Sur la nature aléatoire du coût des dommages provoqués par les crues

The randomness of flood damage costs

Jacques Bernier

Laboratoire National d'Hydraulique, Électricité de France

Introduction

Les travaux exposés dans la suite ont fait l'objet de contrats passés en 1969 et 1970 entre le Ministère de l'Equipement et du Logement (Service Central Hydrologique) et le Laboratoire National d'Hydraulique. A cette époque, le Service Central Hydrologique avec la collaboration technique du BCEOM, a proposé une méthodologie des calculs de rentabilité appliqués aux aménagements de défense contre les eaux. Cette méthodologie reposait sur la notion de coût moyen annuel des dommages des crues encourus dans chaque cellule homogène représentant tout ou partie d'un bassin hydrologique particulier. Au cours d'études complémentaires le LNH avait été chargé d'analyser le caractère aléatoire des coûts de dommages et de préciser le mode de calcul des lois de probabilités de ces coûts dans le cas où ceux-ci sont fonctions de deux paramètres hydrologiques (hauteur ou débit maximal et durée de submersion).

Les coûts annuels de dommages

Le coût annuel de dommages provoqués par les crues dans une cellule fixée est une fonction des caractéristiques aléatoires de crues dommageables apparues au cours d'une année particulière. Les coûts C correspondant à une série d'années peuvent donc être considérés comme des réalisations d'une variable aléatoire $\mathcal{C}$ de fonction de répartition :

$$P = F(C) = \text{Prob}\,[\mathcal{C} \leqslant C]$$

La donnée de cette fonction est équivalente à la donnée de la fonction $C(T)$ reliant le coût annuel des dommages à la durée de retour de ce coût : $T = 1/1 - P$. Pour étudier la rentabilité d'un ouvrage ou d'un ensemble d'ouvrages de protection dans la cellule il faut, outre la fonction $C(T)$ prendre en compte la fonction $C'(T)$ reliant les coûts annuels modifiés par les ouvrages, à leurs durées de retour. Ces fonctions permettent le calcul de l'espérance mathématique de la recette annuelle (recette moyenne annuelle) résultant de la construction des ouvrages de protection, soit :

$$R_m = \int_{T_0}^{\infty} R(T) \frac{dT}{T^2} \qquad (1)$$

avec $R(T) = C(T) - C'(T)$

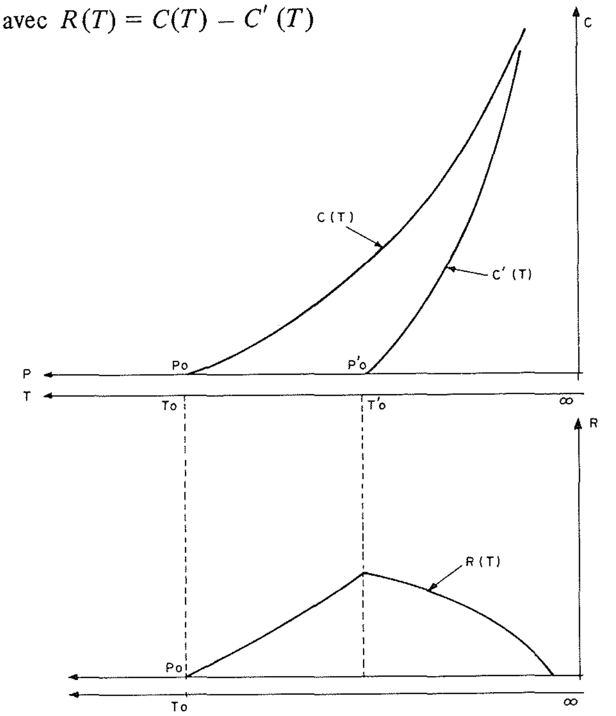


Figure 1 – Courbes représentatives des fonctions $C(T)$, $C'(T)$ et $R(T)$

T_0 étant la durée de retour critique au-dessous de laquelle le coût $C(T)$ est nul (cf. Fig. 1).

En fait les recettes doivent être prises en compte sur un horizon économique futur de N années au cours desquelles les dommages éventuels pourront varier en valeur économique. Si donc on appelle i le taux annuel d'évolution économique propre à la cellule étudiée et a le taux d'actualisation, la recette totale actualisée à l'origine des temps s'écrit :

$$\bar{R}_N = \sum_{n=1}^{N} R_n \left(\frac{1+i}{1+a}\right)^n \qquad (2)$$

Les recettes annuelles R_n successives sont des variables aléatoires dont l'espérance mathématique est donnée par la formule (1) de telle sorte que la recette moyenne totale actualisée s'écrit :

$$E(\bar{R}_N) = R_m \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1+i}{1+a}\right)^n \qquad (3)$$

Les critères d'appréciation des ouvrages.

L'utilisation de $E(\bar{R}_N)$ comme critère d'appréciation en matière de rentabilité d'ouvrages de protection contre les crues soulève certaines difficultés liées au caractère intermittent de l'occurrence des crues dommageables (cf. Fig. 2) de telle sorte que deux années d'apparition des crues dommageables successives sont séparées par un intervalle de temps aléatoire. En effet le coût annuel des dommages d'une crue non influencée par les ouvrages de protection, et donc la recette résultante, peuvent être nuls avec la probabilité $1 - 1/T_0$ (probabilité de non-apparition de crues dommageables). Il en résulte que le nombre K_N de crues dommageables apparues au cours de N années consécutives vérifie la loi de probabilité suivante :

$$\text{Prob}\,[K_N = k] = \frac{N!}{k!\,(N-k)!}\left(\frac{1}{T_0}\right)^k \left(1 - \frac{1}{T_0}\right)^{N-k} \qquad (4)$$

Une conséquence de ce résultat est la suivante :

La recette totale $\bar{R}_N$ peut être nulle. La probabilité de cet événement est celle de $K_N = 0$, donc :

$$\text{Prob}\,[\bar{R}_N = 0] = \left(1 - \frac{1}{T_0}\right)^N$$

La possibilité de valeurs nulles pour $\bar{R}_N$ est un élément de jugement important sur le critère de recette moyenne annuelle actualisée estimée par $E(\bar{R}_N)$. Il est clair que cette notion peut être fallacieuse si la probabilité précédente est notable. P ou T_0 fixe, cette probabilité est d'autant plus forte que N est petit.

Par ailleurs, on constatera dans la suite que la variabilité aléatoire de $\bar{R}_N$ est très importante ; l'écart-type $\sigma(\bar{R}_N)$ est généralement un multiple de la moyenne d'autant plus grand que T_0 est petit, et ceci quel que soit l'horizon économique pris en compte.

