Efforts de la houle sur des structures immergées

PAR

J. Sommet

ET

F. ParthiotService Scientifique d'Application, SOGREAH,
Grenoble

Introduction

La communication qui suit a pour but de décrire un modèle mathématique des efforts de la houle sur des structures immergées de grandes dimensions.

Les modèles mathématiques de ce genre ont fleuri en abondance au cours de ces dernières années et cependant, l'utilisateur éventuel, confronté à des impératifs particuliers, ne trouve finalement qu'un choix assez restreint d'outils adéquats, du simple fait que pour des raisons économiques évidentes, tout modèle de ce genre fait appel à des schématisations dont la validité s'accommode plus ou moins de ces impératifs particuliers.

A cet égard, il n'est pas inutile d'exposer les possibilités de l'un de ces outils, qui présente en particulier l'intérêt encore assez rare à l'heure actuelle d'avoir fait l'objet de nombreuses confrontations avec des modèles physiques.

Modèle d'un sous-marin dans la houle

DESCRIPTION DU MODELE

Le problème qui s'est trouvé à l'origine de la gestation de ce modèle est celui des mouvements d'un sous-marin dans la houle, problème intéressant évidemment au premier chef, la Marine Nationale.

Nous allons rappeler brièvement le principe de ce modèle, avant d'exposer son évolution en vue de l'adapter au calcul des efforts sur des structures immergées.

On en trouvera des exposés plus détaillés dans les Procédures du Symposium "Research on wave action" Volume IV, à Delft 1969, et dans une communication à la session 1973 de l'ATMA.

Le sous-marin immergé sous la houle est soumis naturellement à des forces de toutes directions fluctuant à la fréquence des vagues, qui entraînent les mouvements habituels de pilonnement, roulis, tangage, lacet. Il subit d'autre part, un effort d'attraction vers la surface, effort constant dans une houle régulière mais dont les fluctuations, dans une houle irrégulière, ont des conséquences importantes sur la stabilité en profondeur d'un engin immergé en équilibre de poids apparent. Il était donc essentiel de réaliser un modèle reproduisant ce dernier phénomène.

Nous en rappelons brièvement le processus, et d'abord les hypothèses de calcul :

- le fluide est considéré comme parfait, les forces de viscosité ne sont pas prises en compte, ce qui implique que les mouvements orbitaux dus à la houle ont des elongations relativement petites par rapport aux dimensions du corps ; cette condition sera précisée ultérieurement mais on retiendra la possibilité d'introduire aussi dans le modèle des forces de viscosité globales faisant intervenir des coefficients de trainée,
- la déformation de la surface libre due à la présence du corps est calculée, mais non son effet en retour — du second ordre — sur les forces induites.

L'écoulement dû à la houle est, dans ces conditions, défini simplement par son potentiel ϕ_H , en l'absence de tout obstacle ; la déformation de cet écoulement par le corps immergé induit un potentiel perturbateur ϕ_{PH} , et le mouvement propre du corps, supposé mobile, dans le fluide, un 3^e potentiel ϕ_{PC} , tel que l'écoulement résultant autour du corps devient :

$$\phi = \phi_H + \phi_{PH} + \phi_{PC}$$

1 / Houle complexe type Chausey
Spectre 1 et 1 bis

Les potentiels perturbateurs sont définis par une répartition de sources σ sur la carène, dont les intensités peuvent être calculées à partir des conditions aux limites, d'où la connaissance du potentiel global ϕ et des vitesses V_F au contact de la carène :

$$V_F = -\text{grad } \phi$$

Les forces agissant sur le corps sont les résultantes des forces de pression engendrées par l'écoulement, la pression en tout point étant définie par :

$$p = p_0 + \rho g Z + \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} - \rho \frac{V_F^2}{2}$$

Z = profondeur d'immersion

V_F = vitesse instantanée du fluide sur la carène

Une particularité de ce modèle est de prendre en compte le terme en V^2 fréquemment négligé parce qu'engendrant des forces relativement faibles, mais qui constitue la cause déterminante de l'attraction de la surface.

Pour le calcul la carène est divisée en un certain nombre n de facettes élémentaires, les fonctions continues étant remplacées par leurs valeurs discrètes en ces n points. Le potentiel et les vitesses sont ainsi déterminés à partir des densités de source par simple sommation sur toute la surface.

