
Un modèle probabiliste multidimensionnel applicable à la description des processus hydrométéorologiques à l'échelle fine (Modèle de renouvellement à plusieurs dimensions)

A probabilistic multidimensional model for close description of hydrometeorological processes (Multidimensional renewal model)

Jacques Bernier et Pierre Lencioni

Laboratoire National d'Hydraulique, Electricité de France

Introduction

L'étude dont le présent article donne une synthèse des résultats a été entreprise dans le cadre de contrats passés en 1972 et 1973 avec le Ministère de l'Équipement et du Logement. Ces contrats avaient pour objet la mise au point d'un modèle probabiliste dit "de renouvellement" multi-variable applicable à la description conjointe des débits maximaux ou de précipitations maximales en plusieurs stations hydrométéorologiques.

Intéret des modèles multidimensionnels

Les problèmes d'hydrologie opérationnelle ne sont plus seulement à l'échelle de bassins uniques dissociés de leur contexte géographique. Ils concernent l'aménagement régional où les interactions hydrométéorologiques régionales jouent un rôle important.

Par ailleurs l'ancienneté des stations de collecte de l'information est très diverse et l'estimation cohérente des ressources en eau d'un bassin ne peut résulter de la superposition des estimations ponctuelles dont la précision uniquement liée dans ce cas à l'information disponible en chaque point, serait alors trop hétérogène.

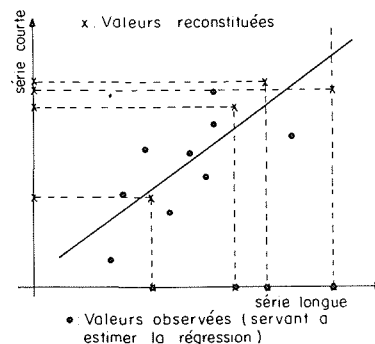
Il importe donc de tenir compte des structures de dépendance régionale au niveau de ces problèmes d'estimation.

Ce souci d'utiliser une information plus exhaustive apparaît dans le problème de détermination des probabilités d'occurrence des crues à partir des précipitations. C'est ici, un modèle multidimensionnel : pluie (en plusieurs stations) → débit qui intervient.

On peut exprimer en termes statistiques les objectifs d'un modèle destiné à résoudre les problèmes inventoriés ci-dessus :

- décrire les lois de probabilité de variables hydrologiques multiples ;
- utiliser le modèle en vue de la simulation de séries fictives concomitantes en plusieurs stations hydrométéorologiques d'un bassin ;
- traiter l'information incomplète, c'est-à-dire améliorer l'estimation des paramètres statistiques de séries courtes par corrélation avec les séries longues.

Pour terminer ce paragraphe, nous remarquerons comment les deux derniers objectifs sont liés, la simulation pouvant être utilisée pour obtenir des estimations améliorées. Pour fixer les idées, considérons deux stations, l'une à série courte et l'autre à série longue. Pour améliorer les estimations de la série courte on peut compléter les valeurs observées par des valeurs reconstituées obtenues par tirage au sort, (méthode de Monte Carlo) dans la loi conditionnelle (les valeurs de la série longue étant supposées fixées). Cette loi de probabilité conditionnelle (définie par exemple par la régression et la



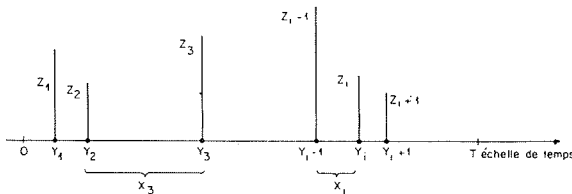
distribution des écarts autour de cette régression) doit être estimée au préalable à partir des valeurs concomitantes observées pour les deux séries.

Des modèles multidimensionnels sont largement utilisés en hydrologie ; ils utilisent généralement l'hypothèse de la loi multinormale applicable à des événements

de chronologie déterminée (débits mensuels, annuels, etc.). Ce type de modèle n'est pas directement applicable aux processus intermittents où non seulement le niveau (débit, précipitation) mais aussi la date d'occurrence sont aléatoires.

Intérêt des modèles de renouvellement

Un certain nombre de travaux ([1] à [6]) ont montré l'intérêt des modèles de renouvellement pour la description des processus de précipitations ainsi que certains processus de débits (crues notamment). Rappelons que ces modèles ont pour but la description de processus aléatoires ou des événements ponctuels Z_i , c'est-à-dire considérés comme instantanés à l'échelle de temps prise en compte (averses, précipitations ou crues dépassant certains seuils) survenant à des époques aléatoires Y_i , sont donc séparés par des intervalles de temps aléatoires $X_i = Y_i - Y_{i-1}$. On qualifiera un tel processus d'intermittent.



L'hypothèse probabiliste fondamentale des processus de renouvellement est que les X_i successifs sont des variables aléatoires indépendantes. En fait on utilise généralement une hypothèse simplificatrice en ce qui concerne le processus des Y_i ou des intervalles X_i qui sont considérés comme résultant d'un processus de Poisson ; nous garderons toutefois le nom de renouvellement par commodité de langage.

Considérons une période fixée T et N_T le nombre d'événements Y_i (d'intensité Z_i) apparus sur cette période, alors :

$$\text{Prob}[N_T = n] = e^{-\mu T} \frac{(\mu T)^n}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1)$$

$$\text{Prob}[X_i \leq x] = 1 - e^{-\mu x} \quad (2)$$

De plus les Z_i successifs sont considérés comme indépendants et obéissant à une loi de probabilité :

$$\text{Prob}[Z_i \leq z] = F(z)$$

Une hypothèse très souvent réaliste est la loi exponentielle pour Z_i :

$$F(z) = 1 - e^{-z/\lambda} \quad (3)$$

De ce processus de base on tire des lois de probabilité dérivées comme suit :

– la loi de la somme $u = \sum_{n=1}^{N_T} Z_i$ des intensités des évènements apparus au cours de la période T (appliquée avec succès à la description statistique des pluies mensuelles (2));

– la loi du maximum : $W = \max_{(0,T)} (Z_i)$ des intensités de la

période T (appliquée avec succès à l'estimation des probabilités d'occurrence des crues et précipitations maximales annuelles ou saisonnières (5)).

