Aspects méthodologiques de la gestion optimale des réservoirs à buts multiples

Jacques Bernier

Laboratoire National d'Hydraulique

Electricité de France, Direction des Etudes et Recherches

Introduction

On a constaté longtemps et on constate toujours un fossé important entre outils pratiques d'une part et méthodes théoriques applicables à l'étude de la gestion des réservoirs à buts multiples.

Au niveau théorique, il y a un développement important des méthodologies mathématiques, économiques, probabilistes, etc... Cependant les applications de ces méthodologies ne semblent trop souvent que des illustrations artificielles et trop schématiques.

Au niveau des problèmes concrets, les méthodes couramment pratiquées apparaissent très informelles et approximatives avec des résultats de gestion souvent médiocres. Si les usages potentiels des réserves sont nombreux, en pratique les buts envisagés vont rarement au delà de 2 (hydro-électricité + irrigation ; protection contre les crues + soutien des étiages, etc...). Si on fait abstraction d'usages indirects dont la gestion ne tient généralement pas compte, les réservoirs sont pratiquement mono ou bi-objectifs. Concrètement on fixe alors plus ou moins arbitrairement, un certain nombre de paramètres de décision essentiels. Ainsi est-on amené souvent à séparer les objectifs. L'affectation de tranches de réservoirs à chacun de ces objectifs, la gestion indépendante de chaque tranche amènent à traiter le problème de deux réserves séparées même s'il y a interaction au niveau des revenus. Il en résulte des approches approximatives, séparatives qui peuvent aboutir à une sous-évaluation des bénéfices retirés d'un réservoir par rapport aux méthodes recherchant un optimum global. Pour rapprocher théorie et pratique, il est utile de présenter la théorie de façon heuristique en discutant les hypothèses de base qui conditionnent les limites de son applicabilité.

La théorie des réservoirs selon P. Massé

Sur le plan des principes, il existe une théorie de la gestion des réservoirs bien au point et connue depuis les travaux de P. Massé (Les Réserves et la Régulation de l'Avenir – 1946). Pour l'exposé nous nous limiterons dans la suite au cas d'un seul réservoir.

Supposons donc que le temps peut être découpé en périodes élémentaires unitaires à l'origine de chacune desquelles la décision de gestion est définie globalement pour toute la période et posons :

. R_T : réserve au début de la période T,

. Q_T : apport hydrologique de la période T,

. X_T : déstockage destiné à satisfaire les besoins ou à laisser un creux suffisant pour l'emmagasinement des crues futures éventuelles,

. $U_T(X_T, R_T)$: revenue de la période T éventuellement fonction du niveau de la réserve,

. $V_T(R_T)$: valeur économique de la réserve au début de la période T.

Tenant compte des équations de continuité :

– régime bloqué : $R_{T+1} = C$ (capacité maximale)

si $R_T + Q_T \geqslant X_T + C$

– régime libre : $R_{T+1} = R_T + Q_T - X_T$

si $X_T < R_T + Q_T < X_T + C$

– régime bloqué : $R_{T+1} = 0$

si $R_T + Q_T = X_T$

et de la condition d'optimalité de la valeur de la réserve :

$$\text{maximum } [U_T(X_T, R_T) + a\, V_{T+1}\ (R_{T+1})] \quad (1)$$

où a est un taux d'actualisation économique sur la période élémentaire, on obtient le principe de P. Massé :

$$\frac{\partial U_T}{\partial X_T} = a \frac{\partial U_{T+1}}{\partial R_{T+1}} + \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots \qquad (2)$$

où les λ sont des coefficients tenant compte des diverses contraintes probabilistes ou physiques pour les destockages ou uniquement physiques notamment pour les limites de la réserve.

En régime libre où les coefficients λ sont nuls le principe de Massé s'exprime ainsi : à l'optimum le revenu marginal immédiat d'un m^3 d'eau destockée est égal au revenu marginal du m^3 d'eau restant en stock.