L'organisation du calcul permet de faire apparaître tous les intermédiaires : densités de source, vitesses, pressions, coefficients de masse ajoutée... Elle vise d'autre part à diminuer au maximum la durée des calculs, un grand nombre de sommations intermédiaires étant effectuées une fois pour toutes. Le calcul procédant par pas de temps, celui-ci a pu être réduit à 1 seconde environ, soit une définition dans le temps de l'ordre de 10 points par période de houle.

La houle est représentée au mieux, en fonction d'un spectre donné, par la superposition du nombre de composantes jugé nécessaire, de l'ordre de 10 par exemple, le potentiel complexe

résultant prenant également en compte les effets d'interaction entre les composantes.

Il est également possible d'appliquer une houle multidirectionnelle.

Les figures 1 et 2 montrent les résultats de ces calculs avec une houle définie par le spectre représenté ; avec d'une part le profil de la surface, d'autre part, les mouvements de pilonnement et tangage correspondants.

Ces exemples mettent en évidence l'importance relative des forces dues à V^2 dans la tenue de l'immersion : bien que l'intensité de ces forces soit d'un ordre de grandeur plusieurs dizaines de fois plus faible que celle des forces dues à chaque vague individuelle, la fréquence également faible de leurs variations fait que les mouvements en immersion qui en résultent peuvent être notablement plus importants que le pilonnement simple à la fréquence de la houle.

On s'est attaché essentiellement, étant donné le but de l'étude, aux déplacements dans le plan vertical ; toutefois, une étude particulière des mouvements d'abattée a également été effectuée.

CONTROLE DU MODELE

De nombreux contrôles de la validité du modèle ont été effectués.

Tout d'abord, pour en déterminer la précision et la finesse du découpage de carène à réaliser, on l'a appliqué à des formes simples pour lesquelles les solutions analytiques sont connues.

La figure 3 montre un essai d'application sur une sphère divisée en 162 facettes : les coefficients de masse ajoutée sont déterminés à moins de 2 %, et les valeurs du potentiel et des sources sont pratiquement identiques.

Une précision analogue a été obtenue avec un ellipsoïde triaxial défini par 120 facettes.

On a ensuite établi des comparaisons avec des résultats d'essais sur deux modèles physiques du sous-marin, l'un à l'échelle du 1/80 à SOGREAH, l'autre au 1/33 au Bassin des Carènes. Ces essais ont été menés en houles régulières et irrégulières. La figure 4 rend compte des résultats de cette comparaison en houle régulière, d'une part sur les coefficients de pilonnement C_z et de tangage C_{yy} définis par les relations classiques : (fig. 4a)

$$F_z = M_o \cdot a m e^{-mz} C_z \cdot \cos \omega t$$

$$F_{yy} = -M_o \cdot L \cdot a m e^{-mz} C_{yy} \sin \omega t$$

M_o = masse d'eau déplacée

a = amplitude houle ($H/2$)

z = profondeur d'immersion

m = $2\pi/\text{longueur d'onde}$

L = longueur du navire

d'autre part sur les mouvements mesurés et calculés (pilonnement, tangage) (fig. 4b).

Cette comparaison apparaît très satisfaisante. La force d'attraction à la surface a été dissociée, dans le calcul, des forces périodiques à la fréquence de la houle : elle est proportionnelle au carré de l'amplitude de la houle et décroît très rapidement

2 /

3 / Représentation approximative de la sphère

4 a / Essais comparatifs. Valeurs de C_z et C_{yy}

4 b / Pilonnement et tangage. Essais comparatifs

avec la profondeur ; là, également, ces résultats se sont avérés tout à fait comparables à ceux obtenus sur modèle (Fig. 5).

Des essais systématiques exécutés sur sous-marins réels en plongée ont permis d'ajuster les coefficients de masse ajoutée et de déterminer des coefficients d'amortissements. En effet, l'existence des mouvements basse fréquence d'une certaine ampleur a nécessité l'introduction de forces d'amortissements, déterminées alors globalement à partir des coefficients linéaires et quadratiques mesurés et introduites globalement dans le modèle mathématique.