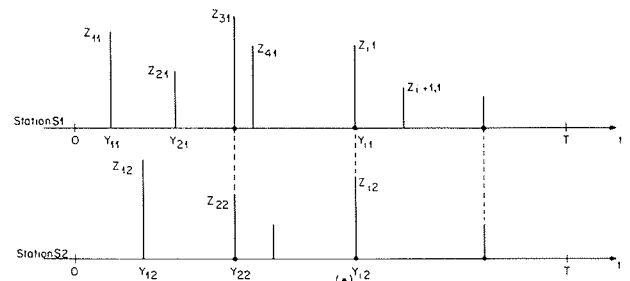
Ce type de modèle de renouvellement schématisant les aléas des phénomènes les plus significatifs apparaissant dans les processus hydrométéorologiques (averses, crues, etc.) permet de mobiliser une information plus complète que celle utilisée par les méthodes statistiques classiques d'ajustement aux séries observées de pluies mensuelles et crues ou précipitations maximales. Il en résulte une amélioration de la précision des estimations.

Un modèle bidimensionnel

Nous décrivons en détail un modèle bidimensionnel et son application à la description conjointe des processus d'averses dont l'intensité dépasse un certain seuil en 2 stations situées dans le bassin de l'Allier à Pontaumur et Pontgibaud. Cependant ce type de modèle peut s'appliquer à l'étude de séries hydrométéorologiques diverses et peut se généraliser à un nombre quelconque de dimensions, généralisation que nous aborderons succinctement à la fin de cet article.

Considérons deux stations de pluies ou (et) de débits dont l'histoire parallèle peut être représentée par une succession d'événements (crues ou averses) apparaissant à intervalles de temps aléatoires.

Pour chaque station séparément, on propose le modèle classique du renouvellement à une dimension (voir paragraphe précédent). Cependant pour certains événements il y a concomitance complète aux deux stations et dans ce cas les intensités des événements sont corrélées entre elles.



Une caractéristique essentielle des processus observés est le suivant : les processus des événements concomitants et non-concomitants en une même station sont différents : en particulier la moyenne des intensités est généralement d'autant plus forte qu'un événement intéresse simultanément les deux stations. Cette observation est valable à la fois pour les crues et les précipitations. Ainsi une averse génératrice de crue et la crue qui en résulte sont d'autant plus grandes en moyenne qu'elles sont plus étendues spatialement. Un modèle réaliste doit tenir compte de ce fait ; sur le plan de la commodité dans le cas général multidimensionnel, il doit également prendre en compte simplement les multiples types de concomitances : à deux, trois... k stations, etc.

L'hypothèse factorielle et l'anamorphose normale

Bornons-nous pour l'instant au cas bidimensionnel pour fixer les idées. L'idée de base de notre modèle est de partir du processus superposé intermittent des *instants où il se produit un évènement* (averse ou crue) en au moins une station. Ce processus sera supposé être un processus de Poisson. En fait cet évènement peut être provoqué par l'occurrence d'un ou plusieurs facteurs hydrométéorologiques quantifiés sous-jacents dont les valeurs si elles atteignent certains niveaux "expliquent" les évènements concomitants et si elles n'atteignent pas ces niveaux "expliquent" l'absence de concomitance et l'intensité des évènements non concomitants.

On connaît l'importance de cette hypothèse factorielle et sa fécondité en hydrologie comme le montre le succès des applications de diverses techniques (analyse factorielle, des correspondances, des composantes principales, etc.).

Il existe cependant une difficulté ici liée à la forme particulière des distributions marginales et bidimensionnelle des intensités (lois exponentielles) caractérisée par une variance liée qui n'est pas indépendante de la variable de liaison. C'est pourquoi nous proposons une transformation des variables basée sur l'anamorphose normale.

Soit une station fixée par exemple *S 1* et Z_1 l'intensité correspondant à *tous les instants où il se produit au moins un évènement en S 1 ou S 2*. Cette variable peut ainsi prendre la valeur 0 avec une probabilité π_1 estimée par la fréquence des cas où il ne se produit rien en *S 1* dans l'ensemble des cas où il se produit au moins un évènement en *S 1* ou *S 2*. La fonction de répartition de Z_i s'écrit :

$$F_1(0) = \text{Prob}[Z_1 = 0] = \pi_1$$

$$F_1(z_1) = [\text{Prob } Z_1 \leq z_1] = 1 - (1 - \pi_1) e^{-z_1/\lambda_1} \quad (4)$$

Ainsi la distribution des intensités positives est exponentielle et le paramètre λ_1 est estimé par la moyenne des intensités positives (*concomitantes et non concomitantes*).

Considérons par ailleurs une variable normale centrée réduite V et sa fonction de répartition :

$$G(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^v e^{-\frac{v^2}{2}} dv$$

On appelle anamorphose la transformation qui à la variable Z_1 associe la variable V telle que :

$$G(V) = F_1(Z_1) \quad (5)$$

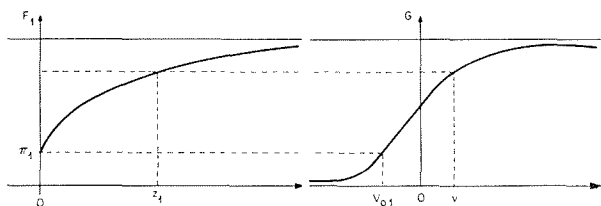


Figure 1

Si la variable Z_1 est distribuée selon la loi de probabilité (4) alors V est distribuée selon la loi de Gauss. De façon plus précise il s'agit ici d'une loi de Gauss tronquée à la valeur v_{01} telle que :

$$G(v_{01}) = \pi_1 \quad (6)$$

puisque :

- à $z_1 = 0$ correspond v_{01}
- à $v \leq v_{01}$ correspond $z_1 = 0$

Considérons maintenant les deux stations et les deux variables Z_1 et Z_2 correspondantes de lois de probabilité du type (4) avec les paramètres respectifs $\pi_1, \lambda_1, \pi_2, \lambda_2$. Soient V_1 et V_2 les variables normales transformées correspondantes. Le diagramme de corrélation entre les V_1 et V_2 prend la forme montrée sur la figure 2 et qui résulte de l'application du modèle aux averses de Pontaurmur et Pontgibaud :

- Les v non concomitants se plaçant sur deux droites parallèles aux axes, d'abscisses et de coordonnées respectives v_{10} et v_{20} .
- Les v concomitants sont corrélés selon une direction linéaire avec une dispersion résiduelle autour de cette direction constante quelle que soit la variable de liaison (v_1 ou v_2). Ce comportement des variables normales associées par anamorphose aux variables Z_1 et Z_2 exponentielles bidimensionnelles a été vérifié dans de nombreuses applications notamment par Thom qui a utilisé cette technique pour le contrôle statistique des opérations de pluie artificielle.