Discussion des hypothèses sous-jacentes

La première hypothèse à discuter est celle concernant le découpage du temps. Selon la durée de la période élémentaire, on aura une gestion à court, moyen (saisonnier) ou long terme. Il faut résoudre par ailleurs le problème de la gestion à l'intérieur de la période, problème qui peut être abordé par des méthodes approchées notamment déterministes si cette période n'est pas trop longue. Assez souvent la période est choisie pour des raisons de simplifications notamment en ce qui concerne les lois de probabilité des apports. Il reste que le choix de la période élémentaire conditionne le réalisme de la gestion obtenue par le procédé d'optimisation théorique.

Une autre hypothèse fondamentale concerne la quantification au moyen d'une même unité monétaire des divers revenus ou bénéfices (éventuellement négatifs) retirés de la gestion.

La facilité relative de la mesure de ces revenus dans le cas de l'hydroélectricité a permis le développement de l'approche mathématique dans ce domaine particulier. Mais dans les autres domaines, la valeur de l'eau prend des aspects divers pour lesquels il semble difficile de trouver un étalon de mesure commun. Certains usages intangibles de l'eau ne peuvent pas être affectés d'une valeur économique chiffrée notamment pour ce qui concerne les aspects écologiques, sociaux, etc... De plus la formulation classique précédente suppose que les fonctions revenus U_T sont données ou imposées par les usagers de façon extérieure à la gestion. Mais bien souvent, et nous suivons Lobert [3] sur ce point, les usagers devront attendre que le projeteur ou le gestionnaire du réservoir aient défini sa production avant d'en déterminer la valeur économique. En bref l'estimation du revenu U_T résulte d'un processus itératif où interviennent le gestionnaire et les usagers. L'évaluation de U est liée à la définition de la politique de gestion du réservoir. On trouvera dans Lobert [3] des développements sur ces problèmes.

Compte tenu des difficultés d'évaluation des revenus, les termes du critère d'optimalité (1) sont entachés d'erreurs dont il importe d'avoir conscience. Comme l'a observé Lobert, l'optimisation (1) consiste à comparer pour différentes politiques de gestion, une somme de deux termes dont l'un $a\ V_{T+1}$ est souvent de plusieurs ordres de grandeur supérieur au premier terme U_T. Les erreurs sur les revenus futurs sont cumulées et amplifiées dans V_{T+1} de telle sorte que les comparaisons peuvent n'avoir aucun sens.

Intervention de l'aléatoire

Pour l'étude du rôle de l'aléatoire, il est préférable de partir de la condition d'optimalité (1) plutôt que de la condition différentielle (2).

On peut supposer la valeur V_T de la réserve définie pour une réserve supérieure à la capacité maximale C en posant :

$$V_T(R_T) = V_T(C) \qquad \text{si} \qquad R_T \geqslant C$$

Si par ailleurs, on définit $\hat{V}_T(R_T)$ la valeur résultant d'une gestion future optimale, on aura une équation de récurrence sur les valeurs optimales, équation dite de la programmation dynamique.

Deux cas sont à considérer :

a) Règle de gestion : hasard $\rightarrow$ décision

L'aléa Q_T est supposé connu au moment du choix de la décision de destockage X_T :

$$\hat{V}_T(R_T) = \max_{X_T} \{U_T(X_T, R_T) + a\ \hat{V}_{T+1}(R_T + Q_T - X_T)\} \qquad (3)$$

Cette formulation est particulièrement adaptée au calcul par simulation où on dispose d'une chronique d'apports Q_T soit historiques, soit synthétiques, générés dans le cadre d'un modèle probabiliste des processus stockastiques des Q_T.

b) Règle de gestion : décision $\rightarrow$ hasard

La décision est prise avant la réalisation de l'aléa Q_T. Dans de nombreux cas cette hypothèse est la plus réaliste. C'est alors que V_T a le sens d'une espérance mathématique dans la mesure où il faut en pondérer les valeurs par les probabilités d'occurrence des séquences de Q_T. Mais de façon récurrente on aura :

$$\hat{V}_T(R_T) = \max_{X_T} \left\{ U_T(X_T, R_T) + a \sum_{Q_T} \text{Prob}(Q_T)\ \hat{V}_{T+1}(R_T + Q_T - X_T) \right\} \qquad (4)$$

Pour certains problèmes, le revenu immédiat peut dépendre de Q_T, nous en verrons un exemple, et U_T a également le sens d'une espérance mathématique par rapport à l'aléa Q_T.

