

Résistance d'ondes d'un navire de surface

Pierre Guével, Gérard Delhommeau

Ecole Nationale Supérieure de Mécanique de Nantes

Daniel Euvrard, Sylvain Marcouyoux

Ecole Nationale Supérieure des Techniques Avancées de Paris

Position du problème

Les différentes composantes de la résistance à l'avancement

On considère un navire de surface animé d'une vitesse de route constante dans un fluide illimité, au repos à l'infini.

Par des considérations d'analyse dimensionnelle, on peut démontrer que la résistance à l'avancement est fonction du nombre de Reynolds Re et du nombre de Froude Fn . Si l'on suppose les deux effets indépendants, la résistance à l'avancement peut être décomposée en deux termes, l'un fonction du nombre de Reynolds seul, la résistance visqueuse ; l'autre fonction uniquement du nombre de Froude, la résistance de vagues. Dans la réalité physique, ces deux composantes ne sont pas rigoureusement indépendantes ; par exemple, les forces d'origine visqueuse qui s'exercent sur la carène amortissent les vagues d'accompagnement.

Cependant, lorsque la carène est bien profilée, le sillage est peu développé à l'arrière de celle-ci ; à ce moment-là, il ne semble pas qu'il soit aberrant de calculer la résistance de vagues en supposant que l'écoulement reste assimilable à celui d'un fluide parfait dans tout le domaine fluide entourant la carène.

En consentant une telle approximation, on conçoit que les chances de succès sont d'autant plus grandes que la carène considérée engendre un sillage moins développé et que les formes avant sont assez fines pour que les vagues d'étrave ne déferlent pas.

Calcul de la résistance de vagues dans l'hypothèse du fluide parfait

La carène est en mouvement de translation horizon-

tale, uniforme, de vitesse C ; l'écoulement est permanent par rapport à un repère lié à la carène. Le problème du calcul de la résistance de vagues en fluide parfait revient à déterminer une fonction de potentiel Φ , harmonique dans tout le domaine occupé par le fluide ; Φ est le potentiel absolu exprimé dans le repère relatif. Les conditions aux limites à satisfaire sont les suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial n} &= C \cdot n \quad , \quad \text{sur la surface de carène } (\Sigma) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n} &= C \cdot n \quad , \quad \text{sur la surface libre } (S), \text{ d'équation} \\ & \quad \quad \quad h = h(x, y) \\ h &= \frac{1}{g} \left\{ C \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] \right\}_{z=h} \\ \Phi &\rightarrow 0 \quad , \quad \text{pour } x \rightarrow +\infty \\ \Phi &\rightarrow 0 \quad , \quad \text{pour } z \rightarrow -\infty \end{aligned} \right\} (1)$$

les notations étant précisées sur la figure 1.

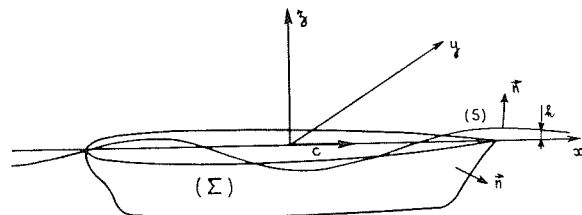


Figure 1

Problème linéarisé ou problème de Neumann Kelvin

Malgré la très grande simplification qui consiste à assimiler l'écoulement à celui d'un fluide parfait, le pro-

blème consistant à résoudre le problème à frontière libre, défini par le système d'équations (1), est encore trop complexe pour qu'il soit susceptible de recevoir une solution numérique. Il est donc nécessaire d'introduire de nouvelles approximations en simplifiant le modèle mathématique.

L'un des modèles mathématiques, parmi les plus élaborés actuellement, est le modèle de Neumann Kelvin ; celui-ci est fondé sur les hypothèses suivantes :

- la cambrure de la déformée de surface libre est assez faible pour qu'il soit possible d'afficher les conditions aux limites, non pas sur la surface libre réelle, mais sur le plan $z = 0$ qui coïncide avec le plan d'eau à l'infini avant ;
- les vitesses absolues sont assez faibles pour être de carrés négligeables en tout point de la surface libre.

Par contre, la condition de glissement sur la carène est satisfaite exactement.

D'où les équations du problème ainsi simplifié :

$$\left. \begin{aligned} \Delta\Phi &\equiv 0 \\ \frac{\partial\Phi}{\partial n} &= \vec{C}.n \quad , \quad \text{sur } (\Sigma) \\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + k_0 \frac{\partial\Phi}{\partial z} \Big|_{z=0} &= 0 \quad , \quad k_0 = \frac{g}{c^2} \\ \Phi &\rightarrow 0 \quad , \quad \text{pour } x \rightarrow +\infty \\ \Phi &\rightarrow 0 \quad , \quad \text{pour } z \rightarrow -\infty \end{aligned} \right\} (2)$$

Méthodes de calcul de la résistance de vagues

Malgré les efforts fournis depuis plusieurs décennies par les spécialistes de toutes nationalités, le problème du calcul de la résistance de vagues d'un navire de surface n'a pas encore reçu une solution satisfaisante dans tous les cas. Cela peut paraître paradoxal lorsque l'on sait que le problème des oscillations d'un corps flottant soumis à l'action de la houle, apparemment plus compliqué, est convenablement résolu par différentes méthodes depuis une quinzaine d'années. En fait, si le problème de la diffraction-radiation et le problème de Neumann Kelvin sont abordés théoriquement en admettant des hypothèses simplificatrices analogues, ce dernier donne lieu aux difficultés particulières suivantes :

- on n'est pas assuré qu'il existe une solution et une seule ;
- le raccordement de la carène et de la surface libre pose un problème très difficile, tant sur le plan de l'analyse mathématique que sur le plan du traitement numérique ;
- la résolution du problème par une méthode de discrétisation de la carène exige que celle-ci soit représentée par un nombre extrêmement important d'éléments surfaciques et linéiques ;
- le calcul du potentiel engendré par les opérateurs élémentaires représentant la carène est long et difficile.

Dans ce qui suit, nous décrivons les principales mé-

thodes de calcul utilisées actuellement pour estimer la résistance de vagues d'un navire animé d'une vitesse de route constante.

Méthode des singularités

Principe de la méthode

L'idée sur laquelle est fondée cette méthode est suggérée par le fait que toutes les équations qui interviennent dans la formulation du problème de Neumann-Kelvin sont des équations linéaires. La fonction de potentiel Φ peut alors être considérée comme la somme de solutions élémentaires φ satisfaisant individuellement l'équation de Laplace, la condition de surface libre, ainsi que les conditions à l'infini.

Ces potentiels élémentaires peuvent être engendrés par des singularités de Kelvin, du type sources, doublets, tourbillons ou multipôles.

La loi de distribution de ces singularités doit être déterminée, dans chaque cas particulier, de telle sorte que la condition de glissement soit satisfaite en tout point de la surface de carène (Σ).

En résumé, la mise en œuvre d'une méthode de singularités s'articule ainsi :

on aura tout d'abord à résoudre un problème de Kelvin consistant à construire des opérateurs élémentaires générant un potentiel harmonique qui satisfait automatiquement la condition de surface libre linéarisée ainsi que les conditions à l'infini ;

il s'agira ensuite d'associer ces opérateurs de manière à satisfaire la condition de glissement sur une carène donnée ; ce dernier problème est analogue à un problème de Neumann extérieur.

