essais (planche 1).

Les vitesses u_{ij} sont représentées, à l'échelle, par des segments de 300-900 mm. L'erreur graphique absolue de 0,5 mm correspond donc à une erreur relative de 0,1 % ÷ 0,03 %, vraiment négligeable.

Pour chaque débit considéré, nous avons déterminé les vitesses u_{ij} pour $n = 6, 24$ et 40.

En utilisant la formule (6) et la méthode de correction décrite dans le paragraphe 3.1, nous avons calculé les vitesses moyennes v pour les variantes du tableau III.

La distribution radiale des points d'essai pour l'interpolation parabolique est celle donnée par le code C.E.I. [1]; celle de l'interpolation log-linéaire est celle calculée d'après Winternitz (tableau I).

Pour chaque variante de répartition spirale (P S ou L S) on a calculé les vitesses moyennes v (6) pour les quatre spirales possibles conformément au paragraphe 3.1 (quatre sous-variantes).

La valeur v de la variante LC 40/160 est obtenue à l'aide de 160 points de mesure. Pour cette raison nous avons pu la considérer comme valeur étalon.

Les erreurs $\Delta v = \Omega/S$ de chaque variante et sous-variante sont calculées comme la différence entre la valeur respective de la vitesse moyenne v et la valeur étalon du même débit.

En plus des 17 variantes et sous-variantes du tableau III nous avons calculé les erreurs Δv correspondant aux valeurs du débit calculé d'après les deux méthodes graphiques-analytiques connues [1], donc au total 19 variantes pour chacun des 16 débits, soit $19 \times 16 = 304$ calculs pour v ou Q et Δv .

Ce travail contient plus de 20 000 données numériques. Il est intéressant de présenter ici leur conclusion exprimée graphiquement dans les figures 8 à 11.

Tableau III

MÉTHODE D'INTERPOLATION	RÉPARTITION DES POINTS DE MESURE	NOMBRE DE POINTS DE MESURE		NOTATION DES VARIANTES	NOMBRE DE SOUS VARIANTES
		<i>n</i>	<i>N</i>		
Parabolique	Circulaire	6 + 1	24 + 1	P C 6/24	1
	—	24 + 1	96 + 1	P C 24/96	1
	Spirale	6 + 1	24 + 1	P S 6/24	4
Log-linéaire	Circulaire	6	24	LC 6/24	1
	Spirale	6	24	LS 6/24	4
	Circulaire	24	96	LC 24/96	1
	Spirale	10	40	LS 10/40	4
—	Circulaire	40	160	LC 40/160	1

Nombre total de variantes = 17

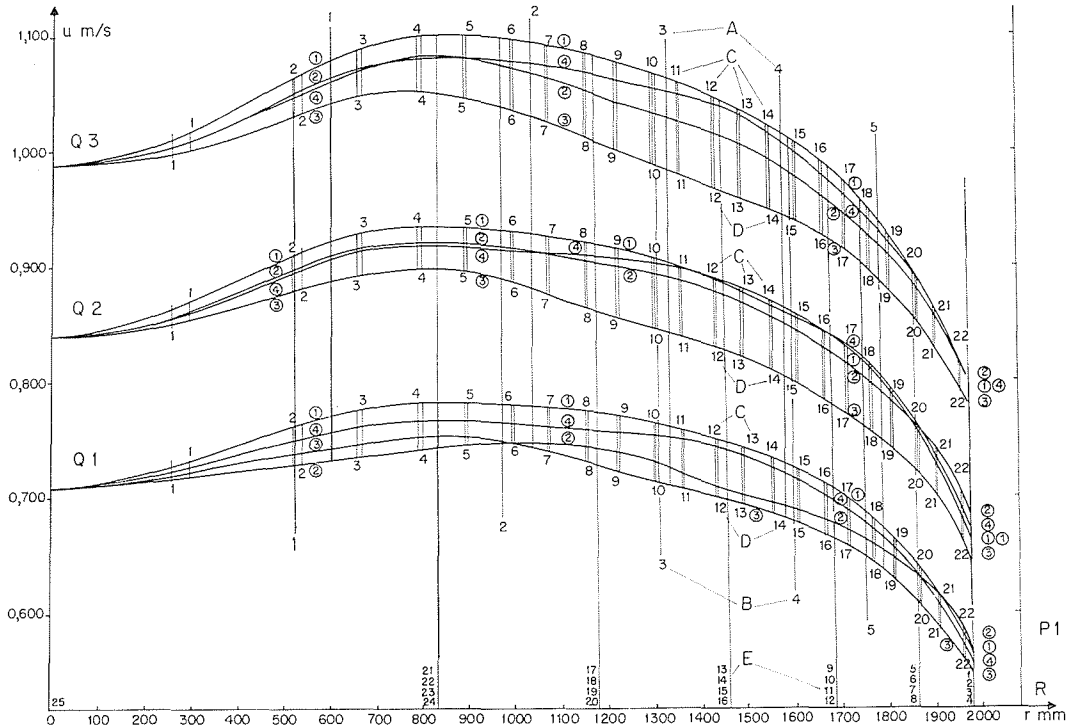


Planche 1/

D'après ce qu'on peut voir dans le tableau III, nous avons vérifié la méthode spirale pour deux méthodes d'interpolation afin de démontrer que son effet est indépendant de la loi d'interpolation admise.