Développements théoriques Réservoirs Markoviens

La théorie des réservoirs a fait l'objet de nombreux développements théoriques issus de la théorie des processus de Markoff. On observe que les équations de continuité permettent de définir une transition de l'état $R_T = I$ à l'état $R_{T+1} = J$ du réservoir. Le revenu U et la valeur V sont fonction de ces états :

Compte tenu de la probabilité de la transition :

$$P_{IJ}^T = \text{Prob}\,[J + X_T - I] = \text{Prob}\,(Q_T)$$

l'équation de la programmation dynamique devient :

$$\hat{V}_T(I) = \max \left\{ \sum_J P_{IJ}^T \left[U(I,J) + \hat{V}_{T+1}(J)\right] \right\} \quad (5)$$

Selon que les apports sont indépendants ou markoviens c'est le réservoir seul R_T ou le système double $\binom{R_T}{Q_T}$ qui est markovien.

Cette approche a donné l'occasion de nombreux travaux théoriques intéressants, mais si elle a l'avantage d'être assez générale et de s'appliquer à des objectifs multiples, elle aboutit à des algorithmes de recherche d'optimum très lourds, difficiles sinon impossibles à exploiter, même par des moyens de calculs puissants, pour des cas pratiques réalistes. Les applications qui en ont été faites, traitent de représentations de réservoirs trop schématiques pour être utilisables.

Les applications

Malgré les difficultés d'application exposées précédemment, la théorie de Massé a fait l'objet d'applications pratiques notamment dans le cas des réservoirs hydroélectriques. C'est en fait la relative simplicité de l'évaluation économique des revenus électriques tirés de l'eau stockée qui a permis le développement de cette application. Il existe à Electricité de France aussi bien à la Direction des Etudes et Recherches (Guillaumin [2] – Droger [1]) qu'à la Direction Production Transport (Guillot – Grard) des codes de calcul de gestion de réservoirs hydroélectriques isolés ou de systèmes de réservoirs plus ou moins complexes orientés vers l'objectif hydroélectrique mais pouvant tenir compte de contraintes touristiques, agricoles, etc... Ces codes pourraient être appliqués à d'autres objectifs pour autant que les revenus soient quantifiés par ailleurs.

Sur le plan des réservoirs de soutien d'étiage destinés en outre au contrôle de la pollution par dilution on notera les travaux de Lobert [3]. D'autres illustrations seront données au cours de ces séances, en particulier par M. Normand.

Nous voudrions donner quelques aperçus sur un problème où il est permis d'éviter les difficultés d'application que nous avons soulevées, c'est le problème de la gestion d'un réservoir destiné conjointement à l'emmagasinement de crue et au soutien des étiages. En fait nous nous limiterons à la gestion en cours de saison de crue de durée limitée à K périodes élémentaires à la fin de laquelle on doit assurer un remplissage suffisant pour assurer des besoins ultérieurs. La gestion ultérieure après la fin de la saison de crue n'est pas envisagée ici.

Modélisation du réservoir : crue - étiage

On supposera qu'à la fin des K périodes de crue, il faut viser un niveau r du contenu du réservoir ; à r, supposé fixé par une gestion à plus long terme, est associée une probabilité de défaillance :

$$\alpha = \text{Prob}\,[R_{K+1} \leqslant r] \quad (6)$$

Par ailleurs on supposera que, pour chaque période T, le débit Y sortant du réservoir, égal à :

$$Y_T = X_T \qquad \text{si} \quad R_T + Q_T - X_T \leqslant C$$

$$Y_T = R_T + Q_T - C \quad \text{si} \quad R_T + Q_T - X_T > C$$

peut entraîner des dommages s'il dépasse un seuil Y_0 auquel est donc associée une probabilité de dommage relative à la période T :

$$\beta_T = \text{Prob}\,[Y_T \geqslant Y_0] \quad (7)$$

Sans chercher à chiffrer économiquement des coûts de défaillance et de dommages, il est possible d'affecter ces diverses probabilités de pondérations respectives c et b dont le rapport fournira une indication de l'importance relative que l'on veut donner au respect des deux contraintes probabilistes.