Singularités de Kelvin

Source de Kelvin

On appelle ainsi une singularité ponctuelle, centrée en un point M' ($x', y', z' < 0$), générant en tout point M ($x, y, z < 0$) un potentiel harmonique Φ_S possédant les propriétés suivantes :

- Il satisfait automatiquement la condition de surface libre et les conditions à l'infini.
- Sa partie principale, pour $M \rightarrow M'$, est :

$$\Phi_0 = -\frac{Q}{4\pi} \frac{1}{|MM'|}$$

Ce potentiel Φ_S a pour expression :

$$\Phi_S = -\frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{|MM'|} - \frac{1}{|MM'_1|} \right) + \frac{Qk_0}{2\pi^2} R_e \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sec^2\theta e^{\xi} \cdot \mathcal{E}_1(\xi) d\theta, \quad (3)$$

M'_1 étant le point de coordonnées $x', y', -z'$;

ξ désignant une variable ayant pour expression :

$$\zeta = k_0 \sec^2 \theta \{z + z' + i[(x - x') \cos \theta + (y - y') \sin \theta]\}, \quad (4)$$

$\mathcal{E}_1(\zeta)$ étant "l'exponentielle intégrale modifiée" :

$$\mathcal{E}_1(\zeta) = -\nu - \text{Log } \zeta - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\zeta^n}{n \cdot n!}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu = \text{constante d'Euler} \\ 0 < \text{Arg } \zeta < 2\pi \end{array} \right. \quad (5)$$

Doublet de Kelvin

Soit \vec{m} le moment d'un doublet d'intensité constante, de direction fixe, animé d'un mouvement de translation uniforme, de vitesse $\vec{C} = C \vec{i}_x$. Le potentiel Φ_D , engendré par ce doublet s'obtient immédiatement à partir du potentiel Φ_s attaché à une source ponctuelle en utilisant la relation :

$$\Phi_D = \vec{m} \cdot \vec{\text{grad}}_{M'} \left(\frac{\Phi_s}{Q} \right) \quad (6)$$

La figure 2 représente la déformée de la surface libre correspondant aux effets d'une source ponctuelle immergée à une profondeur H , animée d'une vitesse de route constante telle que $k_0 H = 1$.

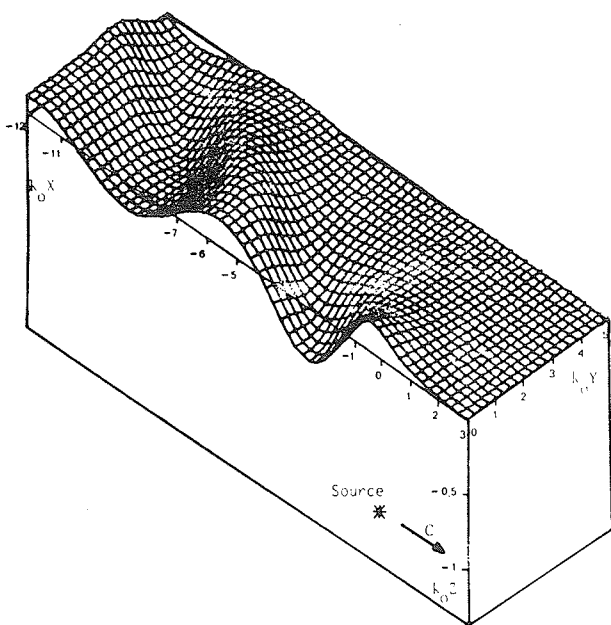


Figure 2

Champ de vagues créé par une distribution superficielle de singularités

Fonction de Kochin

On considère une distribution de singularités de Kelvin, comportant des sources et des doublets normaux, répartis sur une surface (Σ) entièrement immergée, avec les densités $\sigma(M')$, $\mu(M')$; le potentiel engendré par celle-ci peut se mettre sous la forme suivante :

$$\Phi = \Phi_1 + \varphi \quad (7)$$

$$\Phi_1 = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[\sigma(M') + \mu(M') \frac{\partial}{\partial n(M')} \right] \left(\frac{1}{|MM'|} + \frac{1}{|MM'_1|} \right) \cdot d\Sigma(M') \quad (8)$$

$$\varphi = -\frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} \frac{e^{k[z + i(x \cos \theta + y \sin \theta)]}}{k - k_0 \sec^2 \theta + i(0)} k dk, \quad (9)$$

en désignant par $H(\theta, k)$ la fonction de Kochin :

$$H(\theta, k) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \sigma(M') e^{k[z' - i(x' \cos \theta + y' \sin \theta)]} d\Sigma(M')$$

$$- \frac{k}{4\pi} \iint_{\Sigma} \mu(M') [r' - i(p' \cos \theta + q' \sin \theta)] \cdot e^{k[z' - i(x' \cos \theta + y' \sin \theta)]} d\Sigma(M'), \quad (10)$$

p', q', r' désignant les cosinus directeurs de la normale $\vec{n}(M')$.

Fonction de Kochin modifiée

Les résultats précédents ne peuvent pas être généralisés sans précautions lorsque la surface (Σ) aboutit sur le plan de la surface libre au repos ; une étude particulière est nécessaire pour évaluer la contribution des singularités qui sont localisées en des points M' pour lesquels $z' = 0$.

Dans ce cas, la formule (8) reste valable à condition d'y remplacer la fonction de Kochin $H(\theta, k)$ par la fonction de Kochin modifiée $\mathcal{H}(\theta, k)$ ayant pour expression :

$$\mathcal{H}(\theta, k) = H(\theta, k) + \frac{\sec^2 \theta}{4\pi k} \int_c \left[ik \cos \theta (\Phi_1^e - \Phi_1^i) + \frac{\partial}{\partial x} (\Phi_1^e - \Phi_1^i) \right] e^{-ik(x \cos \theta + y \sin \theta)} dy,$$

(c) désignant le contour de flottaison ; Φ_1^e, Φ_1^i étant respectivement les déterminations du potentiel $\Phi_1(x, y, z = 0)$ sur la surface libre et sur la surface de flottaison.

Distributions de singularités cinématiquement équivalente à une carène

Une distribution de singularités de Kelvin générant un potentiel qui satisfait la condition de glissement sur une carène donnée (Σ) est dite "cinématiquement équivalente à la carène en mouvement". La densité superficielle d'une telle distribution est donnée par une équation intégrale, ou une équation intégrodifférentielle,

obtenue en écrivant la condition de glissement en tout point de la surface (Σ).

Dans le cas d'une distribution du type sources, cette condition, $\partial\Phi/\partial n = \vec{C}\cdot\vec{n}$, est écrite directement sur la face extérieure de (Σ) ; dans le cas d'une distribution du type doublets normaux, on l'écrit indirectement en remarquant que, sur la face intérieure de (Σ), le potentiel Φ_i est égal à Cx ; enfin, dans le cas d'une distribution du type mixte de Green, pour laquelle $\sigma = \vec{C}\cdot\vec{n}$, $\mu = -\Phi$, la condition de glissement est encore écrite indirectement en remarquant que Φ_i est identiquement nul.

Une fois déterminée une distribution de singularités cinématiquement équivalente à la carène, la résistance de vagues peut être calculée, soit en intégrant les forces de pression obtenues par application du théorème de Bernoulli, soit en utilisant la formule :

$$R_w = 8\pi\rho k_0^2 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sec^3\theta |\mathcal{H}(\theta, k_0 \sec^2\theta)|^2 d\theta, \quad (11)$$

dans laquelle $\mathcal{H}(\theta, k_0 \sec^2\theta)$ désigne la fonction de Kochin, calculée pour $k = k_0 \sec^2\theta$.

Problème discrétisé

Les équations intégrales auxquelles on aboutit lorsque la solution est cherchée sous la forme d'une distribution superficielle de singularités, peuvent être résolues d'une manière approchée en admettant que la densité des singularités considérées conserve une valeur constante sur des éléments surfaciques, ou linéiques, de très petites dimensions, appartenant à la carène. La surface de carène est alors représentée par N facettes planes s_j , chacune d'elles étant le support d'une distribution uniforme de singularités ; les facettes s_j , numérotées de 1 à M , qui aboutissent sur la surface libre, découpent sur le contour de flottaison M éléments d'arcs l_j .