Ces constations vont à l'encontre d'une interprétation "comptable" du critère basé sur $E(\bar{R}_N)$: la recette totale actualisée effectivement réalisée sur une période N (par exemple de l'ordre de la durée de vie de l'ouvrage de protection) peut être très différente de l'espérance mathématique (même si les recettes sont fréquentes, cas où T_0 est petit).

Il reste donc à caractériser les écarts à l'espérance mathématique par la loi de probabilité de $\bar{R}_N$ et notamment sa fonction de répartition :

$$H_N(R) = \text{Prob}\,[\bar{R}_N \leqslant R]$$

Utilisation de la loi de probabilité des recettes comme critère de décision

Il est évident que la fonction $H_N(R)$ est essentielle à une juste appréciation de l'intérêt d'un ouvrage de protection particulier. Cependant, s'il s'agit de choisir entre divers ouvrages, l'utilisation de cette fonction soulève certaines difficultés. En effet le problème essentiel est alors un problème de classement de projets. La fonction de répartition des recettes peut permettre de classer des projets si par exemple pour deux projets (1) et (2) on a :

$$H_N^{(1)}(R) \leqslant H_N^{(2)}(R) \qquad (5)$$

pour tout R, avec inégalité stricte pour au moins un R.

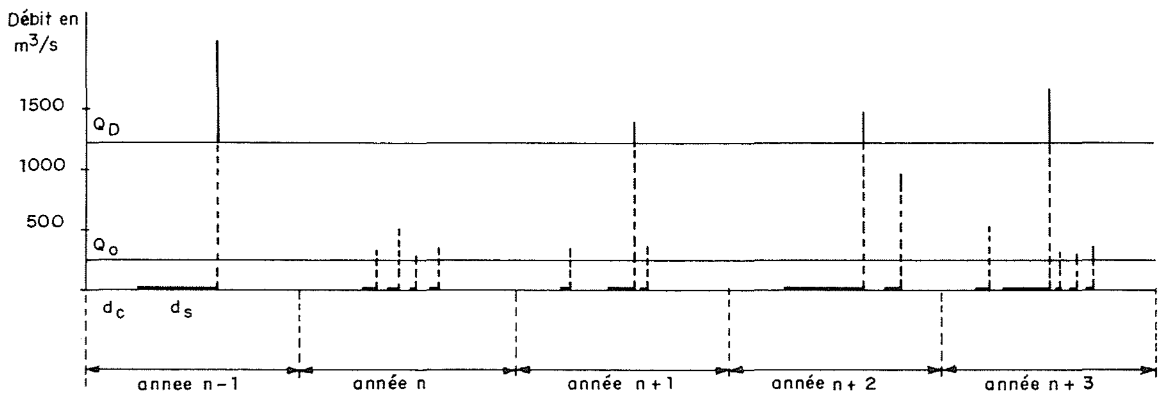


Figure 2 – Processus intermittent des crues.
Q_0 : seuil des crues sélectionnées
Q_D : seuil des crues dommageables.

Cependant la comparaison entre (1) et (2) peut devenir impossible si l'inégalité précédente change de sens pour certaines valeurs de R en le conservant pour les autres ; la relation (5) n'induit qu'un ordre partiel dans l'ensemble des projets.

L'espérance mathématique $E(\bar{R}_N)$ permet de réaliser un ordre complet compatible avec (5) dans la mesure où tous les projets peuvent être classés et où deux projets vérifiant (5), leurs espérances vérifient une inégalité dans le sens opposé. Toutefois cette espérance néglige la dispersion qui peut être considérable.

Sans entrer dans de trop longs détails sur ces problèmes d'évaluation qui sont cependant essentiels pour un jugement rationnel des ouvrages de défense contre les eaux, il ne nous semble pas inintéressant de rappeler la solution classique des théoriciens de la décision face aux aléas et aux incertitudes [6], adaptée ici à notre cas.

Il n'est pas valide de comparer entre eux deux ouvrages au moyen des espérances mathématiques des recettes calculées directement. Cette comparaison doit être effectuée sur la base de l'espérance mathématique d'une fonction d'utilité U définie sur les conséquences des décisions prises en matière de choix d'ouvrages. Dans le cas présent l'utilité peut être définie sur les recettes ou les coûts des dommages (on parlera alors d'utilité négative). Le projet (1) sera ainsi préféré au projet (2) si :

$$E[U^{(1)}(\bar{R}_N)] < E[U^{(2)}(\bar{R}_N)] \tag{6}$$

La fonction d'utilité U est parfaitement définie, à une transformation linéaire près, si le décideur accepte d'obéir à certains axiomes de cohérence dans son comportement devant l'incertitude.

Il arrive quelquefois que les difficultés d'estimation des coûts de dommages pour des crues associées à des durées de retour élevées amène à prendre en compte des coûts limites ou des recettes nulles dès que T dépasse un certain seuil T_a. Ceci revient à prendre en compte une fonction d'utilité du type suivant :

$$u(R) = R \quad \text{si} \quad T < T_a$$
$$u(R) = 0 \quad \text{si} \quad T \geqslant T_a$$

Ce faisant on accorde dans le calcul économique, tout le poids aux crues fréquentes de durée de retour $T < T_a$ supposées être celles pour lesquelles la rentabilité réelle $\bar{R}_N$ serait voisine de la rentabilité espérée $E(\bar{R}_N)$. On a vue précédemment, par la considération de la variabilité de $\bar{R}_N$! combien cette interprétation peut être erronée. Dans le problème des dommages de crues, le concept même de rentabilité "comptable" est fallacieux et le concept d'utilité semble plus opérationnel ; plutôt que d'imposer un coût limite à prendre en compte, il conduirait, même dans le cas d'information limitée sur les coûts de dommages, à prendre pour les fonctions d'utilité négative $U(C)$ un support d'extrapolation pour les grandes valeurs de T donnant un certain poids au coût des crues résultantes.

Quoi qu'il en soit, l'évaluation des utilités et plus généralement d'un critère unique pour la sélection des ouvrages de protection est un problème difficile. On peut penser que la considération de la loi de probabilité des coûts et (ou) des recettes est un élément d'appréciation plus nuancé et nécessaire avant tout choix.

La loi de probabilité des recettes totales actualisées.

Compte tenu de ce qui précède, la recette totale actualisée sur N années peut être écrite :

$$\bar{R}_N = \sum_{j=0}^{K_N} R_j \left(\frac{1+i}{1+a}\right)^{uj} \tag{7}$$

où :

- R_j est la $j^{\text{ème}}$ recette apparue (correspondant à la $j^{\text{ème}}$ crue dommageable) ; toutes ces recettes obéissant à la même loi de probabilité dont la fonction de répartition $G(R)$ est calculée à partir de la fonction $R(T)$ au moyen de la formule (8) ci-dessous.
- K_N est le nombre aléatoire de crues dommageables sur N années.
- $uj = X_1 + X_2 \ldots + X_j$
- X_j est l'intervalle de temps aléatoire séparant les $j-1^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ crues dommageables.