La figure 8 montre l'égalité statistique des erreurs moyennes Δv (pour 16 débits) des variantes 24/6 L S et 96/24 L C. On voit que la méthode spirale donne la même erreur pour $N = 24$ que la méthode circulaire pour un nombre $N = 96$ quatre fois plus grand, résultat qui illustre la formule (40) ou (41).

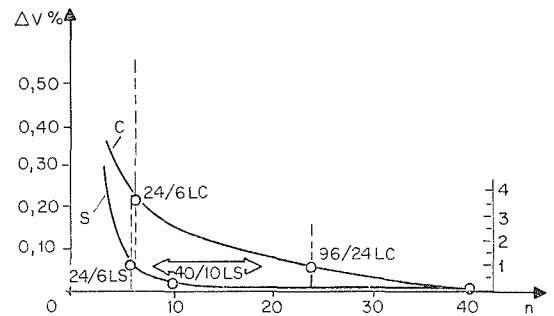
La dispersion des données individuelles représentée sur la figure 8, pose le problème de l'exactitude du résultat obtenu dans chaque cas individuel (voir les commentaires du paragraphe 2.1).

Le graphique de la figure 9 met en évidence la validité de la relation (50) dans chaque cas individuel et pour chacune des quatre sous-variantes possibles pour l'emplacement en spirale. Deux des $16 \times 4 = 64$ sous-variantes qui ne respectent pas la relation (50) représentent une exception explicable par la valeur extrêmement petite ($< 0,1\%$) de l'erreur initiale (de la variante 24/6 L C), situation dans laquelle l'effet de la relation (50) est en quelque sorte « brouillé » par les erreurs de nos calculs graphiques-analytiques.

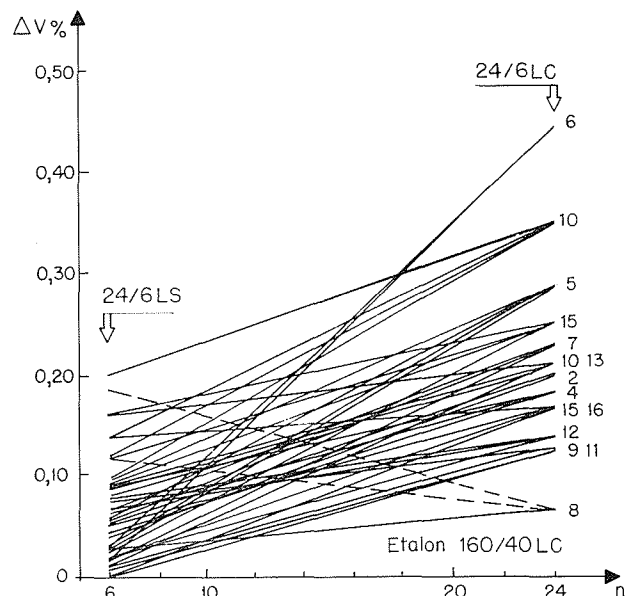
La figure 10 représente la vérification statistique de la formule (41). Les deux courbes représentent les deux limites dues respectivement aux coefficients $1/4$ et $1/8$. Les points représentant les erreurs Δv en fonction du nombre n des points de mesure, s'inscrivent très bien entre ces limites.

La figure 11 représente la comparaison des erreurs moyennes Δv (pour les 16 débits) des variantes d'intégration, interpolation et répartition utilisées.

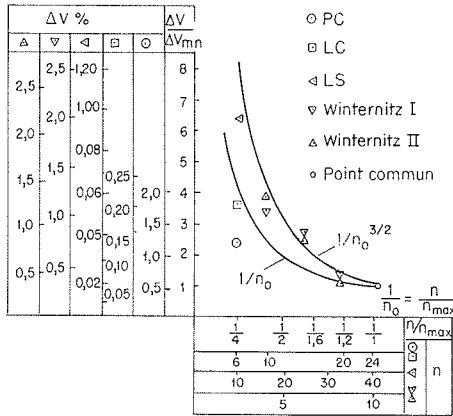
Elle met encore une fois en évidence la supériorité de la méthode spirale qui, pour $N = 24$, a presque la même erreur — inférieure à $0,1\%$ — que la méthode classique pour $N = 96$.