Ainsi, dans le cas d'une distribution superficielle de sources, le problème revient à résoudre le système linéaire suivant, de N équations à N inconnues, obtenu en écrivant la condition de glissement en chacun des centres M_i des facettes s_i :

$$\frac{1}{2} \sigma_i + \sum_{j=1}^N \sigma_j K_{ij} + \sum_{j=1}^M \sigma_j \chi_{ij} = (\vec{C} \cdot \vec{n})_{M_i}, \quad (i = 1, 2 \dots N) \quad (12)$$

dans lequel K_{ij} et χ_{ij} sont respectivement les coefficients d'influence de la facette s_j et de l'arc l_j , au point M_i .

Il n'y a aucune difficulté particulière à établir un programme de calcul pour résoudre le problème de Neumann Kelvin par une distribution de singularités du type sources, du type doublets normaux ou encore du type mixte de Green. Cependant les temps nécessaires pour effectuer le traitement sur ordinateur sont extrêmement longs du fait que chaque coefficient d'influence est donné sous la forme d'une intégrale dont le noyau est une fonction très oscillante de la variable θ ; dans le cas où la facette influençante s_j et le point influencé M_i sont situés au voisinage de la surface libre, les oscillations de plus grandes fréquences se situent dans un

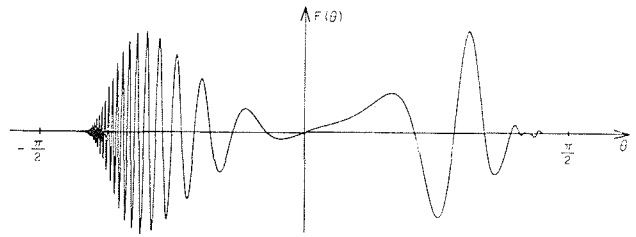


Figure 3

intervalle d'intégration pour lequel le noyau conserve des amplitudes qui ne peuvent pas être considérées comme négligeables.

Sur la figure 3, nous avons représenté les variations d'un des intégrands que nous avons eu à considérer dans un cas concret.

Il apparaît ainsi que le calcul des coefficients d'influence du champ de vagues exige un maximum de précautions ; d'autant plus que lorsque l'on traite l'ensemble de la carène discrétisée, il existe une très grande diversité dans l'allure des quelques centaines de milliers de fonctions qu'il convient d'intégrer.

On conçoit alors quelle peut être la déception ressentie lorsque, ayant consenti des temps de traitement sur ordinateur extrêmement importants, on constate qu'il existe des divergences inacceptables entre les résultats obtenus en résolvant le problème avec différents types de singularités et avec divers modes de discrétisation de la surface de carène.

A priori, la dispersion des résultats peut être attribuée à l'une des causes suivantes :

- le problème de Neumann Kelvin (ou du moins l'équation intégrale qui lui est substituée) est mal posé du point de vue mathématique, en ce sens qu'on n'est pas assuré qu'il admet une solution et que celle-ci soit unique ;
- le calcul des coefficients d'influence n'a pas été conduit avec suffisamment de précision dans tous les cas ;
- la nature du problème exige que la surface de carène soit discrétisée d'une manière extrêmement fine.

Afin de localiser les difficultés, nous avons renoncé, du moins momentanément, à traiter le problème du navire de surface. En effet, lorsque l'on considère une carène complètement immergée, on s'affranchit des deux premières difficultés signalées ci-dessus. D'une part, on est pratiquement assuré que le problème admet une solution unique, d'autre part le calcul des coefficients d'influence est incomparablement plus facile que dans le cas d'un navire de surface ; les temps nécessaires au traitement numérique devenant alors raisonnables, il devient possible d'effectuer des essais systématiques.

Pour effectuer ces essais nous avons adopté comme type de carènes des ellipsoïdes de révolution allongés ; ceux-ci sont disposés assez près de la surface libre pour que leur déplacement engendre une résistance de vagues significative. Les ellipsoïdes sont représentés par des quadrilatères plans ou par des triangles, selon le mode de discrétisation indiqué sur la figure 4.

Les calculs que nous avons effectués ont montré que pour un même mode de discrétisation de la carène,

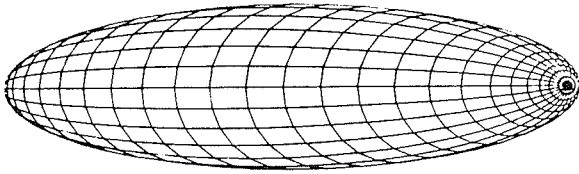


Figure 4

caractérisé par un nombre N de facettes, les résultats sont pratiquement identiques lorsque le problème est résolu par une distribution de doublets ou par une distribution du type mixte. Par contre, la valeur de la résistance de vagues obtenue avec une distribution de sources est très différente de la précédente ; les écarts relatifs sont de l'ordre de 16 % pour $N = 144$, de 9 % pour $N = 288$, de 6 % pour $N = 540$.

Il aurait évidemment été très instructif de rechercher si néanmoins on obtient bien la même limite, quel que soit le type de distribution choisi, lorsque l'on discrétise la carène de plus en plus finement. Nous avons dû y renoncer momentanément, les temps de calcul estimés pour effectuer ce travail devenant aberrants.

• Conclusions

Les travaux précédents concernant le cas des carènes complètement immergées montrent que la nature du problème exige que la carène soit discrétisée d'une manière extrêmement fine.

Dans ces conditions, il est bien évident que les temps nécessaires au traitement numérique sont extrêmement importants. Aussi, avant d'entreprendre avec quelques chances de succès le cas d'un navire de surface, il est indispensable de réaliser des économies substantielles en cherchant une méthode de calcul des coefficients d'influence beaucoup plus expéditive que celle que nous utilisons actuellement.

Méthode de Guilloton

La méthode de Guilloton peut être décomposée en deux parties indépendantes :

- La méthode des coins qui permet une résolution pratique du problème de Michell pour une carène donnée ;
- La transformation de Guilloton qui permet de déterminer, à partir de la solution du problème de Michell, une nouvelle carène pour laquelle les conditions aux limites sont mieux satisfaites.

Le problème de Michell

Position du problème

Une carène admettant un plan longitudinal de symétrie est en mouvement de translation horizontale uniforme dans un fluide parfait, isovolume. On suppose l'existence d'un potentiel des vitesses dans le domaine extérieur à la carène. La condition de surface libre linéarisée est affichée dans le plan de la surface libre au

repos. La carène étant supposée mince, la condition de glissement est écrite dans le plan longitudinal de symétrie.

Les notations sont les suivantes : l'axe oz est la verticale descendante, ϕ est le potentiel absolu exprimé dans le repère relatif, $y = \eta(x, z)$ est l'équation de la carène, la vitesse de route est V_0 . On pose $\partial\eta/\partial x = f(x, z)$.

Expression du potentiel

Ce problème fut résolu en 1898 par Michell. Compte tenu d'une condition de non-radiation à l'infini amont, on obtient pour le potentiel :

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) = & \frac{2V_0}{\pi^2} \int_0^\infty dm \int_0^\infty dn \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_0^\infty d\beta f(\alpha, \beta) \\ & \cos(nz - \epsilon) \cos(n\beta - \epsilon) \cos m(\alpha - x) \frac{e^{-|y| \sqrt{m^2 + n^2}}}{\sqrt{m^2 + n^2}} \\ & + \frac{2V_0^3}{\pi g} \int_{\frac{g}{V_0^2}}^\infty dm \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_0^\infty d\beta f(\alpha, \beta) \\ & \sin \left[m(\alpha - x) - m|y| \sqrt{\frac{m^2 V_0^4}{g^2} - 1} \right] m \frac{e^{-m^2 \frac{V_0^2}{g}(z + \beta)}}{\sqrt{\frac{m^2 V_0^4}{g^2} - 1}} \\ & + \frac{2V_0^3}{\pi g} \int_0^{\frac{g}{V_0^2}} dm \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_0^\infty d\beta f(\alpha, \beta) \cos m(\alpha - x) \\ & e^{-m^2 \frac{V_0^2}{g}(z + \beta)} m \frac{e^{-m|y| \sqrt{1 - \frac{m^2 V_0^4}{g^2}}}}{\sqrt{1 - \frac{m^2 V_0^4}{g^2}}} \end{aligned}$$

avec $tg \epsilon = - \frac{V_0^2 m^2}{g n}$.