Considérons alors un couple de variables normales centrées réduites V_1 et V_2 non tronquées et dépendantes avec un coefficient de corrélation ρ .

Ce couple définit la concomitance et les intensités des variables résultantes.

- Si (v_1, v_2) est tel que $v_1 > v_{10}$ et $v_2 > v_{20}$, ce couple définit les variables Z concomitantes.
- Si (v_1, v_2) est tel que $v_1 \leq v_{10}$ et $v_2 > v_{20}$, ce couple définit une variable non concomitante en *S 2*.
- Si (v_1, v_2) est tel que $v_1 > v_{10}$ et $v_2 \leq v_{20}$, ce couple définit une variable non concomitante en *S 1*.

Le cas $v_1 \leq v_{10}$ et $v_2 \leq v_{20}$ doit être éliminé puisque l'on considère les instants où il se passe effectivement un évènement.

Si le coefficient de corrélation ρ est positif, les intensités v_2 non concomitantes correspondant à des v_1 inférieurs à v_{10} seront en moyenne plus faibles que les v_2 concomitants correspondant à des v_1 supérieurs et réciproquement. Le modèle tient ainsi compte des phénomènes d'hétérogénéité des distributions concomitantes de non concomitantes.

Le processus de Poisson

Tout processus intermittent est défini, conjointement à la loi des intensités des évènements, par le processus des époques d'occurrence de ces évènements. Nous avons déjà mentionné que le processus intermittent superposé des époques où il se produit un évènement

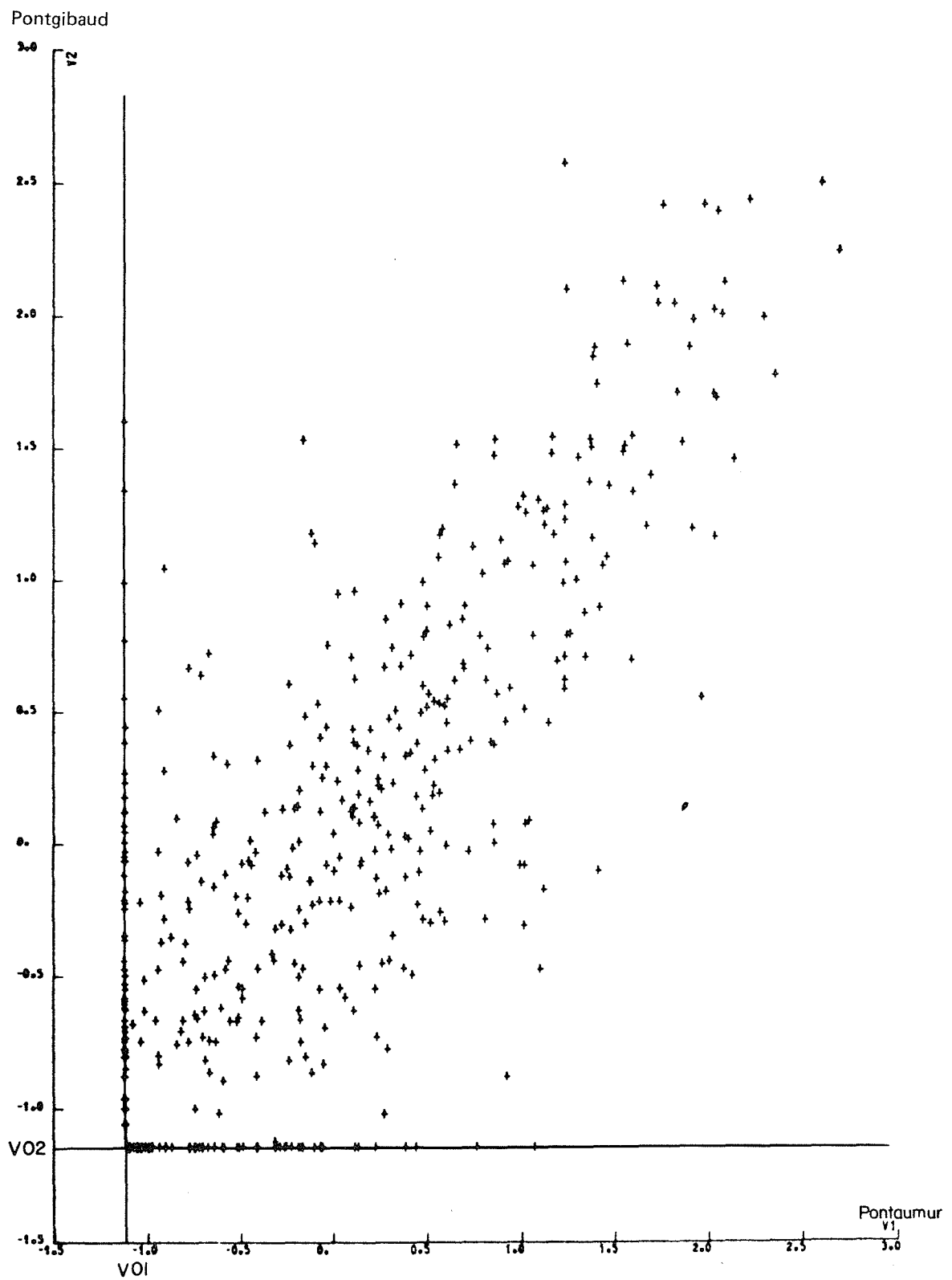


Figure 2 - Corrélation entre V_1 et V_2 - Données réelles - seuil = 10,1 mm

en au moins une station est un processus de Poisson caractérisé notamment par les formules (1) et (2).

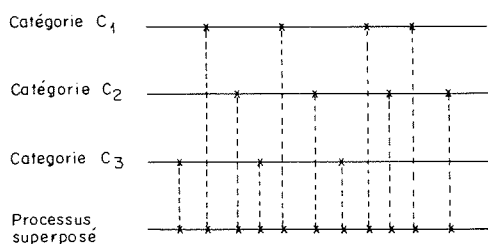
L'intérêt du processus de Poisson dans les utilisations hydrologiques est sa simplicité et son économie liées au fait qu'il ne dépend que d'un seul paramètre, ce qui peut faciliter son estimation sur une information réduite. Il possède également un certain nombre de propriétés utiles.