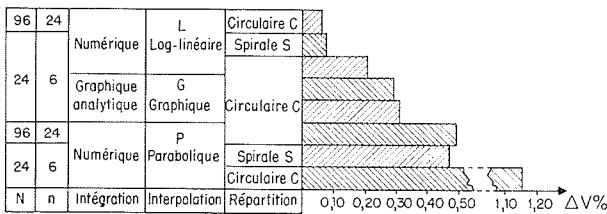
8/



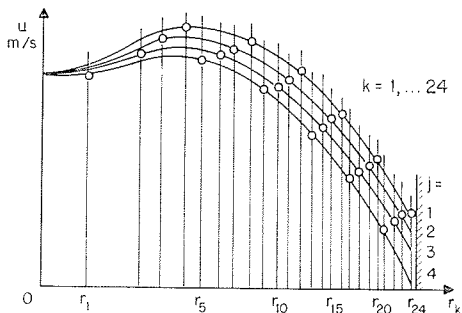
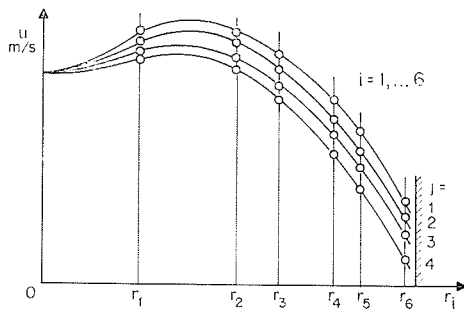
9/



10/



11/



12/

Pour chacune des deux méthodes graphiques-analytiques on a tracé des courbes nécessaires au calcul $u = f_1(r^2)$ et $ur = f_2(r)$ et pour les méthodes numériques on a tracé la courbe $u = u(r)$. Leur comparabilité pose donc le problème de l'erreur subjective de l'influence de la personnalité du spécialiste qui a tracé ces courbes. Dans ce but nous avons fait effectuer le traçage de la courbe $u = u(r)$ du débit N° 16 par six personnes différentes dont deux seulement étaient des spécialistes, les quatre autres étaient des dessinateurs sans expérience. Cinq des résultats v , ont différé entre eux de moins de 0,1 %; le sixième diffère de 0,3 %, mais le dessin de l'hodographe correspondant était tellement maladroit qu'on pouvait l'éliminer d'avance. Le traçage de l'hodographe $u = u(r)$ représente donc une source d'erreur négligeable.

La figure 12 représente sans autres commentaires une image comparative, intuitive, de l'explication de la supériorité informationnelle de la méthode spirale.

Nous pouvons ajouter qu'on a vérifié notre méthode sur quelque 20 autres débits (20×4 sous-variantes) avec les mêmes résultats (40) (41) et (50), sans exceptions comparables à celles des deux exemples cités dans la figure 9, ce qui met en évidence leur caractère non-significatif.

4. — Généralisations

Les valeurs numériques des entropies $H(U_r)$ et $H(U_\alpha)$ et la méthode selon laquelle on les a calculées dans le paragraphe 2.2.3, nous permet de formuler quelques observations intéressantes, à savoir :

a) L'entropie des expériences U_{ij} a une valeur qui dépend de la position des points de mesure des vitesses u_{ij} dans l'espace organisé de la section d'essai S. Pour la simplification de la terminologie utilisée, nous pouvons parler de l'entropie du point de mesure.

b) Dans la section organisée d'essai on peut distinguer deux directions distinctes de la succession des points de mesure, caractérisées, chacune, par une certaine valeur de l'entropie des points respectifs : $H(U_r)$ pour la direction radiale, $H(U_\alpha)$ pour la direction angulaire.

c) En vertu des propriétés de ses points, l'espace d'essai peut être considéré comme anisotrope du point de vue informationnel.

Cette esquisse d'une théorie de l'espace informationnel anisotrope permet d'envisager le problème des erreurs de calcul à savoir des erreurs de quadrature spatiale, d'un point de vue tout à fait nouveau.

La répartition en spirale des points de mesure des vitesses u_{ij} est un exemple des résultats remarquables qu'elle pourrait nous fournir.

L'analyse des propriétés informationnelles de l'espace d'essai est une idée féconde. Elle peut être généralisée à d'autres situations plus ou moins semblables.

L'espace d'essai peut être concret (comme celui rencontré dans ce mémoire), quasi-concret (caractérisé par des dimensions non-linéaires) ou abstrait (dont au moins l'une des « dimensions » est un nombre abstrait).

Sans entrer dans des détails, nous mentionnons ici que, par cette méthode, nous avons pu déterminer les conditions dans lesquelles on peut remplacer les essais « stationnaires » recommandés par le code C.E.I. [1] par les essais « continus », avec une précision au moins égale et un mode opératoire plus rapide [6].