On peut montrer que :

$$G(R) = 1 - T_0[1 - F(R)] \tag{8}$$

avec $$F(R) = 1 - P_1(R) + P_2(R)$$

où P_1 et P_2 sont les valeurs associées à R par la fonction inverse reliant $P = 1/T$ à la recette R (cf figure 3 ci-après).

L'annexe expose le principe du calcul de la loi de probabilité de $\bar{R}_N$. Il est possible notamment de calculer les premiers moments caractérisant cette loi.

- L'espérance mathématique :

$$\mu = E(\bar{R}_N) = \frac{m_1(1+a)}{T_0(a-i)}\left[1 - \left(\frac{1+i}{1+a}\right)^N\right] \tag{9}$$

- La variance :

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(\bar{R}_N) \simeq \frac{m_2(1+a)^2}{T_0(a-i)(2+a+i)}\left[1 - \left(\frac{1+i}{1+a}\right)^{2N}\right] \tag{10}$$

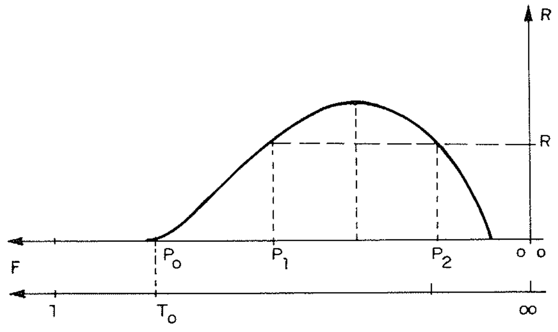


Figure 3 –

• Le coefficient d'asymétrie (moment centré du 3[e] ordre rapporté à la 3[e] puissance de l'écart-type) :

$$\gamma = \frac{E\,[(\overline{R}_N - \mu)^3]}{\sigma^3} \simeq \frac{2\sqrt{2\,T_0\,(a-i)}\cdot m_3}{3\,m_2^{3/2}} \qquad (11)$$

Dans ces formules m_1, m_2 et m_3 sont les moments d'ordre 1, 2 et 3 de la loi $G(R)$ et que l'on peut estimer par la formule :

$$m_r = T_0\,A_r$$

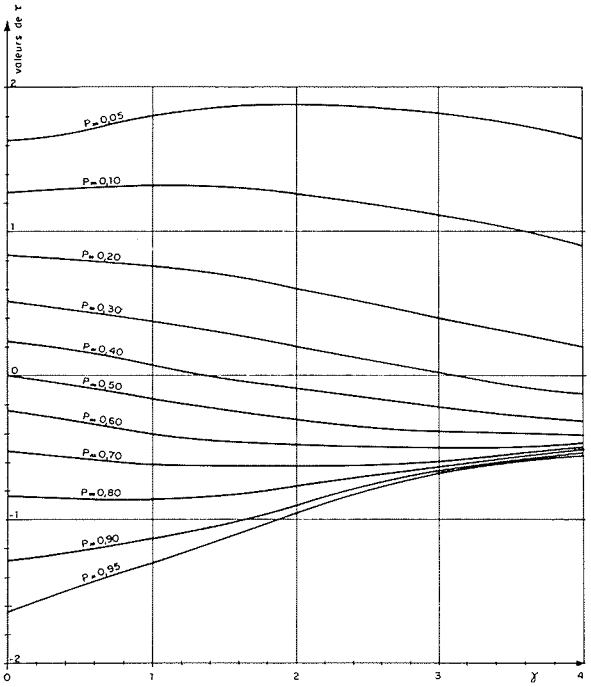


Figure 4 – Abaque des valeurs de la variable centrée réduite τ en fonction du coefficient d'asymétrie γ (Pour une probabilité de dépassement P donnée)

où A_r est la surface limitée par la courbe représentative de R^r en fonction de $P = 1/T$.

Le coefficient d'asymétrie permet le calcul d'une approximation de la loi de $\overline{R}_N$ au moyen de la formule suivante reliant $\overline{R}_N$ à une probabilité de dépassement P pour :

$$\overline{R}_N = \mu + \sigma\tau$$

où τ est donné en fonction de γ et de P par l'abaque de la figure 4.

Application

Considérons deux courbes de recettes théoriques données par la figure 5. Le tableau ci-dessous donne l'espérance de $\overline{R}_N$ et les valeurs dont les probabilités de dépassement sont respectivement $P = 0{,}90$ et $P = 0{,}10$ soit $\overline{R}_{N1}$ et $\overline{R}_{N2}$; les taux d'actualisation et d'évolution économique annuels sont respectivement 0,07 et 0,04.

		$N = 50$ ans (10^5 F)	$N = 100$ ans (10^5 F)
Exemple I	$\overline{R}_{N1}$	14,2	16,7
	$\overline{R}_{N2}$	5,3	7,8
	$E(\overline{R}_N)$	8,7	12,0
Exemple II	$\overline{R}_{N1}$	18,0	21,4
	$\overline{R}_{N2}$	9,4	12,5
	$E(\overline{R}_N)$	13,5	16,8

On constate que l'écart relatif $\overline{R}_{N1}\,\overline{R}_{N2}$ est de l'ordre de grandeur de l'espérance ce qui traduit une dispersion relative importante, même pour des horizons économiques N assez élevés.