Isobares, résistance de vagues

En dérivant l'expression du potentiel, on obtient l'équation des isobares : $\zeta(x, y ; z_0) = - \frac{V_0}{g} \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{z=z_0}$;

la résistance de vagues s'obtient alors en intégrant les pressions sur la carène :

$$R = 2\rho g \iint_{S_p} \zeta(x, 0 ; z) d\eta dz,$$

S_p étant le domaine limité par le demi-vertical de la carène.

La méthode des coins

Principe

Le principe de la méthode des coins est de profiter des propriétés d'additivité du potentiel de Michell pour décomposer la carène à calculer en une somme de ca-

rènes élémentaires, les "coins", pour lesquelles on sait calculer les isobares en intégrant la formule de Michell.

Les fonctions H

Les fonctions H définies par $\zeta = 2k V_0^2/g H$, k étant un coefficient fonction de la géométrie de la carène, ont été tabulées par Guilloton. Les calculs ont été effectués en prenant $V_0^2/g = 2,5$ mètres.

Modèle de calcul

Les fonctions H étant tabulées pour $\frac{V^2}{g} = 2,5$ mètres, les dimensions du modèle de calcul sont obtenues par une similitude de Froude : $\frac{V^2}{gL_R} \Big|_{\text{réel}} = \frac{V_0^2}{gL_m} \Big|_{\text{modèle}}$, soit $L_m = 2,5 g/V^2 L_R$. La distance entre les coins étant constante, le nombre de coins utilisés pour représenter la carène est une fonction décroissante de la vitesse.

En pratique, le découpage en coins conduit aux approximations suivantes :

- l'étrave et l'arrière sont approchés par des escaliers
- les couples sont approchés par un contour polygonal
- les lignes d'eau sont représentées par des arcs de parabole de longueur constante.

Calcul de la résistance

Les isobares sont calculées par sommation de l'influence des coins en chaque point. La résistance de vagues peut alors être déterminée à partir de la formule de Michell en effectuant une double intégration.

La transformation de Guilloton

Définition

La transformation de Guilloton consiste à déterminer, à partir de la carène "linéarisée" pour laquelle on a résolu le problème de Michell, une carène "réelle" définie point par point par les équations :

$$X = x + \int_{\text{à mont}}^x \left[\sqrt{\frac{1 - \frac{2g}{V_0^2} \zeta}{1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2} - 1} \right] dx$$

$$Y = \eta(x, z)$$

$$Z = z + \zeta(x, 0, z)$$

Propriétés

- La résistance de vagues est un invariant de cette transformation.
- La condition de surface libre non linéarisée ainsi que la condition de glissement sur la carène réelle sont satisfaites avec une meilleure approximation que dans le problème de Michell.
- L'équation de Laplace devient :

$$\frac{V^2}{V_0^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Z^2} = 0 \quad \text{avec } V = |\text{grad } \Phi|;$$

cette expression est en général voisine de $\Delta \Phi = 0$.

- La validité de cette transformation pour affiner le modèle mathématique du problème de la résistance de vagues n'est plus assurée dans le cas où les angles de pénétration à l'étrave de la carène deviennent importants.

Mise en œuvre

Dans la pratique, c'est la carène réelle qui est donnée ; le mode opératoire consiste donc à rechercher la carène linéarisée correspondante grâce à laquelle on pourra calculer la résistance de vagues par la formule de Michell. Cette recherche est faite à partir de la carène réelle par itérations successives.

Résultats

Cas d'une carène mathématique

La carène choisie a pour équation

$$y = \pm \frac{B}{2} \left(1 - \frac{4x^2}{L^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{T^2}\right)$$

pour $-\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}$ et $0 \leq z \leq T$; avec $B = 8$, $T = 5$,

$L = 80$. Les résultats obtenus sont présentés sur le graphique suivant à l'aide des coefficients adimensionnels :

$$F_n = \frac{V_0}{\sqrt{gL}} \quad \text{et} \quad C_w = \frac{R}{\frac{4\pi}{1000} \rho V_0^2 \left(\frac{4}{9} \text{BLT}\right)^{2/3}}$$

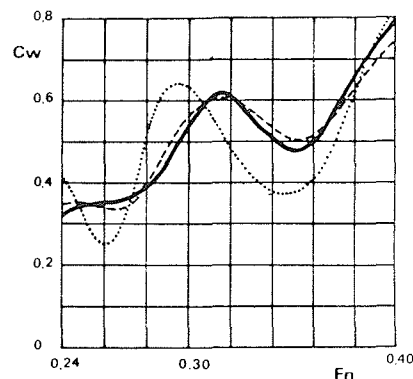


Figure 5

- Courbe expérimentale
- Méthode de Michell ou méthode de Havelock
- - - Méthode de Guilloton

Les résultats obtenus par la méthode de Guilloton ne s'écartent pas de plus de 5 % de la courbe expérimentale.

Cas d'un bateau fin

La confrontation avec les résultats expérimentaux a été effectuée pour deux formes voisines d'un paquebot.

Pour des nombres de Froude compris entre 0,2 et 0,3, l'erreur relative est inférieure à 10 %. De plus, à une vitesse donnée, la méthode permet de mettre en évidence la différence due à la modification du plan de forme.

Critère pratique d'utilisation

Des essais effectués sur des carènes pleines ont permis de montrer une dégradation de la précision de la méthode lorsque l'angle d'étrave augmente, la résistance de vagues pouvant même devenir négative dans le cas de carènes à bulbe.

Dans tous les cas testés, le critère pratique d'emploi pour avoir une précision de 10 % sur la résistance de vagues avec des nombres de Froude compris entre 0,2 et 0,4 est que la pente maximum $\partial\eta/\partial x$ de la carène soit inférieure à 0,2.

Bibliographie

GUILLOTON R. — Compléments sur le potentiel linéarisé avec surface libre appliqué à l'étude des carènes — *ATMA*, Paris, 1956.
 GUILLOTON R. — L'étude théorique du bateau en fluide parfait — *ATMA*, Paris, 1964.
 GUILLOTON R. — La pratique du calcul des isobares sur une carène linéarisée — *ATMA*, Paris, 1965.
 DELHOMMEAU G. — Résistance de vagues par la méthode de Guilloton. *Rapport Chantiers de l'Atlantique*, 1975.

Méthode des éléments finis localisés

Principe de la méthode

• *La méthode des singularités* consiste à représenter le potentiel Φ de l'écoulement à l'aide d'une distribution (σ, μ) de sources et de doublets normaux de Kelvin sur la portion immergée de la carène Σ . L'équation de Laplace se trouve alors automatiquement satisfaite, ainsi que les conditions de surface libre linéarisée, de fond et de rayonnement, ce qui est très avantageux. La condition de glissement exacte sur Σ conduit, elle, à une équation intégrale pour σ (ou μ). On approche ensuite Σ par un polyèdre, et σ (ou μ) par une fonction constante par morceaux, d'où un système linéaire (12) de matrice pleine mais, en général, de petite taille. Dans le cas du problème de Neumann Kelvin, toutefois, l'équivalence entre le problème aux limites et l'équation intégrale n'est pas garantie, et le calcul des termes de la matrice (12) s'avère délicat ; de plus, il faut choisir une discrétisation très fine, d'où des temps de calcul élevés. La méthode des singularités, dont les succès ne se comptent plus, et qui fonctionne à merveille, en particulier dans le cas du problème de la diffraction — radiation, se heurte, dans le cas du problème de Neumann Kelvin, à des difficultés considérables.