Enfin, plusieurs campagnes de mesures des mouvements de sous-marins réels sous la houle ont parfaitement confirmé la qualité des résultats obtenus, donc la validité du modèle, notamment.

POSSIBILITES ET APPLICATIONS DU MODELE

En conclusion, on a ainsi réalisé un modèle très performant, répondant parfaitement au problème posé, qui était de déterminer les mouvements d'un flotteur en équilibre de flottabilité, et ceci compte tenu de toute la complexité de la houle réelle, et notamment des forces d'attraction vers la surface induites par celle-ci.

C'est un modèle à la fois analytique et global, en ce sens qu'il détermine la répartition des efforts locaux aussi bien que les forces globales.

Il a été utilisé pour définir les spécifications d'un dispositif de stabilisation en immersion du sous-marin, dispositif dont l'intervention peut être réintroduite dans le calcul pour obtenir une simulation complète du navire ainsi équipé.

Du fait de la brièveté du pas de temps utilisé – environ 1 seconde – il se prête bien à une simulation en temps réel et de ce fait constitue effectivement, à l'heure actuelle, la "boîte noire" d'un simulateur d'entraînement au pilotage en immersion.

REMARQUES DIVERSES

Il est évident qu'un modèle de ce genre peut s'adapter moyennant des simplifications et aussi certaines conditions aux problèmes des efforts sur les structures Off Shore ou sur les mouvements de celles-ci.

5 / Force d'attraction à la surface

Avant de passer à ces applications, on peut faire les remarques préliminaires suivantes :

1) Il y a lieu d'examiner de plus près la validité de l'hypothèse du fluide parfait et ses limites.

Sur des corps du type cylindre à section circulaire par exemple, l'expérience montre que les décollements apparaissent lorsque l'élongation totale du mouvement du fluide, soit $2a$, reste inférieure au rayon R du cylindre ; c'est donc à partir de cette limite ($2a = R$) que les efforts de viscosité prennent une importance certainement plus négligeable.

On pourra généraliser en disant que pour un volume limité par des surfaces courbes, l'hypothèse du fluide parfait reste valable tant que le rayon de courbure des angles (arêtes) reste inférieur aux orbites de la houle au contact.

Pour un solide présentant des arêtes vives, on peut considérer que le décollement franc engendré par l'arête n'intéresse, du fait du caractère transitoire de l'écoulement, qu'une longueur de l'ordre de grandeur de l'orbite de la houle. L'effet du décollement n'interviendra donc dans les forces globales que de façon négligeable si les dimensions des trajectoires sont petites par rapport à celles de l'obstacle. Il faut d'autre part remarquer que sur les volumes importants, les forces prépondérantes atteignent leur maxima au moment où les vitesses s'annulent, et où par suite aucun décollement ne se manifeste.

En conclusion, la validité de l'hypothèse du fluide réel est déterminée par le rapport :

$$\frac{\text{dimension caractéristique du corps}}{\text{dimension de l'orbite de houle}}$$

la valeur limite inférieure étant de l'ordre de 2 pour un cylindre à section circulaire.

2) La schématisation de la condition à la surface libre impose une certaine profondeur d'immersion. On montre que la méthode est valide lorsque cette profondeur atteint au moins 2 fois la hauteur de l'objet. Des recherches ultérieures permettront sans doute de préciser cette limite.

Dans les autres cas, il est toutefois possible de tenir un compte plus rigoureux de la déformation de la surface mais moyennant un alourdissement notable du calcul.

Calcul des efforts de la houle sur une structure immergée et fixe par le programme ESFIM

INTRODUCTION

Ce programme est spécialement adapté à la détermination des efforts exercés sur un réservoir sous-marin de forme quelconque. Celui-ci est supposé convenablement ancré au fond, donc fixe, et non soumis à la sous-pression. Mais surtout il

peut être composé de deux parties : l'une étant massive et de grande dimension par rapport à la houle, l'autre étant des appendices, tels que des piles, de dimensions horizontales réduites.

Le calcul du torseur des forces appliquées à une telle structure sera donc fait en deux temps et par des méthodes très différentes. Pour la partie massive, c'est-à-dire le réservoir, une répartition de sources pulsantes sur sa paroi donnera, en fluide parfait, la pression hydrodynamique sur chaque facette. Quant aux appendices, généralement des piles cylindriques, ils sont soumis à des efforts en phase avec l'accélération locale du fluide, d'autres étant en phase avec la vitesse.