1^{ère} propriété : agrégation – superposition

Considérons le processus unidimensionnel et supposons que les intensités Z_i soient classées en plusieurs catégories $C_1, C_2 \dots C_k$ (ce qui introduit une typologie équivalente sur les Y_i , instants d'occurrence des Z) de telle sorte qu'un Z quelconque est tiré au sort dans l'une quelconque des catégories avec les probabilités respectives $\pi_1, \pi_2, \dots \pi_k$. Alors chacun des processus partiel d'occurrence des événements de chaque catégorie est un processus de Poisson et les K processus sont indépendants : le processus de Poisson relatif à la catégorie C_i a un paramètre $\mu_i = \pi_i \mu$.

Réciproquement le processus superposé de K processus de Poisson indépendants (de paramètre μ_i) c'est-à-dire le processus global des instants Y successifs obtenu en ne distinguant pas les catégories, est un processus de Poisson de paramètre :

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 \dots \mu_K$$



Exemples

1 – Pour la station 1 le processus marginal des événements concomitant et non-concomitant est un processus de Poisson de paramètre :

$$\mu = \mu_1 + \mu_3$$

2 – Considérons un seuil d'intensité z_0 et le processus des instants d'occurrence des Z supérieures à ce seuil. Ce processus est Poissonien de paramètre :

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \pi \mu \\ \text{avec } \pi &= \text{Prob} [Z \geq z_0] = e^{-z_0/\lambda} \end{aligned}$$

Verbalement on dit avoir effacé le processus des intensités inférieures au seuil. Il y a donc indépendance entre le processus de Poisson des événements effacés (paramètre $\mu(1 - e^{-z_0/\lambda})$) et le processus de Poisson des événements non effacés (paramètre $\mu e^{-z_0/\lambda}$).

2^{ème} propriété : intervalle de temps X_i des processus superposés

Des paramètres des processus agrégés ou désagrégés définis ci-dessus on passe immédiatement aux para-

mètres des lois exponentielles des intervalles de temps X . Cependant si on considère le processus superposé des instants d'occurrence des événements des K catégories ci-dessus, un nouveau problème apparaît :

En partant d'un instant d'occurrence Y d'un événement quelconque, quelle est la catégorie du premier événement ultérieur ?

La réponse est que cet événement appartiendra à la catégorie C_i avec la probabilité π_i . Dans ce cas la loi de probabilité du premier intervalle de temps X_i sera exponentielle et :

$$\text{Prob} [X_i \leq x] = 1 - e^{-\mu x}$$

μ étant ici le paramètre du processus agrégé. En effet cet X_i est une réalisation des intervalles de temps du processus superposé et non pas une réalisation de processus des événements de la catégorie C_i , réalisation qui est supérieure ou égale à X_i .

On remarquera que dans le cadre de notre modèle bidimensionnel on aboutit aux processus de Poisson marginaux de S_1 ou S_2 en pratiquant un effacement aléatoire à partir du processus intermittent superposé des deux stations avec des probabilités d'effacement respectivement égale à π_1 et π_2 .

Simulation des processus

Rappelons que l'objectif d'une simulation statistique est de construire des séquences de réalisations d'un processus stochastique dont les propriétés statistiques globales sont celles décrites par les lois du processus. Le procédé le plus courant de génération de réalisation d'une variable aléatoire continue U de fonction de répartition $F(u)$ est d'utiliser l'anamorphose (transformation) rectangulaire donnant la nouvelle variable aléatoire

$$W = F(U)$$

On peut démontrer que cette variable W est distribuée uniformément sur le segment $(0, 1)$. (Il existe des algorithmes préétablis sur ordinateur, permettant la génération de séquences de réalisations indépendantes des W). L'idée la plus simple pour générer des réalisations d'un processus de Poisson est de simuler les intervalles de temps inter-événements X vérifiant la loi exponentielle (2). Ces intervalles sont indépendants et sont obtenus par inversion de la transformation (8) :

$$x_i = -\frac{1}{\mu} \log(1 - w_i) \tag{8}$$

Il reste à définir la simulation des séquences de variables V_1 et V_2 qui permettent la construction des intensités Z_1 et Z_2 .

C'est un problème classique de simulation de variables normales corrélées.

On commence par générer v_{i1} par anamorphose rectangulaire :

$$v_{i1} = G^{-1}(w_i)$$

où w_i est une réalisation de variable uniforme sur $(0, 1)$.

On génère ensuite v_{i2} dans la loi liée de V_2 pour V_1 fixée :

$$v_{i2} = \rho v_{i1} + \sqrt{1 - \rho^2} \epsilon_i \quad (9)$$

ou ϵ_i est une réalisation de variable normale centrée réduite, donc :

$$\epsilon_i = G^{-1}(w'_i)$$

Rappelons ici qu'un procédé de génération d'un couple V_{i1}, ϵ_i évitant l'utilisation de l'anamorphose rectangulaire consiste à utiliser les deux formules :

$$V_{i1} = \sqrt{-2 \log w_i} \cos 2 \pi w'_i$$

$$\epsilon_i = \sqrt{-2 \log w_i} \sin 2 \pi w'_i$$

Application aux stations de Pontaurmur et Pontgibaud.

Le modèle bidimensionnel décrit précédemment peut s'appliquer à différents processus hydrométéorologiques : précipitations et débit ; nous donnons ici l'exemple de la description du processus des épisodes pluvieux à deux stations pluviométriques.

Précisons que l'unité de temps élémentaire est ici le jour.

Notre modèle étant un processus ponctuel où les événements sont considérés comme instantanés alors que les épisodes pluvieux présentent une certaine durée, il importe dans cet exemple de définir avec soin les événements traités de façon à donner un sens hydrologique à la concomitance et la dépendance entre épisodes aux deux stations.

La figure 3 illustre le procédé adopté. Il consiste à considérer comme période pluvieuse de J jours, commune aux deux stations toute période pluvieuse continue du processus superposé où il pleut en une station au moins. A chaque épisode ainsi défini sont associées les pluies totales Z_1 et Z_2 tombées au cours de la période considérée. En fait ne sont considérés comme événement que les épisodes où Z_1 et Z_2 dépassent certains seuils à fixer.