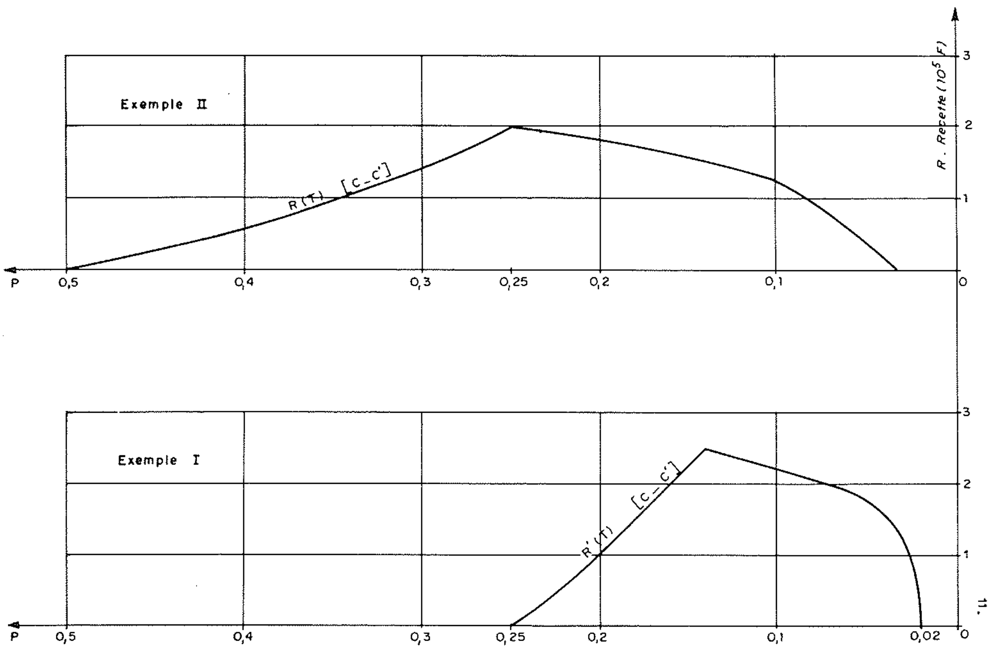


Figure 5 – Courbes des recettes théoriques

Lois de probabilité du coût des dommages annuels

Dans ce qui précède nous avons supposé connue la loi de probabilité $F(C) = \text{Prob}\,[\mathcal{C} \leqslant C]$ du coût des dommages annuels.

Nous abordons maintenant l'étude de cette loi. La variable aléatoire peut être interprétée comme une somme de termes en nombre aléatoire :

$$\mathcal{C} = \sum_{j=1}^{N} \mathcal{C}_j$$

- $\mathcal{C}_j$ est le coût d'une crue dommageable d'indice j apparue au cours d'une année particulière dont le coût total est $\mathcal{C}$;
- N est maintenant le nombre aléatoire de crues dommageables de l'année.

Nous proposons une approche analytique de la loi de $\mathcal{C}$, en utilisant comme intermédiaire les lois des coûts des crues composantes. Ainsi dans le cas où on connaît la moyenne μ et la variance σ^2 de ces coûts on peut écrire :

$$E(\mathcal{C}) = \mu\, E(N) \tag{12}$$

$$\text{Var}\,(\mathcal{C}) = \sigma^2\, E(N) + \mu^2\, \text{Var}\,(N) \tag{13}$$

Ces formules supposent l'indépendance de N et des $\mathcal{C}_j$, ce qui n'est pas toujours le cas. Nous développons en annexe les principes d'une méthode tenant compte de la dépendance, méthode qui cependant demande des calculs plus complexes. Les formules (12) et (13) sont souvent des approximations suffisantes.

Comme nous le verrons par la suite, il est utile de faire une classification préalable des crues en plusieurs catégories homogènes indépendantes. Si k est le nombre et i l'indice générique de ces catégories, N_i le nombre annuel de crues de la catégorie i, on aura :

$$\mathcal{C} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{i} \mathcal{C}_{ij} \tag{14}$$

$$E(\mathcal{C}) = \sum_{i=1}^{k} \mu_i\, E(N_i) \tag{15}$$

$$\text{Var}\,(\mathcal{C}) = \sum_{i=1}^{k} [\sigma^2\, E(N) + \mu_i^2\, \text{Var}\,(\mu_i)] \tag{16}$$

Le coût d'une crue dommageable

Toute crue doit être représentée par un certain nombre de paramètres hydrologiques susceptibles d'avoir une influence sur son coût de dommages. L'information souvent très limitée sur les coûts impose de n'envisager qu'un petit nombre de paramètres, essentiellement deux au maximum ; ceux généralement retenus sont :

- la hauteur ou le débit maximal
- la durée pendant laquelle le débit (ou la hauteur) est resté supérieur à une valeur fixée.

Cas d'un seul paramètre hydrologique

Supposons le coût fonction d'un seul paramètre hydrologique, Q par exemple, le débit maximum de la crue :

$$C = H(Q) \tag{17}$$

On peut généralement estimer la loi de probabilité $G_0(q)$ de ce paramètre au moyen de méthodes classiques en hydrologie, soit :

$$G_0(q) = \text{Prob}\,[Q \geqslant q]$$

On peut admettre que la fonction $H(Q)$ est monotone croissante de telle sorte que la fonction inverse $Q = H^{-1}(C)$ est croissante.

Cette fonction permet donc le calcul de la loi de $\mathcal{C}$ par la formule :

$$\text{Prob}\,[\mathcal{C} \geqslant C] = \text{Prob}\,[Q \geqslant q = H^{-1}(C)] \tag{18}$$

puisque la condition $\mathcal{C} \geqslant C$ est vérifiée, si, et seulement si $Q \geqslant q = H^{-1}(C)$

soit :

$$F(C) = G_0\,[H^{-1}(C)] \tag{19}$$

La probabilité d'occurrence d'une crue de débit q est généralement définie comme la probabilité de dépassement de q : $1 - G_0(q)$.

Par la formule (18) on voit que la probabilité d'occurrence d'un coût C est celle de la valeur q du débit correspondant calculé par la formule (17).

Mais la connaissance exacte de la fonction H n'est pas nécessaire. Il suffit d'en connaître quelques valeurs et les probabilités d'occurrence des coûts résultant de crues connues sont celles des débits q de ces crues.

Cas de deux paramètres hydrologiques

Supposons le coût fonction de deux paramètres hydrologiques, Q et D par exemple, le débit maximum et la durée pendant laquelle le débit est resté supérieur à une valeur fixée :

$$C = H(Q\,, D) \tag{20}$$

et cherchons à calculer $1 - F(C) = \text{Prob}\,[\mathcal{C} \geqslant C]$

Soit $\mathcal{B}$ le domaine de l'ensemble de toutes les valeurs possibles des *couples* $\{Q\,, D\}$ et B la partie de cet ensemble telle que :

$$H(Q\,, D) \geqslant C \tag{21}$$

B est constitué de l'ensemble des couples $\{Q\,, D\}$ vérifiant cette condition (21).

Puisque la condition $\mathcal{C} \geqslant C$ est vérifiée si et seulement si un couple $\{Q\,, D\}$ appartient à B, on a :

$$F(C) = \text{Prob}\,[\mathcal{C} \leqslant C] = \text{Prob}\,[B] \tag{22}$$

Cette formule est tout à fait analogue à (18) cependant la relation (20) ne définit pas une fonction biunivoque entre C et $\{Q\,, D\}$; à une valeur de C ne correspond pas un seul couple mais généralement une infinité de couples.