Pour le calcul de ces efforts les résultats de Keulegan et Carpenter sont utilisés. Les piles sont alors découpées en tranches de dimensions convenables.

HYPOTHESES ET LIMITATIONS DU MODELE UTILISE

Tout d'abord, comme il a été dit plus haut, les forces de viscosité sont faibles et perturbent peu l'écoulement autour du réservoir. Les vitesses du fluide et les pressions exercées sur celui-ci sont donc pratiquement celles obtenues en fluide parfait.

Les effets de la surface libre étant schématisés, il est nécessaire que le réservoir lui-même soit à une profondeur d'immersion au moins égale à deux fois sa hauteur.

DESCRIPTION DU MODELE MATHEMATIQUE

Le fluide étant considéré comme incompressible et animé d'un mouvement irrotationnel, il existe un potentiel ϕ tel que :

$$\begin{cases} \bar{V}(M) = - \text{grad } \phi(M) \\ \Delta \phi = 0 \end{cases} \quad (1)$$

où $\bar{V}(M)$ est la vitesse du fluide en un point $M(X, Y, Z)$.

En présence de la structure immergée, la houle incidente sera perturbée par une houle réfléchie. Elles auront pour potentiel respectif ϕ_H et ϕ_{PH} .

Ce dernier est un potentiel de simple couche de sources réparties sur la surface (Σ) du corps et son image par rapport au fond.

Ce potentiel ϕ_{PH} sera alors :

$$\phi_{PH}(P) = \int_{\Sigma+\Sigma'} \frac{\sigma(M) ds(M)}{|\overline{MP}|}$$

La condition d'imperméabilité de la paroi conduit à l'équation intégrale suivante :

$$2\pi\sigma(P) \neq \int_{\Sigma+\Sigma'} \frac{\sigma(M) ds(M) \overline{MP} n(P)}{|\overline{MP}|^3} = - \bar{V}_H n(P) \quad (3)$$

Celle-ci permet de calculer σ puis ϕ . En posant :

$$q_i = \sigma(P) ds(P) \quad (4)$$

$$q_i = \sigma(M) ds(M) \quad (5)$$

$$Q_i = - \bar{V}_H(P) n(P) ds(P)/2\pi \quad (6)$$

$$\text{on a :} \quad q_i + \sum_j \frac{\overline{M_j M_i} \cdot \bar{n}_i ds_i}{2\pi |\overline{M_j M_i}|^3} q_j = Q_i \quad (7)$$

après avoir découpé la surface Σ et son symétrique Σ' en $2n$ facettes.

En tenant compte de la symétrie, on obtient le système matriciel :

$$q = D^{-1} Q = EQ \quad (8)$$

$$\text{où} \quad q = \begin{vmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{vmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{vmatrix}$$

Le terme général de la matrice D est :

- pour le terme diagonal :

$$d_{ii} = 2 + \frac{\overline{M_{i+n} M_i} \cdot \bar{n}_i ds_i}{2 |\overline{M_{i+n} M_i}|^3} - \Sigma \text{ des autres termes} \quad (9)$$

- pour les termes non diagonaux :

$$d_{ij} = \frac{\overline{M_j M_i} \cdot \bar{n}_i ds_i}{2\pi |\overline{M_j M_i}|^3} + \frac{\overline{M_{j+n} M_i} \cdot \bar{n}_i ds_i}{2\pi |\overline{M_{j+n} M_i}|^3} \quad (10)$$

La densité de source σ étant maintenant déterminée pour chaque facette et sa symétrique, les forces hydrodynamiques seront obtenues par intégration de la pression hydrodynamique sur la surface soit :

$$\bar{F} = \int_{\Sigma} p \cdot \bar{n} ds \quad (11)$$

$$\bar{M} = \int_{\Sigma} p (\overline{OM} \wedge \bar{n}) ds \quad (12)$$

Il est très justifié d'écrire ici :

$$p = \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} = \rho \int_{\Sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t}(M) \frac{1}{|\overline{PM}|} ds(M) \quad (13)$$