• D'où l'idée de lui chercher une alternative, en faisant appel à une autre méthode, dont le palmarès est au moins aussi brillant : *la méthode des éléments finis*. Elle consiste à chercher le potentiel Φ dans un domaine borné Ω entourant Σ , et limité en particulier par une

portion de la surface libre linéarisée. On ré-écrit le problème aux limites (2) sous forme variationnelle (ou "faible") (P) :

$$\Phi \in \mathcal{E} ? \quad \text{t.q.}, \forall \psi \in \mathcal{E}, \mathcal{L}(\Phi, \psi) = \mathcal{N}(\psi), \quad (13)$$

\mathcal{N} étant une fonctionnelle linéaire, et \mathcal{L} une fonctionnelle bilinéaire, ne faisant intervenir que des intégrales (sur Ω et $\partial\Omega$) de Φ et ψ et de leurs dérivées partielles premières ; et \mathcal{E} représentant un espace de Hilbert adéquat [en pratique, un sous-espace de $H^1(\Omega)$]. On découpe alors Ω en éléments "finis" de taille h petite, et l'on approche l'espace fonctionnel \mathcal{E} par un sous-espace \mathcal{E}_h de dimension finie tel que $\lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{E}_h = \mathcal{E}$ au sens de la norme dans \mathcal{E} . Le problème "exact" (13) est alors remplacé par le problème "approché" (P_h) :

$$\Phi_h \in \mathcal{E}_h ? \quad \text{t.q.}, \forall \psi_h \in \mathcal{E}_h, \mathcal{L}(\Phi_h, \psi_h) = \mathcal{N}(\psi_h) \quad (14)$$

Si N_h représente la dimension de \mathcal{E}_h et si e_1, \dots, e_{N_h} constitue une base de \mathcal{E}_h , on pose

$$\Phi_h = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_{N_h} e_{N_h} \quad (15)$$

et la détermination de ϕ_h se ramène à celle de ξ_1, \dots, ξ_{N_h} . Portant (15) en (14) et choisissant successivement $\psi = e_1, \dots, e_{N_h}$, on voit que (14) équivaut au système linéaire

$$\sum_{j=1}^{N_h} \xi_j (e_j, e_i) = \mathcal{N}(e_i) \quad (16)$$

de N_h équations à N_h inconnues. En pratique, \mathcal{E}_h se compose de fonctions continues sur Ω , et seulement dérivables par morceaux (i.e. sur chaque élément fini séparément). Les inconnues ξ_j s'interprètent alors comme les valeurs de ϕ_h (voire aussi les valeurs de ses dérivées premières) en des points appelés "nœuds" et situés sur les frontières, ou à l'intérieur, des éléments finis. De plus, les supports des fonctions de base $e_i (1 \leq i \leq N_h)$ se réduisent à quelques éléments finis, et la plupart des coefficients d'influence $\mathcal{E}(e_j, e_i)$ sont nuls. La matrice du système (16) est donc de taille beaucoup plus grande que celle de la méthode des singularités (on travaille avec une dimension de plus !) mais en revanche elle est très creuse. Au prix d'un investissement informatique beaucoup plus important, on évite ainsi le risque d'une équation intégrale mal posée ; les calculs analytiques sont beaucoup plus simples ; le problème, étant réparti sur Ω au lieu de Σ , apparaît moins "pointu". Enfin, la méthode est très souple : choisissant des éléments plus réguliers, on peut en prendre moins (alors qu'en singularités on est pratiquement limité aux facettes planes et aux distributions constantes par morceaux !) ; on peut même, sans difficultés supplémentaires, envisager de traiter, par approximations successives, une condition de surface libre non linéarisée... Tout ceci est très classique, et figure par exemple en [1].

• Toutefois, les problèmes d'hydrodynamique navale impliquent une propagation des informations à grande distance, parallèlement à la surface libre. Afin d'éviter d'avoir à choisir une "boîte de calcul" Ω trop grande, on considère le complémentaire de Ω dans le domaine fluide comme un "superélément" R . La restriction de \mathcal{E}_h à R se compose alors des combinaisons linéaires de

P fonctions propres u_i ($1 \leq i \leq P$) très régulières, satisfaisant l'équation de Laplace et les conditions de surface libre, de fond et de rayonnement. Une telle méthode, dénommée "méthode des éléments finis localisés" [2] ou "méthode hybride", réalise ainsi un compromis heureux entre les méthodes analytiques (comme la méthode des singularités) et les méthodes purement numériques (différences finies ou éléments finis). Les inconnues sont les N_h valeurs nodales ξ_1, \dots, ξ_{N_h} dans Ω et les P composantes de $\phi|_R$ sur la base de fonctions propres u_1, \dots, u_P dans R . À un système du type (16), on adjoint alors des conditions de raccord en moyenne quadratique sur ϕ et sa dérivée normale, à travers $J = \partial\Omega \cap \partial R$.

Une telle méthode étant relativement nouvelle, surtout en ce qui concerne le problème de Neumann Kelvin, nous avons jugé prudent de la mettre au point sur le problème (encore significatif, mais tellement plus simple !) d'un obstacle bidimensionnel entièrement immergé, en profondeur finie.

Mise en œuvre, dans le cas d'un obstacle posé sur un fond plat de profondeur constante H

Dans le plan (x, y) considérons une surface libre de position moyenne $y = 0$, et un fond plat de profondeur H , présentant localement une bosse \widehat{EF} . L'écoulement à l'infini amont est supposé uniforme, de composantes $(-C, 0)$; en aval apparaît un système d'ondes d'amplitude finie. Soit Ω une boîte de calcul limitée par un segment de surface libre linéarisée DA , la bosse \widehat{EF} , deux segments CE et FB rectilignes et horizontaux d'ordonnée $-H$, et deux verticales AB (amont) et DC (aval). Le domaine R , situé uniquement en aval, est défini par $x \leq x_D, -H \leq y \leq 0$.

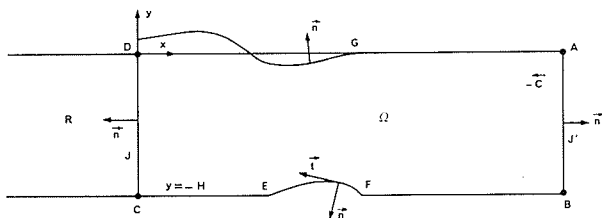


Figure 6 - La méthode des éléments finis localisés.

- Dans Ω , nous considérons des éléments finis de Lagrange ou de Hermite, du premier ou du second ordre.
- Dans R , nous posons

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \frac{ch[k_1(y+H)]}{ch(k_1 H)} \sin(k_1 x), u_2 = \\
 &= \frac{ch[k_1(y+H)]}{ch(k_1 H)} \cos(k_1 x) \quad \left. \vphantom{u_1} \right\} (17) \\
 u_i &= e^{\beta_i x} \cos[\beta_i(y+H)] \quad (i \geq 3),
 \end{aligned}$$

k_1 étant la racine positive de $th(kH) = k/k_0$, et β_i les racines croissantes de $tg(\beta H) = \beta/k_0$.

• A travers $J = DC$, nous imposons des conditions de raccord à l'aide de multiplicateurs de Lagrange. Sur \widehat{CEFB} , ϕ vérifie la condition de glissement habituelle (Neumann).