Il s'agit donc, une fois obtenue une gestion dépendant d'un couple b et c donné, de faire varier le rapport c/b pour obtenir le niveau relatif voulu entre probabilité de défaillance en fin de saison et probabilité de dommages.

L'estimation de ces probabilités est basée plus aisément sur une simulation de la gestion.

Pour écrire l'équation de la programmation dynamique, nous raisonnerons en termes de coûts et non de revenus et la formulation est symétrique de la précédente en supposant que $V_T(R_T)$ est le coût associé au contenu R_T du réservoir :

$$\hat{V}_T(R_T) = b\,\text{Prob}\,[Q_T \geqslant c + Y_0 - R_T] +$$

$$+ \min_{X_T} \{\Sigma_{Q_T} \text{Prob}\,(Q_T)\,\hat{V}_{T+1}(R_T + Q_T - X_T)\} \quad (8)$$

On notera qu'ici le coût de dommages immédiat ne dépend pas du destockage réglé X_T mais du "déversement" éventuel. La décision de gestion conditionne l'efficacité future du réservoir en assurant un creux suffisant. C'est à la dernière période K qu'intervient le "coût" de défaillance. On peut voir que l'optimum de gestion pour cette dernière période est obtenu pour :

$$\hat{X}_T = 0$$

de telle sorte que, en posant : $F_T(q) = \text{Prob}\,[Q_T \leqslant q]$, on a :

$$\hat{V}_K(R_K) = b\,[1 - F_K\,(c + Y_0 - R_K)] + c\,F_K\,(r - R_K) \quad (9)$$

si $\qquad R_K \leqslant r$

et $\qquad \hat{V}_K(R_K) = b\,[1 - F_K\,(c + Y_0 - R_K)] \quad (10)$

si $\qquad R_K > r$

La gestion optimale

L'optimum de gestion est donc obtenu pour :

$$\min_{X_T} \left\{ \sum_{Q_T} \text{Prob}\,(Q_T)\ \hat{V}_{T+1}\,(R_T\,Q_T - X_T) \right\} \quad (11)$$

Le coût optimal $\hat{V}_T(R)$ défini par l'équation de récurrence (8) a les propriétés suivantes :

Il existe une séquence de volume de la réserve : $\hat{R}_T, \hat{R}_{T+1}, \ldots \hat{R}_{K-1}, \hat{R}_K$ minimisant les fonctions $\hat{V}_T(R)$ et qui possède les propriétés suivantes :

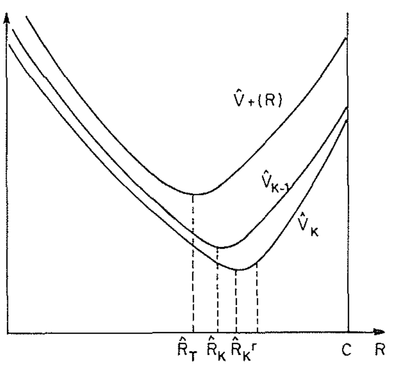
$$\hat{R}_T < \hat{R}_{T+1} < \ldots < \hat{R}_{K-1} < \hat{R}_K < r$$

et les coûts minimaux vérifient les inégalités :

$$\hat{V}_T\,(\hat{R}_T) > \hat{V}_{T+1}\,(\hat{R}_{T+1}) > \ldots > \hat{V}_K\,(\hat{R}_K)$$

La règle de gestion peut être obtenue numériquement en résolvant la condition (1) mais on peut avoir des résultats intéressants en utilisant une approximation basée sur les principes suivants :

Nous appellerons la courbe représentative de la fonction croissante $\hat{R}_T = g(T)$, courbe d'alerte, et nous supposerons que les valeurs $\hat{R}_T$ sont assez grandes ou l'intervalle élémentaire assez petit pour que Q_T et X_T soient considérés comme petits vis-à-vis de R. C'est dire que nous étudierons la gestion au voisinage de la courbe d'alerte. Ce type d'hypothèse peut n'être pas entièrement réaliste dans le cas de crue où Q_T peut être sujet à des aléas importants mais les conclusions que nous pouvons en tirer seront qualitativement importantes.