Le tableau II regroupe les estimations des paramètres dont la signification est donnée dans le tableau I.

Estimation du coefficient de corrélation

Une méthode simple pour estimer ρ consiste à utiliser le coefficient de corrélation empirique calculé sur les couples (V_1 et V_2) concomitants.

Cette méthode introduit un biais. Une méthode d'estimation plus précise est la méthode du maximum de vraisemblance qui consiste à calculer ρ tel que la vrai-

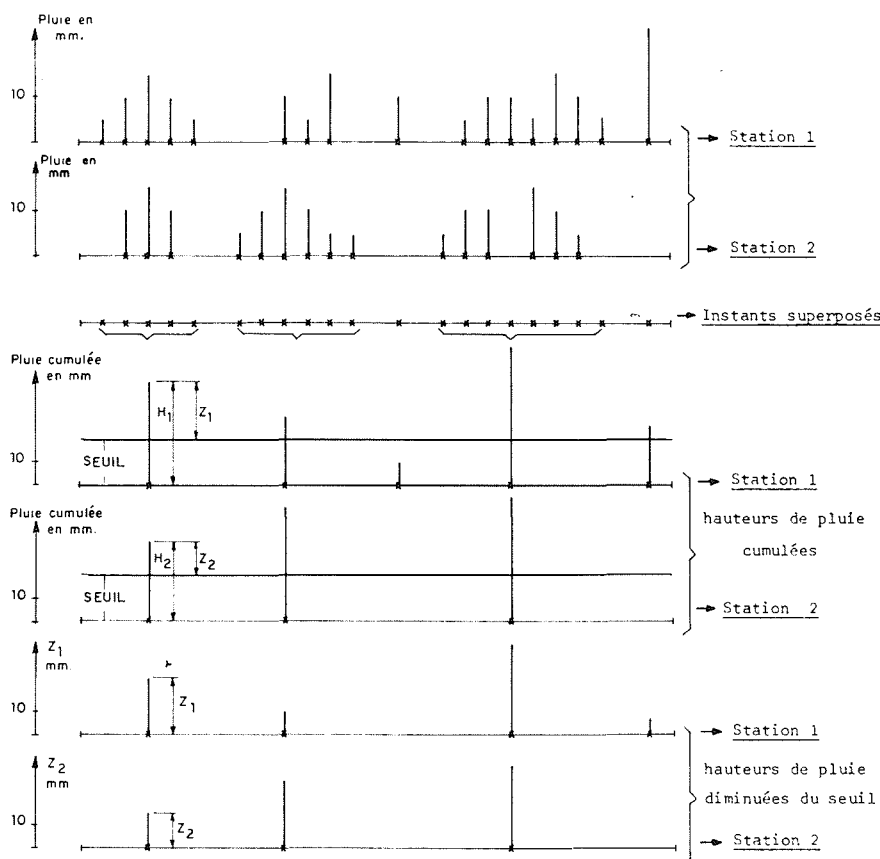


Figure 3 – Nous avons donc ici 4 événements en S_1 , 3 en S_2 et 3 événements concomitants.

Tableau I	Signification des paramètres.
<p>Précisons les différents paramètres qui vont intervenir dans les différents processus.</p> <p>N_1 est le nombre d'évènements en S_1</p> <p>N_2 est le nombre d'évènements en S_2</p> <p>N_{12} est le nombre d'évènements concomitants aux stations 1 et 2</p> <p>N est le nombre d'évènements du processus superposé : $N = N_1 + N_2 - N_{12}$</p> <p><i>Paramètres des processus de Poisson et leurs estimations.</i></p> <p>$\mu^1 = \frac{N_1}{T}$ paramètre du processus de Poisson à 1 dimension en S_1</p> <p>$\mu^2 = \frac{N_2}{T}$ paramètre du processus de Poisson à 1 dimension en S_2</p> <p>$\mu = \frac{N}{T}$ paramètre du processus de Poisson superposé</p> <p>$\mu_1 = \frac{N_1 - N_{12}}{T}$ paramètre du processus de Poisson des évènements en S_1 non concomitants à S_2</p>	<p>$\mu_2 = \frac{N_2 - N_{12}}{T}$ paramètre du processus de Poisson des évènements en S_2 non concomitants à S_1</p> <p>$\mu_3 = \frac{N_{12}}{T}$ paramètre du processus de Poisson concomitant en S_1 et S_2</p> <p>Ces paramètres ne sont pas indépendants et sont liés par les relations :</p> <p>$\mu^1 = \mu_1 + \mu_3$</p> <p>$\mu^2 = \mu_2 + \mu_3$</p> <p>$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$</p> <p><i>Paramètres des lois exponentielles et leurs estimations.</i></p> <p>$\pi_1 = \frac{N - N_1}{N}$</p> <p>$\pi_2 = \frac{N - N_2}{N}$</p> <p>$\lambda_1 = \frac{1}{N_1} \sum Z_1$</p> <p>$\lambda_2 = \frac{1}{N_2} \sum Z_2$</p>

Tableau II	Estimation des paramètres							
Seuil mm	0.1	5.1	10.1	15.1	20.1	25.1	30.1	35.1
N1	804	547	397	286	219	165	123	100
N2	879	563	401	297	222	166	127	98
N12	735	476	340	236	171	126	95	71
N	948	634	458	347	270	205	155	127
μ^1 an ⁻¹	50.25	34.19	24.81	17.81	13.69	10.31	7.69	6.25
μ^2 an ⁻¹	54.94	35.19	25.06	18.56	13.87	10.37	7.94	6.13
μ an ⁻¹	59.25	39.63	28.62	21.69	16.88	12.82	9.69	7.94
μ_1 an ⁻¹	4.31	4.44	3.56	3.13	3.00	2.44	1.75	1.81
μ_2 an ⁻¹	9.00	5.44	3.81	3.81	3.19	2.50	2.00	1.69
μ_3 an ⁻¹	45.94	29.75	21.25	14.75	10.69	7.88	5.94	4.44
π_1	0.1519	0.1372	0.1332	0.1756	0.1889	0.1951	0.2065	0.2126
π_2	0.0728	0.1120	0.1245	0.1441	0.1778	0.1902	0.1806	0.2283
λ 1 mm	15.84	17.27	17.86	18.92	18.91	19.26	19.95	19.08
λ 2 mm	15.14	17.42	18.46	18.96	19.38	20.13	20.56	20.92
ρ empirique	0.872	0.814	0.782	0.749	0.778	0.734	0.611	0.605
ρ max de vrais	0.780	0.735	0.670	0.610	0.585	0.560	0.520	0.505

semblance de l'échantillon donnée ci-dessous est maximale :

$$L = \prod_i e^{-\frac{V_{i1}^2}{2}} G\left(\frac{V_{02} - V_{i1}}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right) \prod_i e^{-\frac{V_{i2}^2}{2}} G\left(\frac{V_{01} - V_{i2}}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right) \prod_I g(V_{i1}^*, V_{i2}^*)$$

V_{i1} ensemble des V_1 tels que l'on ait $V_2 \leq V_{02}$ (non concomitant en S_1).