• En amont de Ω , nous supposons l'écoulement uniforme, d'où $\partial\Phi/\partial n = 0$ sur AB . Avec un tel choix, l'expérience nous a conduits, pour obtenir la stabilité et empêcher les ondes de gravité de remonter l'écoulement, à perturber la condition de surface libre $(2)_3$ (dans laquelle nous changeons z en y), condition qui devient

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + k_0 \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \epsilon \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} = 0,$$

$$\epsilon > 0, \epsilon = 0 \text{ (} h \text{) petit, } (18)$$

sur la partie amont de la surface libre. Les essais numériques [3] ont mis en évidence l'existence d'un "paramètre optimal" ϵ_0 tel que

- pour $0 < \epsilon < \epsilon_0$, la solution est instable ;
- pour $\epsilon > \epsilon_0$, la solution est stable et dépend peu, et en tous cas linéairement, de ϵ ;

une extrapolation à la limite en ϵ conduit alors à une erreur d'ordre h^2 et donc négligeable. La comparaison avec une solution analytique exacte due à J.C. Dern, pour une bosse \widehat{EF} linéarisée, fait apparaître une erreur sur la résistance de vagues RW de l'ordre de 1% ! Et, en fonction de la vitesse C , on retrouve une variation de résistance de vagues bien classique [4].

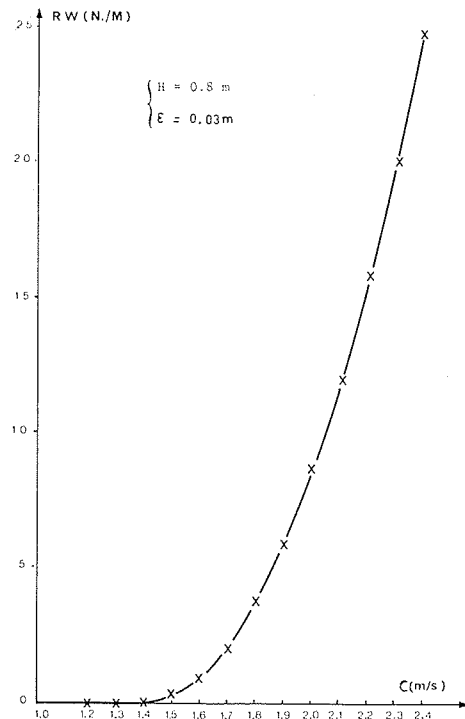


Figure 7 - Evolution de la résistance de vagues en fonction de la vitesse.

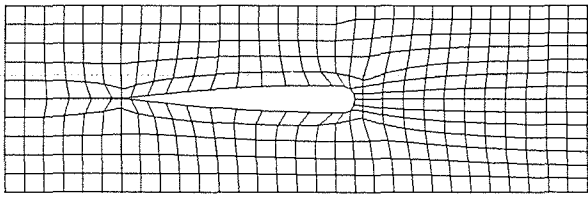


Figure 8 – Le maillage.

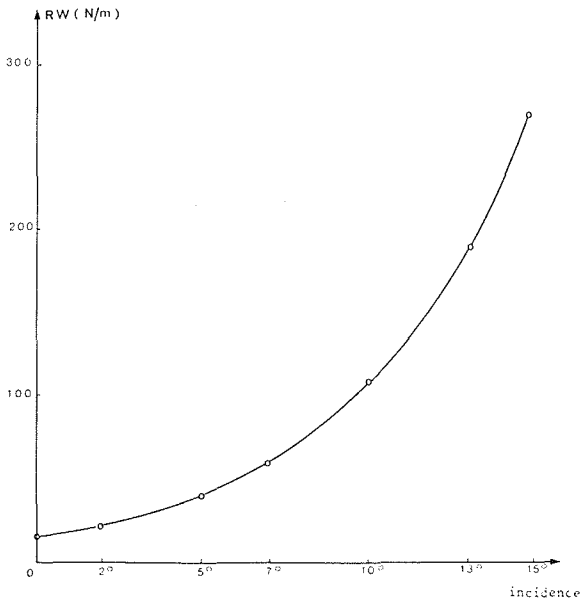


Figure 9 – La résistance de vagues en fonction de l'incidence.

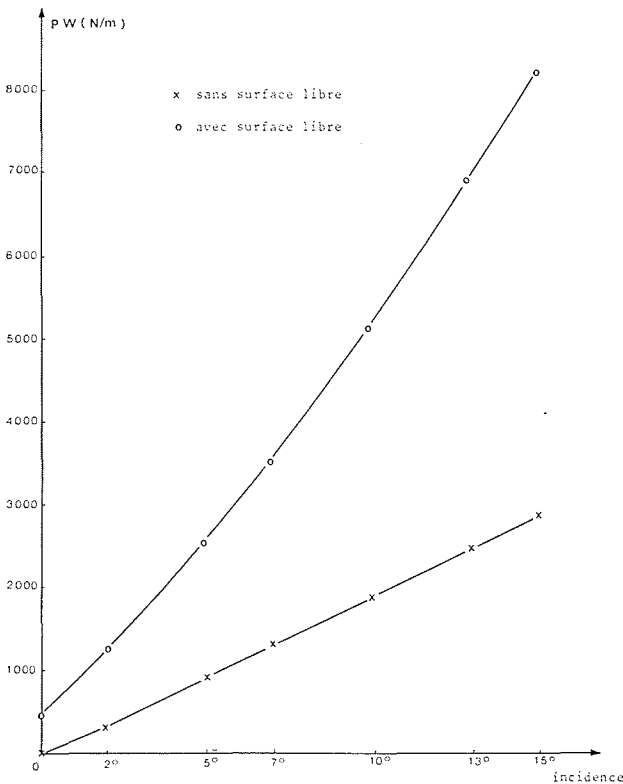


Figure 10 – La portance en fonction de l'incidence.

Mise en œuvre, dans le cas d'un profil entièrement immergé

Ce problème semble physiquement plus intéressant, tout en n'étant guère plus compliqué. La différence essentielle porte sur la non uniformité du potentiel Φ dans Ω : on doit introduire une coupure entre le profil et le bord extérieur de Ω . Le long de cette coupure (qui n'a aucune réalité physique !), Φ présente une discontinuité Γ constante et inconnue. Le profil étant supposé posséder une pointe arrière f , on exprime la condition de Kutta-Joukowski en imposant que la vitesse moyenne sur le dernier élément fini en amont de f soit la même à l'extrados et à l'intrados. Cette condition supplémentaire permet de déterminer Γ .

La figure 8 montre un exemple de maillage. La figure 9 représente la résistance de vagues en fonction de l'incidence ; la figure 10 fournit la portance en fonction de l'incidence, dans le cas où $y = 0$ est effectivement une surface libre linéarisée, mais aussi (aux fins de vérification) dans le cas (purent aérodynamique) où $y = 0$ est une paroi.

En [5], K.J. Bai développe une méthode tout à fait analogue, à ceci près que l'utilisation d'un autre super-élément en amont de Ω lui évite de faire appel à la perturbation singulière (18).

Généralisations possibles au cas tridimensionnel

Deux variantes de la précédente méthode peuvent être envisagées :

- la méthode des éléments finis localisés proprement dite, utilisant les solutions propres [6] ;
- ou une méthode d'éléments finis incluant, sur J , l'action d'une distribution de singularités [7] portées par Σ .

Bibliographie

Sur la méthode des éléments finis en général :

[1] STRANG G., FIX G.J. – *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice Hall Series in Automatic Computation (1973).

Sur la méthode des éléments finis localisés :

[2] BAI K.J., YEUNG R.W. – Numerical Solutions to Free-Surface Flow Problems, *10th Naval Hydrodynamics Symposium*, Session VII (June 1974) ; Technical Papers, M.I.T., Cambridge, Mass.

Sur l'application de la méthode au cas de la résistance de vagues bidimensionnelle :

[3] EUVRARD D. – Sur la possibilité d'une résolution numérique directe du problème de Neumann-Kelvin, par introduction d'une perturbation singulière, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 282, série A, pp. 385-388 (16 février 1976).