Le torseur des actions exercées par la houle est facilement obtenu par les sommations suivantes déduites de (8)

$$\begin{aligned} F_x &= \rho \sum_{k=1}^n X_k \frac{dQ_k}{dt} \\ F_y &= \rho \sum_{k=1}^n Y_k \frac{dQ_k}{dt} \\ F_z &= \rho \sum_{k=1}^n Z_k \frac{dQ_k}{dt} \\ M_x &= \rho \sum_{k=1}^n L_k \frac{dQ_k}{dt} \\ M_y &= \rho \sum_{k=1}^n M_k \frac{dQ_k}{dt} \\ M_z &= \rho \sum_{k=1}^n N_k \frac{dQ_k}{dt} \end{aligned} \quad (14)$$

6 /

7 / Découpage du réservoir en 108 éléments

8 / Force verticale

9 / Force horizontale

10 / Moment de renversement

11 / Moment de torsion

Dans le cas présent la structure étant immobile les $6n$ coefficients $X_k, Y_k, Z_k, L_k, M_k, N_k$ sont indépendants du temps et de la direction de la houle. Ils sont de la forme :

$$X_k = \sum_{i=1}^n \alpha_i ds_i \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n e_{jk} \left[\frac{1}{|M_i M_j|} + \frac{1}{|M_i M_{j+n}|} \right] + e_{ik} \left[\frac{1}{|M_i M_{i+n}|} + \frac{3,54}{\sqrt{ds_i}} \right] \right) \quad (15) \quad \text{si} \quad n_i = \begin{vmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \\ \gamma_i \end{vmatrix}$$

Par ailleurs selon (6) :

$$\frac{dQ_k}{dt} = - \frac{d\bar{V}_h}{dt} \cdot \bar{n}_k \frac{ds_k}{2} \quad (16)$$

or

$$\bar{V}_h = - \text{grad } \phi_h$$

Le modèle de houle utilisé pour décrire la houle incidente est assez important et son choix est délicat si l'on ne veut pas trop alourdir un programme par ailleurs souple et peu coûteux. Un bon compromis serait d'utiliser un développement au troisième ordre du potentiel. En fait, celui que nous utilisons principalement est du deuxième ordre soit :

$$\phi_h = \frac{a\omega}{k} \frac{\text{ch } kz}{\text{sh } kh} \sin [\omega t - k(x \cos \varphi + y \sin \varphi)] + \frac{3}{8} a^2 \omega \frac{\text{ch } 2kz}{\text{sh}^4 kh} \sin 2 [\omega t - k(x \cos \varphi + y \sin \varphi)]$$

CONCLUSION

Ce programme est souple car il décompose les calculs en deux parties :

- Dans la première phase, on effectue le calcul des coefficients de masse ajoutée, indépendants du temps, des n facettes composant la paroi.
- Ces n coefficients permettent dans une seconde phase de calculer l'action d'une houle donnée :
 - en utilisant, au choix, un modèle irrotationnel du 2^e, 3^e ou 5^e ordre ;
 - en variant à volonté la période et l'azimut de la houle.

Ces calculs sont alors rapides et peu coûteux.

Quant au découpage en facettes, il n'est pas utile qu'il soit très fin, la précision ne s'accroissant que peu au-delà d'un certain seuil. Et par ailleurs, la taille mémoire nécessaire en sera considérablement réduite. Les calculs usuels ne font donc intervenir qu'entre 100 et 200 éléments.

EXEMPLE D'APPLICATION D'ESFIM

La figure 6 montre un exemple de structure pour laquelle nous avons appliqué ce programme. Ce réservoir en béton, fut découpé en 108 éléments pour sa partie massive et en 30 autres éléments pour les piles coniques (fig. 7). Le calcul des éléments du torseur (résultats n° 8, 9, 10, 11) ont été effectués en utilisant un modèle de houle au second ordre.

Le calcul, ayant considéré cinq houles de périodes différentes selon cinq directions, soit vingt-cinq cas, a duré 68 secondes sur IBM 360/65.

Par ailleurs, on peut superposer l'action d'un courant de direction indépendante de celle de la houle. Dans le cas présenté ici, un courant de un nœud a été simulé. On peut, bien sûr, représenter à la demande un profil des courants donnés.

Sur les résultats ci-après, on peut remarquer que l'influence de l'angle d'incidence de la houle est minime, surtout pour les valeurs maximales.