V_{i2} ensemble des V_2 tels que l'on ait $V_1 \leq V_{01}$ (non concomitant en S_2).

(V_{i1}^*, V_{i2}^*) ensemble des $(V_1$ et $V_2)$ concomitants. g est la densité de probabilité de la loi normale à 2 variables

$$g(V_1, V_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - \rho^2}} e^{-\frac{V_1^2 - 2\rho V_1 V_2 + V_2^2}{2(1 - \rho^2)}}$$

Vérifications du modèle

Les vérifications présentées ici portent sur les intensités des processus. En ce qui concerne le processus des époques d'occurrence représenté par le modèle de

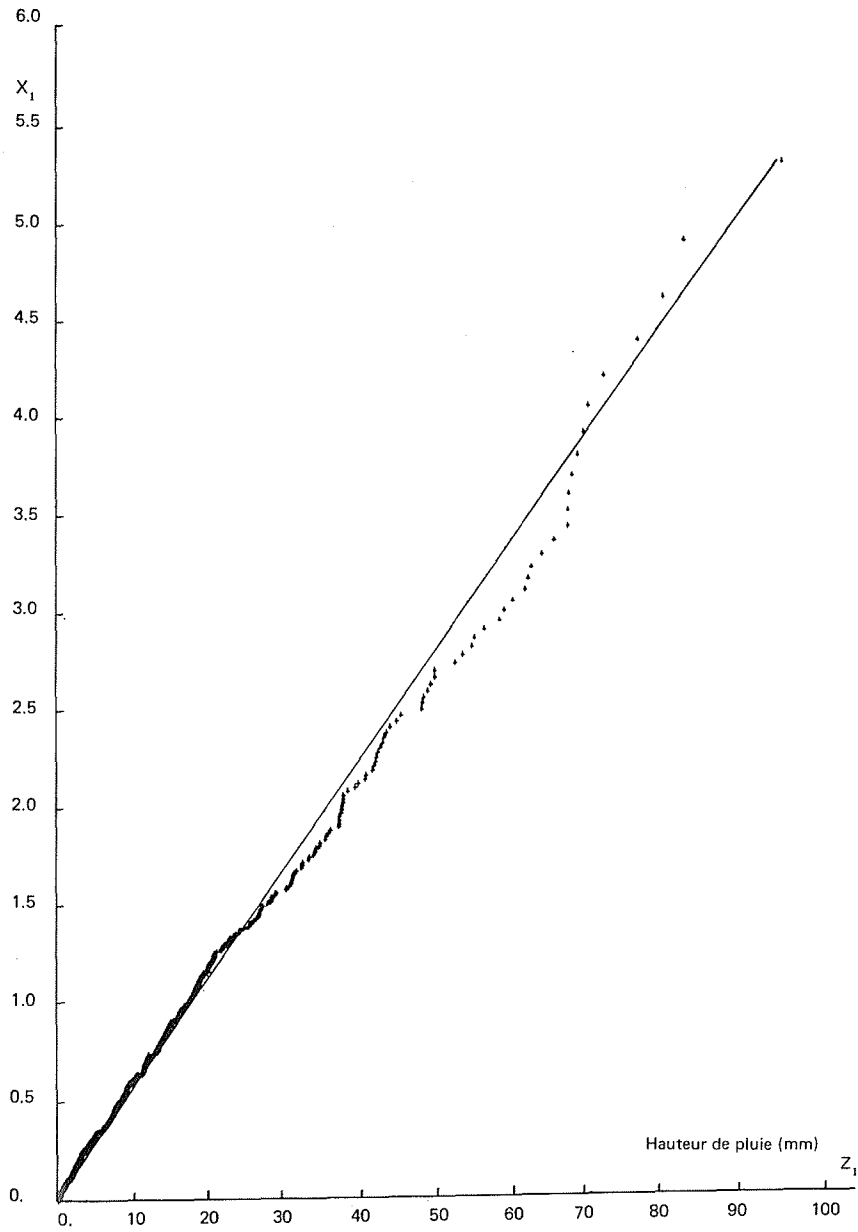


Figure 4 – Corrélation de la loi exponentielle