Nous définirons la gestion optimale en supposant qu'il existe un destockage limite X_0, et alors la décision optimale devient :

$\hat{X}_T = 0$

si $E(Q_T) < \hat{R}_{T+1} - R_T$

$\hat{X}_T = E\,(Q_T) + R_T - \hat{R}_{T+1}$

si $\hat{R}_{T+1} - R_T < E(Q_T) < \hat{R}_{T+1} - R_T + X_0$

$\hat{X}_T = X_0$

si $E(Q) > X_0 + \hat{R}_{T+1} - R_T$

On voit ainsi que $\hat{R}_{T+1}$ est la réserve que l'on doit viser en fin de période T compte tenu d'une prévision d'apport égale à l'espérance mathématique du débit Q_T.

D'autre part en appelant $f(z)$ la densité de probabilité du débit Q_T centré, c'est-à-dire :

$$f_T(z) = \frac{d\,F_T\,[E(Q_T) + z]}{dz}$$

où $z = Q_T - E(Q_T)$

on peut écrire :

$$\hat{R}_{T+1} - \hat{R}_T \approx E(Q_T) + b\,\frac{f_T\,(c + Y_0 - \hat{R}_{T+1})}{M} \quad (12)$$

avec $\qquad M = \dfrac{d^2\ V_T\,(\hat{R})}{d\,R^2} \qquad$ pour $\quad R = \hat{R}_{T+1}$

Toutes choses égales par ailleurs. $f_T(z)$ est généralement une fonction croissante de la variance Var (Q_T) de Q_T. Il en résulte que l'écart entre les niveaux optimaux du réservoir est croissant avec Var (Q_T). Par ailleurs M étant linéaire en b et c avec coefficients positifs, il en résulte que l'écart entre les niveaux optimaux à viser pour chaque période est d'autant plus grand que le rapport c/b est petit.

Intérêt des prévisions de débits de crue

Compte tenu de l'information disponible au moment de la décision : pluviométrique, hydrométrique à l'amont du site, ou hydrométrique antécédente au droit du site du réservoir, on peut généralement obtenir une prévision :

$$Q_T = Q_T^x + \epsilon_T \quad (13)$$

où Q_T^x est la prévision fonction de l'information disponible, et ϵ_T est l'erreur aléatoire de prévision telle que $E(\epsilon_T) = 0$ et Var $(\epsilon_T) = \sigma_T^2$ caractérisant la précision de la prévision.

Il est aisé de voir que la décision optimale a la même forme que précédemment où $E(Q_T)$ est remplacé par Q_T^x. Cependant le niveau $\hat{R}_{T+1}$ à viser n'est pas identique au précédent ; la courbe d'alerte est modifiée de telle sorte que :

$$\hat{R}_{T+1} - \hat{R}_T \simeq E(Q_T^x) + b\,\frac{h_T\,(c + Y_0 - \hat{R}_{T+1})}{M} \quad (14)$$

où h_T est cette fois-ci la densité de probabilité de l'erreur de prévision ϵ_T et la variation de la courbe d'alerte dépend alors de σ_T^2 qui sera généralement inférieur à Var (Q_T). Il en résultera une amélioration de la gestion dans le sens où, au voisinage de la courbe d'alerte :

$$\hat{V}_T(R) \text{ avec prévision } < \hat{V}_T(R) \text{ sans prévision} \quad (15)$$

l'écart étant d'autant plus grand que σ_T^2 est petit.

Intérêt de l'augmentation du délai de prévision

Il est encore possible d'améliorer la gestion prévisionnelle précédente en anticipant sur les prévisions ultérieures.

Supposons qu'on dispose, au début de la période T, outre la prévision (13), d'une prévision complémentaire pour le débit suivant :

$$Q_{T+1} = Q_{T+1}^x + \epsilon_{T+1}$$

Q_{T+1}^x est fonction de l'information disponible au début de la période T, l'erreur ϵ_{T+1} aura en général une variance s_{T+1}^2 plus grande que σ_T^2, on peut aussi admettre que les erreurs ϵ_{T+1} et ϵ_T sont corrélées, ρ étant le coefficient de corrélation de telle sorte qu'on aura une espérance conditionnelle :

$$E[\epsilon_{T+1}/\epsilon_T] = \rho \frac{s_{T+1}}{\sigma_T} \epsilon_T$$

On supposera de plus que la dépendance entre ϵ_T et ϵ_{T+1} apparaît uniquement par cette espérance conditionnelle, c'est-à-dire que la densité de probabilité conditionnelle de ϵ_{T+1} à ϵ_T fixé, $k_{T+1}\left(\epsilon_{T+1} - \rho \frac{s_{T+1}}{\sigma_T} \epsilon_T\right)$, ne dépend pas de ϵ_T lorsque ϵ_{T+1} est centrée autour de son espérance conditionnelle.