Pour une crue dépendant de deux paramètres aléatoires, la définition d'une probabilité d'occurence de la

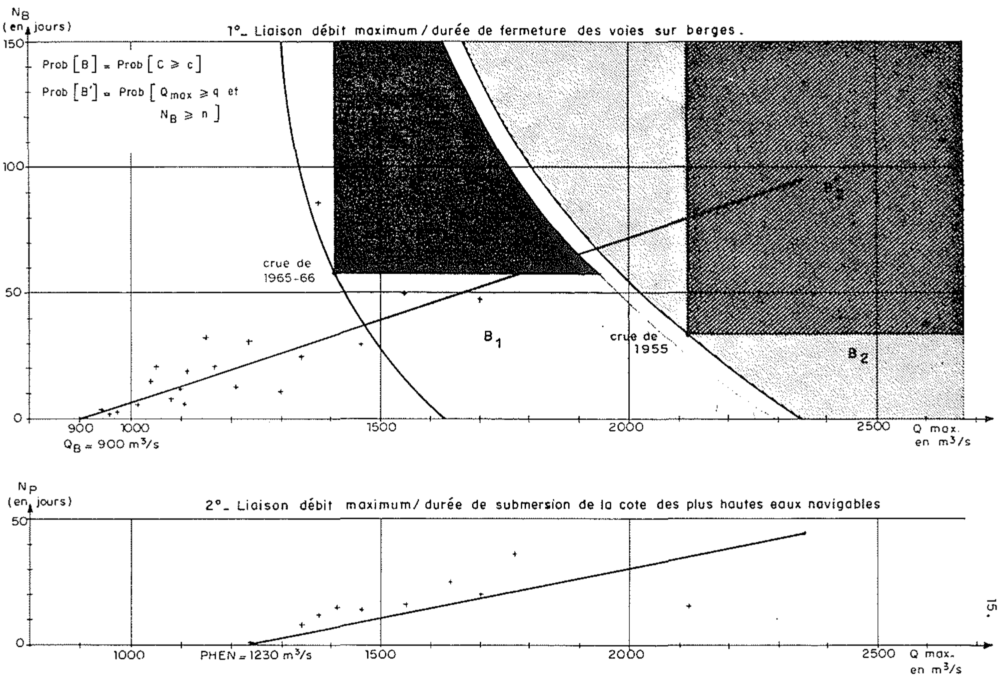


Figure 6 – Crues de la Seine à Paris

crue à quelque chose d'arbitraire. Par exemple, on peut considérer la partie B' de B constituée des couples Q et D tels que :

$$Q \geqslant q \quad \text{et} \quad D \geqslant d$$

et définir la probabilité d'occurrence de la crue de paramètres q et d par Prob $[B']$.

Mais B et B' n'ont aucune raison de coïncider même si $H(q\,,\,d) = C$ et on ne peut pas calculer la probabilité d'occurrence du coût directement à partir des probabilités d'occurrence des crues.

Cette discussion peut être illustrée par l'examen du graphique 6 montrant la corrélation entre les valeurs observées des paramètres pour les crues de la Seine à Paris, la densité des points observés donne une estimation de la densité de probabilité des couples $\{Q\,,\,D\}$. Les zones hachurées montrent les ensembles B_1, B'_1 et B_2, B'_2 pour les couples $q\,,\,d$ vérifiant les relations $C_1 = H_1(q\,,\,d)$ et $C_2 = H_2(q\,,\,d)$ telles qu'elles ont été établies pour les deux crues traitées dans l'application. On constate, dans les deux cas, la différence entre B et B'.

L'erreur commise en assimilant la probabilité d'occurrence du coût à celle des crues de coût correspondant est donc égale à la probabilité Prob $[B - B']$ de tous les couples contenus dans l'ensemble $B - B'$.

Selon la position du point $\{q\,,\,d\}$ cette erreur peut être très grande et dans certains cas être moins grande si B est remplacé par le domaine B'' de tous les couples vérifiant la simple condition $Q \geqslant q_0$ auquel cas la connaissance de la seule loi de probabilité de Q suffit.

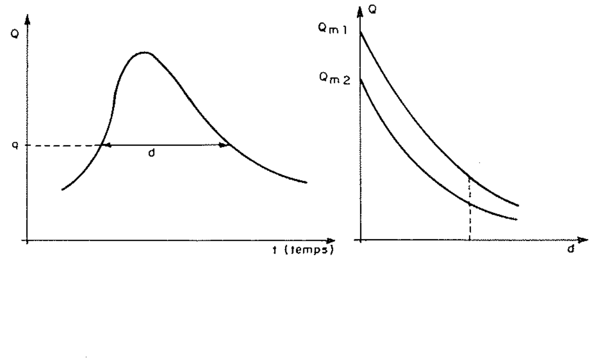
Mais la connaissance de la validité de ces approximations demande la connaissance de la fonction $H(Q\,,\,D)$ complète et non pas quelques valeurs isolées.

Dans le cas de deux paramètres hydrologiques aléatoires il est nécessaire de connaître la fonction de coût $H(Q\,,\,D)$ pour calculer les probabilités d'occurrence des coûts.

La discussion précédente avait pour but de montrer les précautions à prendre pour une évaluation correcte de $F(C)$. Les coûts des crues observées ne peuvent être affectés directement des probabilités d'occurrence des débits maximaux que s'ils ne dépendent que de ce seul paramètre hydrologique. Dans ce cas la connaissance des coûts estimés sur un très petit nombre de crues dommageables peut permettre un tracé utilisable pour la fonction $C(T)$. Dans le cas contraire, certaines précautions doivent être prises.

Hypothèses hydrologiques permettant un calcul approché

Les difficultés mises en évidence au paragraphe précédent peuvent être évitées si les aléas des crues, sur lesquels le calcul économique est effectué, peuvent être représentés par une seule variable aléatoire, c'est-à-dire si la corrélation entre les variables aléatoires Q et D est assez étroite pour permettre une représentation aléatoire plus simple non plus dans un espace $\mathcal{B}$ à deux dimensions mais dans un espace à une dimension. Ceci est possible lorsque le calcul de la loi de probabilité du coût est fait en premier lieu pour chaque crue individuelle et non pas pour toute l'année.



Au niveau de chaque crue on peut souvent admettre l'hypothèse qui sert de base à la méthode de l'hydrogramme unitaire, à savoir l'existence, pour une durée d'averse donnée, d'un hydrogramme de crue type entièrement défini par les caractéristiques du bassin et tel que l'hydrogramme d'une crue quelconque peut être déduit par une affinité verticale dont le rapport est celui des volumes totaux ou des débits maximaux. Les courbes (Q, d) représentatives des relations entre le débit q et la durée de surpassement de q seront alors affines avec le même rapport.

Soit donc $Q = K(d)$ la courbe débit-durée de l'hydrogramme type de débit maximum Q_{m_t} ; la durée de surpassement D d'un débit q pour une crue quelconque de débit maximal Q_M sera donnée par :

$$D_q = K^{-1}\left(q\,\frac{Q_{m_t}}{Q_M}\right) \tag{23}$$

ou K^{-1} est la fonction inverse de K.