Conclusions générales

— 1 —

L'emploi des modèles mathématiques de structures complets et rigoureux, utilisables dans toutes les conditions de sites marins, conduit à des volumes de calcul considérables, d'où l'intérêt de développer des modèles plus simples et mieux adaptés à des situations particulières, donc plus économiques.

On est ainsi conduit à proposer, pour des structures en grande profondeur, des modèles "hybrides" tels que le programme ESFIM, qui utilisent une méthode par éléments finis pour le caisson, et une formulation globale simple pour les piles cylindriques.

La précision de ces modèles est généralement suffisante, pour une étude d'avant-projet, étant entendu que les essais sur modèle physique restent nécessaires pour la mise au point du projet définitif.

Cependant il reste souhaitable de chercher à améliorer cette précision dans deux voies :

- prise en compte de forces de viscosité ;
- meilleure approche de la condition à la surface libre.

— 2 —

Dans le cas de plates-formes posées au fond, l'absence de mouvement de celles-ci justifie d'effectuer des calculs d'efforts en houle régulière ; les forces variables à basse fréquence, qui résultent des termes non linéaires de la houle, restent en effet faibles vis-à-vis des forces à la fréquence des vagues.

Pour une houle définie par son spectre, l'additivité des forces dues à chaque composante est une hypothèse valable.

Cependant, dans le cas où la houle réelle comporte des déferlements, l'impulsion brutale transmise à des piles douées d'élasticité peut faire apparaître des déformations de nature vibratoire ; un modèle complet en similitude d'élasticité devient alors nécessaire.

Voir
la Discussion à la
page suivante

Discussion

Président : M. P. WILLM

M. le Président remercie M. SOMMET pour son exposé clair et bien documenté et ouvre la discussion.

Dans le calcul des efforts hydrodynamiques sur la plate-forme étudiée, demande M. BELLAMY (S.E.E.E.), quelles sont les conditions à la limite plate-forme - sol? Le fait d'envisager une pression uniforme sous la base conduit à des forces verticales élevées, notamment à des forces de soulèvement; la porosité du sol peut réduire ces forces.

On a considéré, répond M. GAUTHIER, un sol plan et imperméable et l'image du réservoir par rapport à celui-ci. La structure comporte des bèches enfoncées assez profondément dans le sédiment de fondation pour éliminer toute sous-pression appréciable. La fondation de la structure est réalisée de façon que l'on puisse admettre qu'elle repose sur un sol imperméable.

M. CHENOT sollicite quelques renseignements sur la formation du décollement sur des corps non cylindriques soumis à l'action de la houle.

Dans un corps cylindrique, estime M. SOMMET, la distance à laquelle apparaît le décollement est de l'ordre de 20 % de la corde du dit corps. Pour une section en forme de losange, ce chiffre est réduit de moitié environ.

M. GAUTHIER précise, comme suit, la méthodologie employée dans le modèle faisant l'objet de la communication présentée par M. SOMMET :

Il s'agit d'un modèle hybride puisqu'on utilise, d'une part, une méthode par éléments finis relativement compliquée sur la masse principale de la structure et, d'autre part, sur les éléments de dimension plus petite, des formules de type Morrison.

Ce n'est donc pas une méthode très rigoureuse. Mais, dans l'état actuel des connaissances physiques et des possibilités des modèles mathématiques, cette voie paraît assez réaliste car elle s'adapte assez facilement à des structures réelles (souvent composées d'un très gros ensemble relié à des parties nettement plus fines).

Ce modèle serait adaptable à une plate-forme semi-submersible à condition que ses éléments principaux soient à une distance suffisante de la surface libre. Or, c'est bien le cas pour la grande majorité des structures *off shore* et cette tendance ne fera d'ailleurs que s'amplifier du fait de l'augmentation des profondeurs des fonds marins intéressés.

M. SAGNER (Sté Bertin) apporte d'intéressants renseignements dans une intervention qu'il a résumée comme suit :

M. CHENOT a demandé s'il existait des résultats sur l'amplitude du déplacement entraînant l'apparition de décollement pour des formes autres que celle des cylindres circulaires. Nous avons fait des essais sur un cylindre elliptique déplacé selon son petit axe dans un fluide au repos. Nous avons trouvé que la distance au bout de laquelle apparaissait le décollement était d'environ 20 % du grand axe de l'ellipse. Les mêmes essais ont été effectués sur un profil losangique — donc à arêtes vives — le sillage apparaît pour des distances plus courtes; en réalité, le décollement apparaît presque instantanément mais le sillage ne prend une loi d'évolution régulière qu'au bout d'une distance d'environ 10 % de la corde.