Pontaurmur – Seuil 10.1 mm

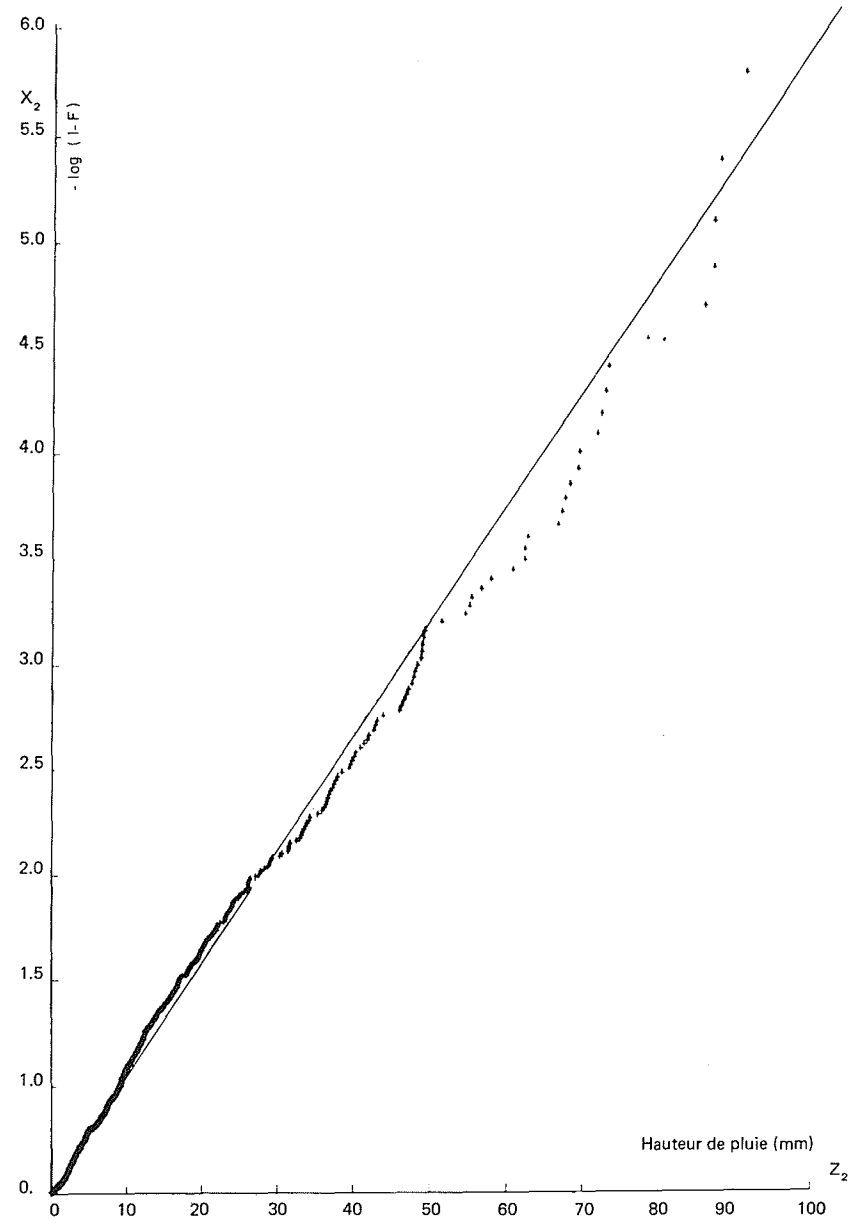


Figure 5 – Corrélation de la loi exponentielle
Pongibaud – Seuil 10.1 mm

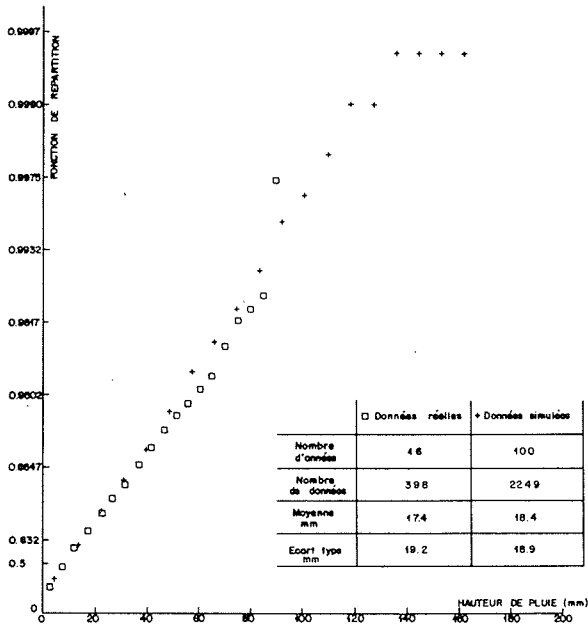


Figure 6 – Distribution des intensités d'averses à Pontgibaud concomitantes avec les averses à Pontaurmur.

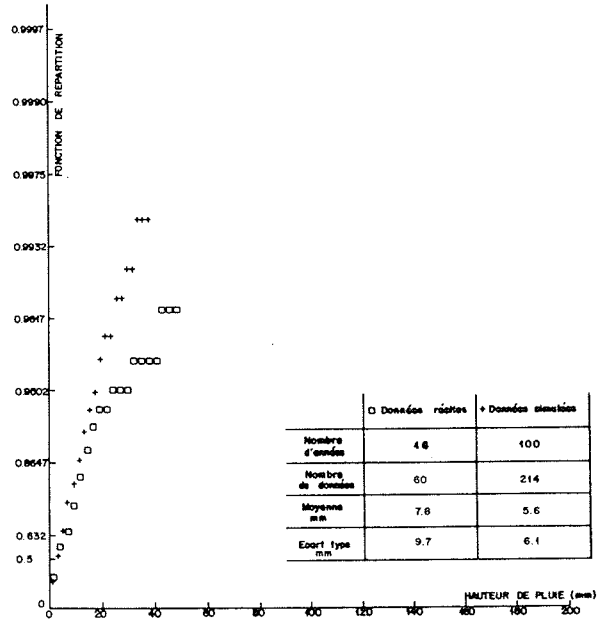


Figure 7 – Distribution des intensités d'averses à Pontgibaud non concomitantes avec les averses à Pontaurmur.

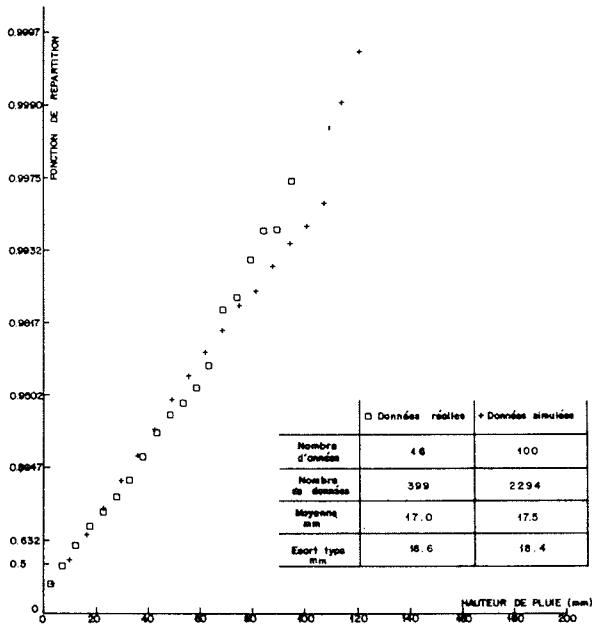


Figure 8 – Distribution des intensités d'averses à Pontaurmur concomitantes avec les averses à Pontgibaud.