La fonction de coût s'exprime généralement en fonction du débit maximal Q_M et d'une durée D_q relative à un débit q fixé :

$$C = H(Q_M\,, D_q)$$

L'utilisation de la formule (8) permet donc d'exprimer finalement le coût en fonction du seul paramètre hydrologique aléatoire Q_M :

$$C = \mathcal{H}\,[Q_M] = H\left[Q_M\,, K^{-1}\left(q\,\frac{Q_{m_t}}{Q_M}\right)\right] \tag{24}$$

et comme précédemment on a :

$$\text{Prob}\,[\mathcal{C} < C] = \text{Prob}\,[Q_M \leqslant \mathcal{H}^{-1}(C)] = G_0\,[\mathcal{H}^{-1}(C)] \tag{25}$$

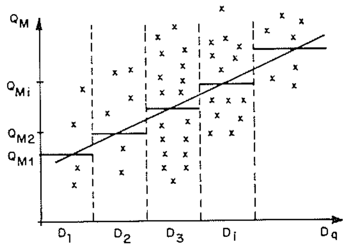
Le calcul simplifié, point par point de la loi de probabilité de $\mathcal{C}$ (en utilisant les coûts connus de quelques crues dont la probabilité d'occurence, calculée sur le seul débit maximum, est connue), peut donc être effectué.

La vérification de l'hypothèse d'affinité s'obtient en portant sur un même graphique les hydrogrammes de crues sans dimension calculés en rapportant chaque débit soit au débit maximal soit au volume maximal. Les courbes des diverses crues doivent alors être voisines d'une courbe moyenne : hydrogramme de crue type. Si les courbes individuelles présentent une trop grande variabilité inexplicable par l'existence d'un seul type, on peut utiliser plusieurs types différents. La technique précédente s'applique alors à chaque type dont les probabilités respectives permettent la combinaison.

Méthode des distributions conditionnelles

Une autre méthode approchée est possible. Elle est basée sur une classification des crues en catégories homogènes définies par des classes de valeurs de la durée D. Dans ce cas on considère la loi de probabilité conditionnelle du débit maximal pour la i^{è} classe de durée.

Si par exemple l'analyse statistique d'un échantillon de crues observées montre une régression linéaire entre le débit maximal Q_M et la durée D_q de dépassement du débit de référence q. Les catégories peuvent être définies par les classes D_i comme le montre la figure ci-après, les distributions $G_i(Q)$ diffèrent alors par leur valeur moyenne $\overline{Q}_{M_i}$.



Dans un schéma logarithmico-normal où les logarithmes des variables Q_M et D_q sont supposés distribués selon des lois de Gauss, on peut admettre que les logarithmes des débits de la catégorie D_i sont distribués autour de la moyenne des logarithmes de la classe selon une loi de Gauss dont la variance est :

$$V_i^2 = V^2\,(1 - \rho^2) \tag{26}$$

où V^2 est la variance marginale des logarithmes des Q_{M_i} et ρ le coefficient de corrélation entre $\log Q_M$ et $\log D_q$.

On notera bien sûr que la régression précédente doit être calculée sur les logarithmes également.

Distribution du nombre annuel de crues N_i par catégorie

Les principes généraux de la théorie du renouvellement (voir annexe) permettent le calcul de $E(N_i)$ et $\text{Var}\,(N_i)$ à partir des intervalles de temps séparant l'occurrence des crues. Des approximations sont possibles si on suppose que la durée t_i de la saison des crues de la catégorie i est suffisamment grande. Pour fixer les idées nous dirons que l'approximation est suffisante si $E(N_i)$ est de l'ordre de quelques unités.

L'intérêt des formules suivantes est de ne nécessiter que le calcul des premiers moments des distributions des intervalles de temps séparant les crues. Nous distinguerons le premier intervalle de temps (plus précisément l'intervalle séparant la première crue de l'origine des temps de la période considérée). Soit :

- m_1 : la moyenne de l'intervalle séparant deux crues
- m_2 : la variance de cet intervalle
- m_3 : le moment du troisième ordre de cet intervalle centré autour de m_1
- M_1 : la moyenne du premier intervalle
- M_2 : la variance du premier intervalle
- t_i : durée de la période (saison) de crues dommageables dans l'année.

Les formules générales sont les suivantes :

$$E(N_i) = \frac{t_i}{m_1} + \frac{m_2 + m_1\,(m_1 - 2\,M_1)}{2\,m_i^2} \tag{27}$$

$$\mathrm{Var}(N) = \frac{m_2}{m_1^2}\, t + \frac{m_1 M_2 - M_1 m_2}{m_1^3} + \frac{1}{12} + \frac{5\, m_2^2}{4\, m_1^4} - \frac{2\, m_3}{3\, m_1^3} \tag{28}$$

Pour la simplicité de l'écriture, l'indice i de chaque catégorie a été supprimé dans ces formules mais il est sous-entendu. Ainsi les moments doivent être calculés sur les intervalles des crues de chaque catégorie.

Notons qu'il est avantageux de calculer les moments m_1, m_2, M_1 et M_2 à partir de lois ajustées aux intervalles et non pas directement sur les données.

Si on peut admettre l'identité de la distribution du premier intervalle et des distributions des intervalles suivants, les formules (27) et (28) peuvent être simplifiées :

$$E(N) = \frac{t}{m_1} + \frac{m_2 - m_1^2}{2\, m_1^2} \tag{29}$$

$$\mathrm{Var}(N) = \frac{m_2}{m_1^3}\, t + \frac{5\, m_2^2}{4\, m_1^4} - \frac{2\, m_3}{3\, m_1^3} + \frac{1}{12} \tag{30}$$

Une autre simplification peut résulter de l'hypothèse que le processus d'occurrence de crues est un processus de Poisson, l'hypothèse à la base de la méthode classique d'estimation des lois de probabilité des crues annuelles par la théorie du renouvellement et qui peut être vérifiée assez fréquemment. Dans ce cas :

$$E(N) = \mathrm{Var}(N) = \frac{t}{m_1} \tag{31}$$

Ces deux formules sont alors exactes pour tout t.

Choix des périodes t_i.

Il est évident que la prise en compte de processus retardé (loi différente pour le premier intervalle) complique à la fois les formules et l'estimation des paramètres puisqu'elle nécessite le calcul de 5 moments au lieu de 3.

En fait on peut s'en affranchir si l'origine de la période t_i est choisie de façon à coïncider avec le début de la période de risque de crue (bien entendu la notion de crue est ici toute relative au mode de sélection que l'on s'est fixé à priori). Ce choix peut être assez difficile mais en prenant une origine arbitraire on introduit une complication liée à la diversification des lois des intervalles.