Je voudrais également revenir sur la formule de Morrison car elle me paraît difficilement compatible avec les lois générales de la mécanique des fluides. On peut le montrer de façon très simple :

Considérons un cylindre mis en mouvement par rapport à un fluide. La force exercée par le fluide sur le corps peut se mettre sous la forme très schématique suivante :

$$F = d/dt (MV)$$

M étant une certaine masse de fluide mise en mouvement à la vitesse V du cylindre (en réalité cette grandeur s'exprime sous la forme d'une intégrale étendue à tout le domaine occupé par le fluide).

Considérons d'abord le cas d'un mouvement de faible amplitude pour lequel il ne se forme pas de décollement. Le champ des vitesses restant homothétique au cours du temps, la masse M est constante et

$$F = M (dV/dt)$$

M étant proportionnel à ρ , masse spécifique du fluide, et D^2 (D diamètre du cylindre) on retrouve l'effet d'inertie classique.

Considérons ensuite un mouvement à vitesse constante. Il existe un sillage qui s'allonge sans arrêt au cours du mouvement. Si on admet que sa longueur est proportionnelle au déplacement X et que sa largeur est constante proportionnelle au diamètre D :

$$F = \frac{d(MV)}{dt} = V \frac{dM}{dt} = X \times k \rho \frac{dX}{dt} \quad D = k \rho \quad DV^2$$

on retrouve la traînée classique de l'écoulement permanent.

Par contre, lorsque le mouvement est accéléré et qu'il existe un sillage de forme variable avec le temps

$$F = M \frac{dV}{dt} + V \frac{dM}{dt}$$

le premier terme pourrait être assimilé au terme d'inertie de la formule de Morrison et le deuxième au terme de traînée. Cependant, on constate que, pour qu'il existe réellement un terme de traînée proportionnel à V^2 , il faut que dM/dt soit proportionnel à V , par suite le coefficient d'inertie ne peut être constant. Le fait que les effets de traînée et d'inertie ne soient pas indépendants, mais liés tous les deux à l'évolution du sillage, implique qu'ils ne peuvent pas être constants simultanément. C'est ce que nous avons constaté sur une expérience élémentaire correspondant au simple déplacement d'un cylindre elliptique dans un fluide initialement au repos (mouvement analogue au passage d'une vague solitaire). Dans la phase d'accélération initiale, le coefficient d'inertie a bien la valeur théorique, par contre lors de l'arrêt le cylindre a accumulé dans son sillage une masse importante de fluide (correspondant à l'effet de traînée) et le coefficient d'inertie est beaucoup plus grand. Je signale que sur cet exemple un modèle très simple qui consiste à écrire

$$M = aX + b$$

permet de corréler parfaitement les résultats avec seulement deux constantes empiriques a et b . Ce qui permet de penser que l'on peut trouver des modèles simples beaucoup plus corrects que celui de Morrison.

Personne ne relève le défi lancé par M. SAGNER? interroge M. le Président. Je crois effectivement qu'il doit être possible de trouver d'autres formulations que celle de Morrison pour exprimer les forces hydrodynamiques en écoulement permanent.

Il me semble que l'on peut assimiler la simplification introduite dans ces formules à celle que l'on admet dans le cas général, lorsqu'on applique les équations fondamentales de la dynamique à un élément de masse m du liquide et qu'on écrit que la somme des forces extérieures est égale à la somme des forces d'inertie; on ne fait généralement pas varier la masse m . Il en est de même lorsqu'on veut faire une intégration simple en linéarisant les forces de traînée.

Dans les formules de Morrison c'est une masse sans « masse ajoutée » qu'on prend en compte.

En l'absence d'autre demande d'intervention, M. le Président clôt cette discussion passionnante — et aussi la séance de la matinée — en remerciant les auteurs des mémoires présentés et toutes les personnes qui sont intervenues dans leur discussion.