[4] EUVRARD D., MARCOUYOUX S. – Calcul, selon une méthode d'éléments finis localisés, de la résistance de vagues d'un profil posé sur un fond plat, dans un écoulement à surface libre, *Journées de l'AFCT*, Ecole Centrale, Novembre 1976.

[5] BAI K.J. – A Localized Finite-Element Method for Steady, Two-Dimensional Free-surface Flow Problems", *First International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics*, pp. 209-229, October 1975 (N.S.R.D.C.).

Sur les solutions propres et la fonction de Green tridimensionnelles :

[6] DERN J.C. — Une approche variationnelle du problème de Neumann-Kelvin, Rapport n° 5772 BA/N, *Bassin d'Essais des*

Carenés, Paris (Janvier 1976).

[7] BAUER G. — Formulation mathématique du problème des carènes, Rapport I.R.C.N.-*Marine Marchande* (1976).

Les auteurs tiennent à remercier les organismes suivants qui ont bien voulu contribuer au financement de la présente étude :

- Chantiers de l'Atlantique
- Institut de Recherche de la Construction Navale
- Secrétariat Général de la Marine Marchande
- Direction des Recherches et Moyens d'Essais.

Discussion

Président : M. VALLS

Je crois, dit M. le Président, que nous pouvons applaudir conjointement M. GUEVEL, M. DELHOMMEAU et M. EUVRARD pour le dynamisme de leur présentation d'un problème très compliqué.

Je pense que cette présentation suscitera un certain nombre de questions et de commentaires. Qui désire prendre la parole ?

M. DERN (Bassin d'Essais des Carènes, Paris) présente les deux commentaires ci-après : l'un sur l'exposé de M. GUEVEL, l'autre sur l'exposé de M. EUVRARD.

M. GUEVEL a donné des résultats de résistance de vague pour un ellipsoïde immergé. Il est intéressant de comparer ces chiffres avec les résultats de calcul faits par d'autres auteurs. Pour ma part, j'ai fait la comparaison avec les calculs de César Farell. Pour l'ellipsoïde étudié par M. GUEVEL avec 144 facettes de sources et $F^2 = 0,5$, les résultats concordent exactement ($R_w = 920$ kg-f). Est-ce que M. GUEVEL peut fournir d'autres exemples de comparaison montrant la validité de ses calculs ?

En ce qui concerne l'exposé de M. EUVRARD, je ferai une remarque à propos de la formulation variationnelle qu'il utilise et plus précisément de la méthode de quasi réversibilité qui paraît indispensable à son schéma numérique. En réalité, comme l'ont montré les travaux de Jane BAI, l'utilisation de la méthode de quasi réversibilité est inutile lorsqu'on impose les conditions exactes de non-radiation à l'infini amont.

Ces conditions de non-radiation ne sont formulées qu'en partie dans la formulation variationnelle de M. EUVRARD et c'est la raison pour laquelle il est obligé d'utiliser une méthode de quasi réversibilité qui a l'inconvénient de nécessiter un calcul pour deux valeurs de la viscosité numérique, donc d'augmenter le temps de calcul.

M. BINDEL intervient, ensuite, en ces termes :

Je crois qu'il faut féliciter les auteurs de ce mémoire pour leur travail qui nous donne un bon aperçu des différentes méthodes qui doivent être utilisées dans ce domaine difficile.

Je vais poser, à chacun des auteurs, une question sur leur exposé.

En ce qui concerne la méthode des singularités, M. GUEVEL nous a dit qu'on avait utilisé pendant longtemps une distribution de singularités qui ne tenait pas compte du fait que la carène perce la surface libre. Pour bien nous montrer ce qu'il y avait de gravement erroné dans ce processus, il nous a projeté une figure donnant la comparaison des résultats obtenus suivant que l'on tient compte ou non de la ligne de singularités correspondant à la ligne de flottaison.

Je crains que M. GUEVEL ait noirci la situation, car la carène pour laquelle il nous a donné le résultat, est en fait un cylindre de révolution indéfini à génératrices verticales perçant la surface de l'eau. C'est probablement, un des cas où la méthode des singularités s'applique le moins bien ; on a heureusement jamais vu de carène ayant un rapport longueur sur largeur aussi petit !

Je crois que sur le principe M. GUEVEL a raison, mais je voudrais lui demander : quelle est, pratiquement, l'influence de ce facteur, ligne de singularités sur la flottaison, dans le cas d'une carène de forme normale ?

Dans l'exposé de M. DELHOMMEAU, j'ai été frappé par l'une des planches qu'il a projetées, qui indique que, lorsqu'on étudie une carène, par la méthode des singularités, on obtient des oscillations de la courbe de résistance en fonction du nombre de Reynolds qui sont très importantes ; par contre, si on utilise la méthode de Guilloton, les choses s'arrangent et les points théoriques tombent, à peu près, sur la courbe expérimentale. Cela introduit le doute dans mon esprit car je croyais que la méthode des singularités, comme toutes les autres méthodes théoriques, conduisait à des oscillations assez considérables de la courbe de résistance en fonction du nombre de Reynolds, mais que ces oscillations étaient dues, essentiellement, au fait qu'on n'avait pas tenu compte des effets de viscosité. Or, M. DELHOMMEAU semble nous dire : il n'y a pas besoin de tenir compte de la viscosité du fluide pour se recaler sur la courbe expérimentale.

Puisqu'il a réfléchi à cette question, pourrait-il nous dire si l'on peut — la question est fondamentale — calculer la résistance de vagues d'une carène en n'introduisant aucun autre effet de viscosité que l'effet dont on a parlé tout à l'heure qui est un effet de pseudo-viscosité tendant simplement à localiser les vagues à l'arrière de la carène et non pas à l'avant.

Dans son exposé, M. EUVRARD nous dit : "il y a un certain nombre de domaines privilégiés pour l'application de la méthode des éléments finis et, en particulier, tout le domaine à l'arrière de la carène. Dans ce domaine arrière, il faut, dit-il, savoir ce qui se passe pour bien appliquer la méthode des éléments finis ; en particulier, on doit avoir un certain nombre de solutions régulières connues". Je suis alors tenté de poser à M. EUVRARD la question suivante :

Dans ces conditions, n'êtes-vous pas obligé de supposer le problème déjà résolu ? Si vous n'aviez absolument aucune indication sur ce qui se passe sur l'arrière du navire, pourriez-vous retrouver — comme on le trouve avec d'autres méthodes — la création, par le navire, d'oscillations se propageant dans un certain angle et ayant certaines caractéristiques ?

En l'absence d'autres interventions, M. le Président invite les Conférenciers à répondre aux questions suscitées par leurs exposés respectifs.

A propos du commentaire de M. DERN concernant la méthode des singularités, M. GUEVEL précise :

C'est effectivement après avoir consulté l'article de César FARELL que nous avons choisi de tester nos programmes de calcul dans le cas des ellipsoïdes de révolution.

Pour un rapport grand axe — petit axe égal à 7, la concordance entre les valeurs de la résistance de vagues fournies par FARELL et par notre programme "sources" est effectivement excellente ; par contre, pour un rapport grand axe — petit axe

égal à 5, la valeur de la résistance de vagues donnée par FARELL est nettement supérieure à celle que nous obtenons aussi bien par notre programme "sources" que par notre programme "doublets". Il convient de noter que si FARELL a mis en œuvre une méthode fondée sur un développement analytique exact, ses résultats numériques sont entachés d'une erreur difficilement appréciable du fait qu'ils sont fournis sous la forme d'une série tronquée ; un exemple simple, concernant un problème bidimensionnel, celui d'un cylindre circulaire horizontal complètement immergé a montré que la solution "analytique exacte" fournie par HAVELOCK sous forme d'une série tronquée est entachée d'une erreur appréciable. Cette circonstance limite la signification des comparaisons entre les résultats de FARELL et les nôtres : les deux méthodes sont fondées sur la même théorie ; les approximations numériques ne sont pas de même nature.