Application aux dommages causés par les crues de la Seine dans l'agglomération parisienne.

Les éléments économiques de ce cas d'application ont été pris dans une étude faite par le BCEOM "Essai sur le coût économique des crues - vol II : agglomération parisienne" que nous avait communiquée le Service Central Hydrologique.

On a considéré ici comme dommageable toute crue de débit supérieur ou égal à $Q_p = 2\,230$ m³/s (correspondant à une hauteur d'eau de l'ordre de 4 m au Pont d'Austerlitz sensiblement équivalente au niveau des plus hautes eaux navigables : PHEN). Il était nécessaire de prendre également en compte les gênes apportées à la circulation automobile supposées intervenir à partir du seuil $Q_p = 900$ m³/s.

En ce qui concerne le coût des dommages, les seuls éléments chiffrés étaient relatifs aux deux crues de janvier 1955 et de l'hiver 1965-66. Avec une information aussi réduite nous nous sommes bornés à chercher une formule compatible avec les données et qui permette de tester les possibilités d'application de la méthode. Nous avons pris comme fonction de coût schématique une somme de deux coûts fonctions des débits et des durées où intervient un terme proportionnel au produit : débit x durée :

$$C = C(Q) + C(D) \tag{32}$$

avec

$$C(Q) = a_1 (Q_m - Q_p)^2 + a_2 (Q_m - Q_p)$$

$$C(D) = b_1 N_B + b_2 N_P (Q_m - Q_p)$$

où

- Q_m est le débit maximal atteint par la crue
- N_P est la durée de submersion de la cote des PHEN (débit Q_p)
- N_B est la durée de fermeture des voies sur berges (débit Q_B)

En ce qui concerne les intervalles de temps séparant les crues, on a considéré la somme :

$$D = d_c + d_s$$

où d_c est la durée de la crue et d_s la durée de l'intervalle inter-crue la précédant.

Une crue était définie ici par toute période où le débit est supérieur à 300 m³/s. Les lois de probabilité des durées D étaient ajustées par des distributions gamma de densité :

$$f(d) = \frac{\alpha^\gamma\, e^{-\alpha d}\, d^{\gamma - 1}}{\Gamma(\gamma)}$$

avec les estimations suivantes :

- $\hat{\alpha}_0 = 0{,}028$ $\hat{\gamma}_0 = 4{,}1$ pour la distribution du premier intervalle. (Le 1er septembre étant pris pour origine).
- $\hat{\alpha} = 0{,}032$ $\hat{\gamma} = 1{,}9$ pour la distribution des intervalles suivant le premier.

Distribution des paramètres débit maximal et durée des crues.

La distribution des débits maximaux Q_m des crues des débits supérieurs à $Q_u = 300$ m³/s a été estimée par une loi exponentielle de densité :

$$f(Q_m) = \frac{1}{\lambda}\, e^{-\frac{Q_m - Q_0}{\lambda}}$$

avec $\lambda = 407$ m³/s.

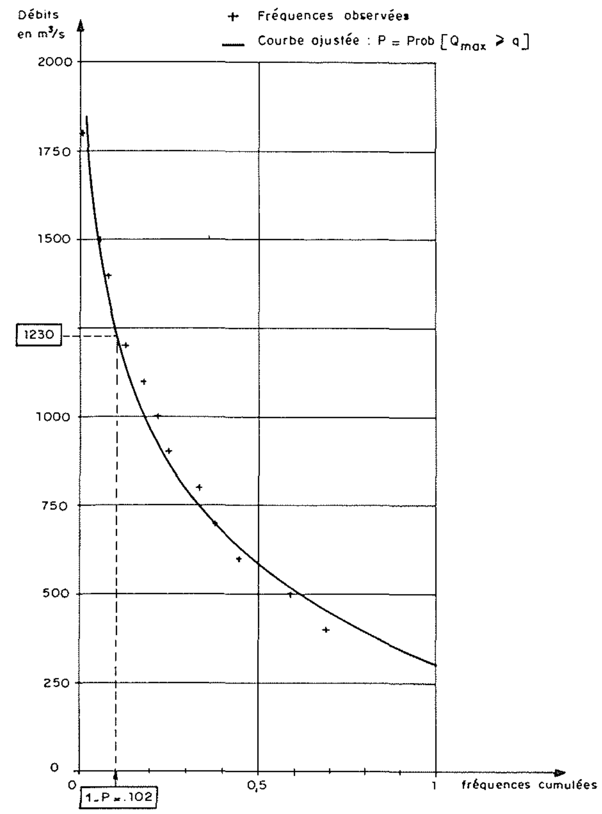


Figure 7 – Ajustement d'une fonction exponentielle à la loi de répartition des débits maximum.

La figure 7 illustre l'ajustement obtenu.

Il résultait de cette loi que la probabilité des crues dommageables (supérieures aux PHEN) était donnée par :

$$1 - p = \int_{1230}^{\infty} f(Q_m)\, dQ_m = 0{,}102$$

On a supposé par ailleurs que les durées de submersion de la cote des PHEN et des berges étaient reliées en probabilité à Q_m par des formules du type :

$$N_B = \beta_B\,(Q_m - Q_B) + \epsilon_B$$

$$N_P = \beta_P\,(Q_m - Q_B) + \epsilon_P$$

ϵ_B et ϵ_P étant des erreurs aléatoires de variance fixée.

Nombre de crues dommageables

On considère que les crues dommageables ne pourraient apparaître que sur une période $t = 200$ j à compter du 1^er^ septembre. Compte tenu des lois des durées précédentes, de la probabilité d'apparition des crues dommageables, on a obtenu les paramètres statistiques du nombre aléatoire N_t de crues dommageables dans l'année :

$$E(N_t) = 0{,}40$$

$$\mathrm{Var}(N_t) = 0{,}42$$

Coûts annuels des dommages

Les estimations suivantes (en francs 1965) ont été obtenues :

$$E(\mathcal{C}) = 23{,}5 \text{ MF}$$

Ecart-type : $\sigma(\mathcal{C}) \simeq 100$ MF

Le résultat de l'espérance mathématique comparé avec d'autres estimations communiquées par le Service Central Hydrologique fait apparaître une augmentation notable. Il ne faut pas s'en étonner car les valeurs trouvées sont fortement influencées par les hypothèses faites quant au comportement asymptotique des fonctions de coûts pour les grands débits. Les hypothèses faites, les fonctions de coûts utilisées par nous, ne sauraient être considérées que comme des illustrations, certes cohérentes avec les données, mais très incertaines dans la zone des grandes crues. Il reste que la valeur très importante obtenue pour l'écart-type du coût annuel illustre la très grande variabilité de cette grandeur et le caractère fallacieux de la seule considération de l'espérance mathématique dans ce type de problème.