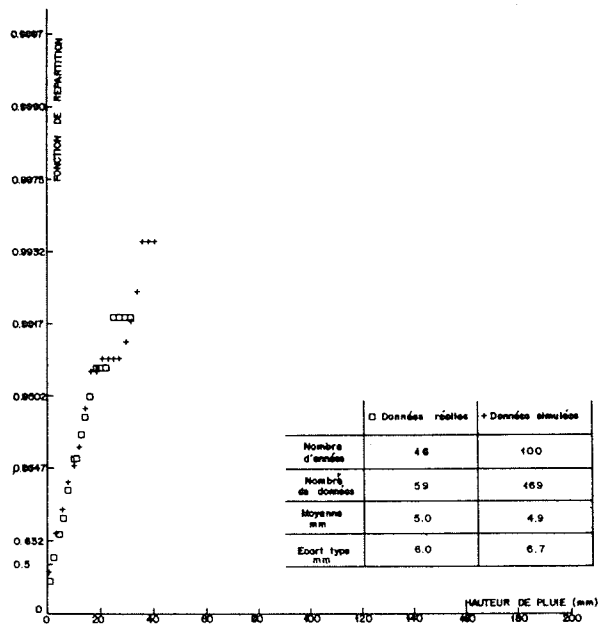


Figure 9 – Distribution des intensités d'averses à Pontaurmur non concomitantes avec les averses à Pontgibaud.

Poisson, on pourra en trouver des applications et vérifications dans l'Atlas de l'Allier [réf. 6].

Les figures 4 et 5 présentent les ajustements par la loi exponentielle des intensités supérieures ou égales à 10,1 mm. On donne en ordonnée l'échelle $-\log(1 - F)$ où F est la fonction de répartition de Z . Avec cette transformation la loi exponentielle est représentée par une droite. Les ajustements sont bons. En général, excepté pour un seuil très bas égal à 0,1 mm, l'hypothèse de loi exponentielle est bien vérifiée.

Pour la vérification des conséquences du modèle bidimensionnel, nous avons utilisé les techniques de simulation décrites plus haut. La simulation sur 100 ans du modèle ajusté permet une estimation des distributions d'intensités d'averses non concomitantes et concomitantes. La comparaison avec les répartitions observées sur les 16 ans de données disponibles est illustrée par les figures 6 à 9. Le même système de coordonnées que celui des graphiques 4 et 5 est utilisé ici. Les distributions, très comparables, indiquent une bonne adéquation du modèle.

Modèle multidimensionnel.

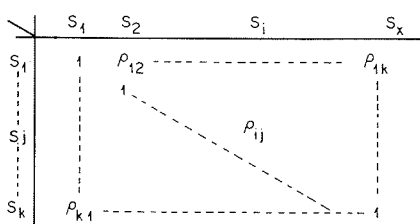
Le modèle bidimensionnel décrit dans les paragraphes précédents peut être généralisé aux cas de stations multiples en nombre K par exemple.

On considère le processus des instants où survient un évènement au moins à l'une des K stations choisies. On suppose ce processus Poissonien de paramètre μ .

A chaque instant réalisé par ce processus sont associées K intensités Z_i (dont certaines sont éventuellement nulles) caractérisées par les lois de probabilités marginales :

$$\text{pour la station } S_i : F_i(z) = \begin{cases} \pi_i & \text{si } z = 0 \\ 1 - (1 - \pi_i) e^{-\frac{z}{\lambda_i}} & z > 0 \end{cases}$$

Les variables transformées V_i définies par $G(V_i) = F_i(Z_i)$, forment un ensemble de K variables normales centrées réduites caractérisées par la matrice des coefficients de corrélation R :



Nous renverrons le lecteur à la référence [7] pour la description détaillée des méthodes de simulation dans ce cas :

Succinctement, on exprime les variables V comme combinaisons linéaires de variables indépendantes W_i , soit sous forme matricielle :

$$V = A W \tag{10}$$

La matrice carrée A est telle que ses colonnes forment les vecteurs propres associées aux valeurs propres l de la matrice des corrélations R , définies par l'équation :

$$\text{Déterminant de } (R - lI) = 0$$

où I est la matrice unité de dimensions K .

Les variables W_1, W_2, W_K sont alors des variables normales indépendantes dont les variances sont les K valeurs propres l_1, l_2, \dots, l_K .

Ces variables sont les facteurs de la méthode classique des composantes principales. On sait qu'en utilisant l'inverse de la relation (23) soit :

$$W = A^{-1} V$$

on peut interpréter concrètement les facteurs W_i en fonction des variables V calculables directement à partir de grandeurs hydrologiquement observables. Par ailleurs, en négligeant les variables W_i dont les variances l_i sont voisines de 0, on peut représenter les liaisons entre les V (et donc les Z) par un nombre restreint de facteurs sous-jacents explicatifs.

Remarque sur l'estimation de la matrice R

Les coefficients de corrélation doivent être calculés sur chaque couple de stations en utilisant la plus longue série commune pour accroître ainsi la précision des ρ_{ij} . Cependant les séries communes ne coïncident pas en général à toutes les stations. Si certaines séries communes sont trop courtes, de l'imprécision des estimations des ρ_{ij} peut découler le fait que la matrice R calculée n'est pas définie positive, c'est-à-dire certaines des valeurs propres toujours réelles peuvent être négatives dans ce cas. Cependant les plus grandes valeurs propres sont positives et peuvent s'interpréter comme les variances des facteurs les plus importants.

Références

- [1] BERNIER J. - Sur la théorie du renouvellement et son application en hydrologie - rapport HYD 67 n° 10.
- [2] BERNIER J. et FANDEUX D. - Théorie du renouvellement. Application à l'étude statistique des précipitations mensuelles - rapport HYD 67 n° 35.
- [3] LOBERT A. - Modèle probabiliste de base pour les pluies dans le bassin de l'Allier - HYD 67 n° 45.
- [4] CAYET L. - Problèmes d'adéquation et d'échantillonnage rencontrés dans l'application des modèles de renouvellement en hydrologie - HYD 69 n° 17.
- [5] DAUTY J. - Méthodes des processus stochastiques pour la détermination des lois de probabilité des crues - HYD 70 n° 11.
- [6] Méthodes d'étude régionale des ressources en eau avec application au bassin de l'Allier (1966-1970) DGRST-LNH. Synthèse des travaux effectués au LNH dans le cadre de l'action concertée. Eau.
- [7] BERNIER J. - Modèles stochastiques à variables hydrologiques multiples. Symposium AIHS, sur le modèle mathématique en hydrologie. Varsovie. 1971.