La règle de gestion optimale est de forme semblable aux règles optimales précédentes, le destockage $\hat{X}_T$ est, dans les limites physiques $(0, X_0)$ admissibles, égal à :

$$\hat{X}_T = R_T + Q_T^x + Q_{T+1}^x + \delta - \hat{R}_{K+2} \quad (16)$$

avec :

$$\partial = \frac{b\, k_{T+1}\, (c + Y_0 - \hat{R}_{K+2})}{\dfrac{\partial^2 V_{K+1}\, (\hat{R}_{K+2})}{\partial R_{K+1}^2}}$$

Verbalement le destockage de la période T est calculé en visant la courbe d'alerte afférente à la deuxième période ultérieure, compte tenu des apports prévus pour les deux périodes. Un surcroît δ de destockage est cependant nécessaire, fonction de la loi de probabilité de l'erreur de prévision sur Q_{T+1}, δ étant en général d'autant plus grand que les erreurs de prévision ϵ_T et ϵ_{T+1} sont plus indépendantes.

Bien entendu :

a) il faut, au début de chaque période T, réactualiser les prévisions Q_T^x et Q_{T+1}, et ne pas utiliser pour Q_T^x, la prévision antérieure

b) les niveaux $\hat{R}_{K+2}$ à viser dépendent du nouveau mode de prévision ; ils sont en effet reliés approximativement par la relation :

$$\hat{R}_{K+2} - \hat{R}_{K+1} \simeq E(Q_{T+1}^x) + \eta \quad (17)$$

où η dépend de la densité k_{T+1}

Conclusions

Nous ne poursuivrons pas plus avant l'étude de ce type de gestion à buts multiples. Il pourrait être montré que par des essais successifs on peut trouver un rapport c/b tel que les garanties de dommages de crue et de défaillance de remplissage final seront dans un rapport acceptable. Mais ce cas est illustratif des conditions permettant l'application fructueuse de la théorie des réservoirs :

1) remplacement des revenus ou coûts économiques dont les estimations peuvent être très imprécises et sommaires par des critères techniques au niveau de la garantie liés à certaines contraintes. Il est bien évident qu'accepter un certain seuil de garantie revient à accepter un niveau de coût ou de revenus mais l'important est qu'il n'est pas nécessaire d'expliciter ceux-ci. Bien souvent le gestionnaire et les usagers du réservoir pourront plus facilement s'accorder sur cette garantie ;

2) limitation de l'horizon à moyen terme sur lequel la récurrence des coûts ou revenus est calculée de façon à limiter le cumul des erreurs possibles;

3) utilisation de règles de gestion les plus réalistes possibles. Dans ce cadre la prise en compte de prévisions est essentielle.

Bibliographie

Cette bibliographie très réduite ne prétend pas être exhaustive.

[1] DROGER – Programmation dynamique marginaliste. Application à la gestion des lacs. Note interne E.D.F. *(Etudes et Recherches).*

[2] GUILLAUMIN – Optimisation de la gestion d'un ensemble de réservoirs hydrauliques. *Bulletin Etudes et Recherches E.D.F.* série A, n° 1. Octobre 1966.

[3] LOBERT – *Problems in reservoir management* – Thèse P.H.D. Purdue University – Lafayette – Indranc.

[4] MASSE – *Les réserves et la régulation de l'avenir* (Hermann 1945).

[5] NORMAND – Exemples d'application de la gestion optimale des réservoirs à buts multiples. *La Houille-Blanche, n° 2/3, 1977.*

Discussion

Cette communication a été discutée en même temps que celle de MM. D. NORMAND et MECHIN. On trouvera le texte de cette discussion p. 262.