Bibliographie

[1] B.C.E.O.M. – *Calculs de rentabilité appliqués aux aménagements de défense contre les eaux* ; Ministère de l'Equipement et du Logement, Direction des Ports Maritimes et des voies Navigables. Service Central Hydrologique, juin 1969.

[2] B.C.E.O.M. – *Recherches méthodologiques sur l'évaluation des coûts unitaires des dommages causés par les crues.* Ministère de l'Equipement et du Logement, Direction des Ports Maritimes et des voies Navigables, Service Central Hydrologique, février 1970.

[4] BHAVNAGRI V.S. et BUGLIARELLO G. – Flood proofing in a flood plain : a stochastic model. *Journal of the Hydraulics Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers,* July, 1966.

[5] COX D.R. – *Renewal Theory*, Methuen, New York, 1962.

[6] SAVAGE L.J. – *The Foundations of Statistics* – Wiley, New York 1954.

[7] VERON R. et BERNIER J. – *Etude méthodologique sur l'évaluation de la loi de probabilité du coût annuel des crues (cas de deux paramètres hydrologiques)* rapport LNH 1971.

Annexe

Pour décrire en termes de lois de probabilité les processus intermittents des crues, nous avons supposé que :

- chaque crue est caractérisée par une grandeur aléatoire Y_i (débit maximal ou coût de dommage ou recette associés) définie à un instant fixé (instant du maximum ou début ou fin de crue) ;
- les intervalles de temps aléatoires X_i entre les instants d'occurrence des valeurs Y_i sont indépendants entre eux ;
- par contre chaque Y_i peut dépendre de chaque X_i (ceci pour tenir compte de la dépendance éventuelle entre débit maximal ou coût et durée de la crue).

De telles hypothèses caractérisent les processus dits de renouvellement. L'outil mathématique de base de ces processus est la transformée de Laplace. Si $g(x)$ est une densité de probabilité de variables aléatoires positives (comme les X_i ou les Y_i), on lui associe sa transformée :

$$g^*(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, g(x)\, dx \qquad \text{(A1)}$$

$g^*(s)$ peut notamment déterminer les moments μ_K de la variable dont $g(x)$ est la densité par un développement :

$$g^*(x) = \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^K \frac{s^K}{K!} \mu_K \qquad \text{(A2)}$$

Ces moments peuvent également être obtenus en dérivant la transformée $g^*(s)$ à l'origine.

Les définitions sont extensibles aux cas des densités $h(x, y)$ des deux variables X et Y conjointes :

$$h^{**}(s_1, s_2) = \int_\partial^\infty \int_\partial^\infty e^{-s_1 x - s_2 y}\, h(x, y)\, dx\, dy \qquad \text{(A3)}$$

Notons que nous sommes intéressés par les lois de probabilité des coûts ou recettes totales pour une période t de telle sorte que la densité de Z_t s'écrit $k(z, t)$; on peut définir la transformée de Laplace par rapport aux deux variables z, t :

$$k^{**}(s_1, s_2) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s_1 z - s_2 t}\, k(z, t)\, dz\, dz \qquad \text{(A4)}$$

Considérons une variable aléatoire Z_t définie par :

$$Z_t = \sum_{i=0}^{N_t} Y_i \qquad \text{(A5)}$$

où N_t est le nombre aléatoire de variables Y_i apparues sur l'intervalle de temps t, on obtient :

$$k^{**}(s_1, s_2) = \frac{1 - g^*(s_2)}{s_2} \cdot \frac{1}{1 - h^{**}(s_1, s_2)} \qquad \text{(A6)}$$

où $g^*(s_2)$ est la transformée de Laplace de la densité des intervalles de temps aléatoires X_i entre crues. Cette formule suppose que la loi de probabilité du premier intervalle de la période t est identique à celle des suivants. Si on suppose que la densité du premier intervalle, soit g_1, est différente de g et que la loi du premier couple X_i, Y_i, soit h_1, est également différente, on obtient un processus de renouvellement dit retardé pour lequel :

$$k^{**}(s_1, s_1) = \frac{1 - g_1^*(s_2)}{s_2} + \frac{1 - g^*(s_2)}{s_2} \cdot \frac{h_1^{**}(s_1, s_2)}{1 - h^{**}(s_1, s_2)} \qquad \text{(A7)}$$

Les formules générales (A6) et (A7) peuvent permettre la détermination de caractéristiques probabilistes de la loi de Z_t en utilisant les transformées de Laplace inverses (notamment par rapport à s_2) et les développements en fonction des moments pour s_1.

Notons que si on pose $Y_i = 1$ quel que soit i, on obtient $Z_t = N_t$ et les formules précédentes, utilisées avec l'hypothèse simplifiée d'indépendance entre les X_i et Y_i, fournissent les caractéristiques de la loi de N_t.

On peut utiliser des formules basées sur des principes analogues pour obtenir la loi de probabilité des recettes totales actualisées sur une période N :

$$\bar{R}_N = \sum_{j=0}^{K_N} R_j\, b^{u_j} \qquad \text{(A8)}$$

avec : $b = \dfrac{1 + i}{1 + a}$

et où u_j est la $j^{\text{è}}$ époque d'occurrence de la recette annuelle R_j.

Dans ce cas l'échelle N des temps est différente de la période t précédente puisqu'il s'agit d'évènements interannuels ; il en résulte qu'on peut supposer l'indépendance entre les recettes et les intervalles de temps (en années) qui les séparent.

La probabilité d'occurrence annuelle d'une recette non nulle est constante ; il en résulte que la date d'occurrence u_j peut être l'une quelconque des années 1, 2. . . N avec une probabilité égale à $1/N$; u_j est donc réparti uniformément entre 1 et N. Il est vrai que les u_j successifs devraient être ordonnés ($u_1 < u_2 < \ldots$), cependant la somme (A.8) est une fonction symétrique de ses termes ; l'ordre des u_j n'intervient donc pas dans la détermination de la loi de $\bar{R}_N$.

Ainsi peut-on écrire :

$$\bar{R}_N = \sum_{j=1}^{K_N} Y_j \qquad \text{(A9)}$$

où les Y_j sont indépendants et suivent la même loi de probabilité, celle de :

$$Y_j = R_j\, b^u \qquad \text{(A10)}$$

Dans (A10) u est indépendant de R_j et distribué selon une loi uniforme entre 1 et N, K_N est distribué selon la loi binomiale de la formule (4).

La formule (A9) est du même type que (A5) et les mêmes méthodes de calcul basées sur les transformées de Laplace sont applicables.