5. — Conclusions

La répartition circulaire, homologue, des points de mesure des vitesses u_{ij} (fig. 1) représente la matérialisation de l'interprétation donnée par la mathématique classique aux conditions favorables à une précision élevée des essais, à savoir la limitation de la dissymétrie de l'hodographe spatial des vitesses dans la section de mesure S du débit Q.

Dans ces conditions, toutes les recherches ayant comme but la réduction des erreurs de mesure ou de calcul, cherchaient leur solution dans le perfectionnement de la coïncidence entre la loi d'interpolation admise (10) et la fonction réelle inconnue (2).

Les résultats obtenus par Winternitz (erreurs moyennes d'à peu près 0,3 %) représentent une limite au-delà de laquelle un progrès remarquable et sûr ne paraît plus possible à cause du caractère aléatoire des facteurs qui affectent cette non-coïncidence.

La solution théorique de l'augmentation du nombre n des points de mesure, n'est pas applicable en pratique à cause des erreurs supplémentaires qu'elle produirait. De plus, elle ne représente pas une solution économique.

La seule possibilité d'obtenir une réduction remarquable et sûre de ces erreurs, est ouverte par l'analyse informationnelle des propriétés de l'espace d'essai, c'est-à-dire l'utilisation plus complète de la source d'information représentée par les conditions dans lesquelles sont effectuées les essais, ce qui est possible à l'aide de la formule de Shannon pour la quantité d'information d'une expérience.

Dans ce but on a imaginé une modalité originale d'attribuer un champ de probabilité à chaque expérience U_{ij} des vitesses u_{ij} .

Comme résultat de cette analyse on a découvert que la section de mesure du débit dans une conduite forcée représente un espace d'essai anisotrope du point de vue informationnel et on a proposé la répartition en spirale des points de mesure de la vitesse ponctuelle (fig. 3). Elle utilise mieux que la répartition classique (fig. 1) cette propriété de l'espace d'essai.

La réduction de l'erreur de calcul du débit réalisée en conséquence de cette répartition est remarquable (statistiquement de 4-8 fois) et sûre (en tout cas l'erreur est plus petite que celle de l'emplacement classique).

La théorie de l'espace d'essai anisotrope du point de vue informationnel peut être généralisée et elle connaît déjà au moins une autre application.

Remerciements

Notre « théorie de l'espace informationnel anisotrope » a suscité un vif intérêt. Dans la liste assez longue des spécialistes qui nous ont apporté leur attention et leur collaboration, nous nous devons de citer dans l'ordre chronologique MM. : Gh. Bihoiu de l'IRME - Bucarest, qui a effectué la première application sur place de la méthode spirale; Dot. Ing. Mario Tonini qui a introduit ce mémoire dans le programme de la rencontre de l'ICMG dont il est le président; Prof. Dino Tonini qui l'a considérée digne d'être introduite dans le programme du Cours International Post-Universitaire d'Hydrologie de l'UNESCO, Padoue, dont il est le directeur; J. Gabaudan et B. Noiret de l'Electricité de France (DTG) - Grenoble qui se sont donnés la peine de vérifier la méthode, et de mettre au point le texte du mémoire; Alexandra Novodvorschi de l'IRME qui s'occupe d'une autre application de la théorie (la méthode d'essais continus) et L. Goia qui s'occupe de l'extension de cette théorie aux essais de la résistivité électrique du terrain aux prises de mise à terre des installations électriques; Dr. Ing. P. Wissner qui fut le premier à soutenir une méthode qui donnait des résultats difficiles à admettre (réduction substantielle et sûre de l'erreur); Prof. St. Zarea de l'Ecole Polytechnique de Bucarest qui l'a introduite dans le programme de son cours, preuve de sa réceptivité à la nouveauté scientifique.

Bibliographie

- [1] « Code international concernant les essais de réception sur place des turbines hydrauliques. » *C.E.I.* N° 41, (1963).
- [2] WINTERNITZ (F.A.L.), FISCHL (C.F.). — "A simplified integration technique for pipe flow measurement". *Water Power*, N° 6, (1957).
- [3] COSMA (Gh.), (O.) et (M.). — "Cu privire la eroarea de interpolare". *Sesiunea tehnico-stiintifica I.R.M.E.*, Bucuresti, (1968).
- [4] SHANNON (C.E.). — "A mathematical theory of communication". *Bell System Technical Journal*, 27, (1948).
- [5] GUIASU (S.), THEODORESCU (R.). — "Matematica si informatia" *Ed. Stiintifica*, Bucuresti, (1965).
- [6] COSMA (Gh.). — "Metode si instalatii de masura pentru determinarea caracteristicilor hidroagregatelor". *Lucrari Tehnico Stiintifice I.R.M.E.* (volum iubilari), Bucuresti, (1960-1970).