A M. BINDEL, je répondrai que j'ai effectivement noirci la situation en choisissant un exemple outrancier, celui d'un mât vertical de section circulaire : je voulais ainsi mettre en évidence d'une façon très frappante l'importance considérable de la prise en compte de l'intégrale de ligne.

Cependant, je dois indiquer que nous avons traité également, dans l'hypothèse du nombre de Froude zéro, le cas du mât vertical de section elliptique. En particulier, pour un rapport longueur sur largeur égal à 5, les résultats sont encore très différents selon que l'on tient compte de l'intégrale ou qu'on la néglige : pour des nombres de Froude compris entre 0,2 et 0,35, la résistance de vagues calculée en négligeant l'intégrale de ligne est sensiblement deux fois plus grande que la résistance de vagues calculée correctement.

Mais ces conclusions n'intéressent que le cas où on consent l'approximation du nombre de Froude zéro : je ne pense pas que l'importance de l'intégrale de ligne sera aussi fondamentale lorsque l'on cherchera à résoudre le problème de Neumann Kelvin exactement. Il n'en reste pas moins que sur le plan du traitement numérique, l'intégrale de ligne permet d'effectuer des associations intéressantes de divers termes qu'il serait très difficile de calculer séparément avec une précision satisfaisante.

M. DELHOMMEAU répond ensuite à la remarque de M. BINDEL concernant l'amortissement des oscillations de la courbe de résistance de vagues lorsqu'on utilise la transformation de Guilloton.

Dans le cas de bateau extrêmement mince testé, je ne pense pas qu'il soit nécessaire de tenir compte de la viscosité pour amortir les oscillations de la courbe théorique de résistance de vagues. L'emploi de la transformation de Guilloton permet cet amortissement tout en conservant l'hypothèse du fluide parfait. Cependant, dans le cas d'un navire à arrière plus gros, les essais sur maquette montrent que l'influence de la viscosité sur la résistance de vagues ne peut plus être négligée.

M. EUVRARD donne à la dernière question posée par M. BINDEL, la réponse suivante :

Malheureusement, l'exposé oral était bien court, mais il convient de distinguer la méthode des éléments finis de la méthode des éléments finis localisés.

• En éléments finis, on travaille uniquement dans une boîte de calcul et on écrit une condition sur chaque bord. Une seule condition.

Il est essentiel de connaître le comportement à l'infini de la solution cherchée, sinon on n'a aucun espoir de parvenir à la calculer. Bien sûr, on sait comment les choses se passent à l'infini, mais en fait on en sait trop ! Par exemple on sait, dans toutes les directions, comment tend vers zéro chacune des composantes de la vitesse, mais une telle information est tout à fait excessive : le problème est de retenir juste ce qu'il faut, et cela n'est pas évident.

C'est ce que j'appelle "poser le problème avant de le résoudre". Il est indispensable de le poser d'abord de façon classique (et précise !) dans une boîte de calcul, pour ensuite passer à la formulation variationnelle, et enfin (mais pas avant !) parler d'approximation.

De nombreuses présentations de la méthode des singularités (pas toutes, heureusement !) commencent ainsi : "soit une source avançant à vitesse constante sous une surface libre, etc." souvent, le problème n'étant même pas posé, on en donne tout de suite une solution. Avec la méthode des singularités c'est encore possible, mais en éléments finis on ne peut plus faire une telle impasse.

En éléments finis, il faut savoir comment les choses se passent à l'infini et en retenir l'essentiel, pour écrire la bonne condition sur le bord extérieur du domaine de calcul.

• En éléments finis localisés, c'est différent, car, à l'extérieur, on écrit des combinaisons linéaires de solutions connues ; il s'agit donc d'une méthode semi-analytique.

Ma réponse à M. DERN sera double. Si vous travaillez en éléments finis sans effectuer de raccord avec des solutions propres extérieures, je crois — je ne peux pas le prouver, mais je suis convaincu — qu'il faut utiliser d'une manière ou d'une autre le concept de viscosité artificielle.

En effet, en travaillant à l'aide des différences finies qui sont, "moralement", de même nature, nous avons tout essayé, nous n'avons jamais pu faire disparaître les oscillations sans viscosité artificielle. Mais, par contre, en éléments finis localisés, c'est différent, parce qu'il s'agit d'une méthode beaucoup plus analytique : ce qui se passe à l'extérieur joue un grand rôle, est représenté de façon analytique et force le calcul vers la bonne solution.

J'ai regardé de près l'article de K.J. BAI que vous m'avez communiqué, malheureusement, il y manque quelques détails, entre autres les ordres de grandeur.

D'une part, étant donnée la formulation variationnelle choisie par l'auteur, il faut qu'il y ait au moins autant de solutions propres à l'extérieur qu'il y a de points, ou disons de valeurs nodales, sur le bord, si l'on veut que cette formulation soit vraiment équivalente à la formulation classique. Ceci serait gênant en tridimensionnel, car les solutions propres sont difficiles à calculer, et il faut en calculer énormément.

D'autre part, il me semble — je ne peux pas le garantir, il faudrait en discuter avec l'auteur — que cela marche si la boîte de calculs est assez petite pour que les solutions extérieures en amont soient non négligeables et forcent, en quelque sorte, la solution. Tandis que ce que nous avons fait nous-mêmes est d'inspiration plus "numérique".

En ce qui concerne les solutions propres, en aval, nous avons deux types d'oscillations d'amplitude finie (en réalité deux fois la même, avec un décalage d'un quart de longueur d'onde) plus une série de termes qui décroissent très vite. En amont, il ne reste que les termes qui décroissent très vite.

Nous avons fait des essais en mettant, en aval, soit les deux premières solutions, soit un grand nombre de termes. Lorsque le domaine de calcul grandit, les résultats deviennent rapidement identiques, car les autres solutions décroissent très vite et ne jouent plus aucun rôle. Donc, nous pouvons prendre une boîte assez grande, raccordée à peu de choses en aval et à rien du tout en amont.

Notre méthode se rapproche plus d'une méthode d'éléments finis, tandis que celle de K.J. BAI est plus analytique. Autrement dit, nous aurons une matrice plus grosse et plus creuse ; tandis que, chez lui, l'influence des solutions extérieures se traduira par une matrice plus pleine et plus petite. Voici, j'espère la réponse à la question posée par M. DERN.

D'ailleurs, K.J. BAI et nous-mêmes trouvons des résultats tout à fait comparables.

En bidimensionnel, le choix n'a aucune importance : les deux méthodes marchent très bien, les temps de calcul sont du même ordre, et il n'y a aucun problème, ni dans un cas, ni dans l'autre. En tridimensionnel, par contre, il me semble qu'il vaut mieux utiliser une méthode plus proche des éléments finis, car le calcul des solutions propres extérieures est plus difficile.

M. le Président remercie les Conférenciers et les personnes qui sont intervenues dans la discussion et conclut :

Je crois que l'on peut dire que le problème de la résistance de vagues d'une carène reste un problème ouvert. Nous avons assisté à la présentation de trois approches différentes, toutes ayant leur part de succès et de frustration. La dernière, présentée par M. EUVRARD démarre ; son exploitation pratique est peut-être liée au développement d'une nouvelle génération d'ordinateurs ; nous lui souhaitons bon vent et bonne mer !!

Nous passons maintenant au mémoire présenté par M. le TALLEC qui concerne cette nouvelle génération de véhicules marins qui tendent à échapper à la résistance de vagues pour atteindre de hautes vitesses et à maintenir celles-ci lorsque l'état de la mer est peu favorable.

Je donne la parole à M. le TALLEC.