
Écoulements permanents à surface libre en lits composés

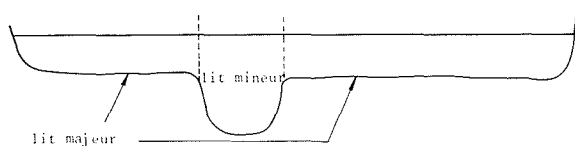
Continuous free-surface flow over composite beds

Gérard Nicollet et Michel Uan

Electricité de France – Direction des Études et Recherches
Département Laboratoire National d'Hydraulique

Introduction et définitions

La section transversale du lit d'une rivière peut comporter des parties de caractéristiques différentes (tirant d'eau, rugosité), comme le montre le profil en travers type d'une rivière de plaine en crue.



Si la direction générale de l'écoulement est suffisamment rectiligne, la surface libre peut être considérée comme horizontale sur un même profil en travers. Par contre, les diverses parties de l'écoulement peuvent avoir des vitesses très différentes ; le lit majeur encombré de végétation ou de constructions est très fréquemment plus rugueux que le lit mineur.

L'hypothèse classique des méthodes de calcul utilisées couramment pour rendre compte des écoulements en section composite est d'admettre qu'il existe une ligne de charge globale qui s'applique aussi à chacun des écoulements élémentaires pris isolément, ce qui revient à admettre que la débitance d'un écoulement élémentaire n'est pas affectée par la présence de lits adjacents :

$$J^{1/2} = \frac{Q_1}{D_n} = \dots = \frac{Q_n}{D_n} = \frac{Q}{\Sigma D_i} = \frac{Q}{D}$$

en désignant par J la pente de la ligne de charge, Q les débits et D les débitances définies par exemple au moyen de la loi de Manning-Strickler :

$$D = \Sigma D_i = \Sigma K_i S_i R_i^{2/3}$$

Pour un débit global connu, les données nature d'écoulements en lits composés ne concernent généralement que le profil en long de la ligne d'eau, dont la formulation ci-dessus rend compte avec une précision suffisante.

Par contre les répartitions des vitesses, donc des débits dans les diverses sections élémentaires du lit sont rarement connues avec une précision suffisante en nature ; il n'est donc pas possible de vérifier la validité du calcul dans ce domaine alors que ces paramètres sont fondamentaux dans l'évaluation de l'influence d'aménagements dans le lit majeur. Un exemple d'application fréquent est le franchissement d'une vallée fluviale constitué généralement d'un pont au-dessus du lit mineur et d'un remblai en travers du champ majeur. Le problème posé est le dimensionnement des éventuels ouvrages de décharge sous le remblai, pour lequel une connaissance suffisamment précise du débit majeur est indispensable.

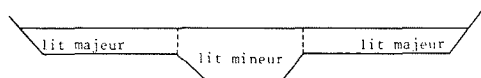
La présente étude expérimentale en canal de laboratoire a été entreprise afin de disposer d'éléments de données suffisamment fiables pour permettre de vérifier la réalité de l'hypothèse ci-dessus, d'en élaborer éventuellement une autre et de bâtir une formulation mathématique capable de rendre compte à la fois du profil en long de la ligne d'eau et de la répartition des débits.

Etude expérimentale en lit rectiligne

Principe de l'étude

Les essais de base ont porté sur des régimes uniformes dans des lits composés prismatiques ; et il a ensuite été supposé que les résultats de l'étude s'appliqueront à des

écoulements graduellement variés c'est-à-dire tangents à l'écoulement uniforme.



Le principe de l'étude expérimentale consiste à étalonner séparément chaque partie du lit en l'isolant par des parois verticales lisses : la réalisation d'écoulements uniformes de tirant d'eau donné permet de définir pour chaque lit sa rugosité. Après avoir mis en communication lit mineur et lit majeur, un jaugeage est effectué pour un écoulement globalement uniforme de tirant d'eau donné. Une exploration fine du champ de vitesses au tube de Pitot permet de définir la structure de l'écoulement et en particulier la répartition de débit entre les différentes parties de la section.

Les paramètres dont l'influence a été recherchée sont :

- le tirant d'eau,
- la forme des lits (trapézoïdaux ou rectangulaires),
- la largeur relative lit mineur – lit majeur,
- la rugosité relative des lits mineur et majeur,
- la pente du lit.

Le canal d'étude utilisé a une largeur de 3 m et une longueur de 60 m ce qui permet de garantir l'uniformité du régime d'écoulement.

Les caractéristiques du canal ont permis de représenter à l'échelle du 1/100, échelle la plus couramment adoptée pour les modèles fluviaux, un lit prismatique dont la géométrie correspond approximativement à cer-

taines portions endiguées du Rhône dans les retenues des aménagements réalisés par la Compagnie Nationale du Rhône.

Résultats des essais en régime uniforme

a) lits simples

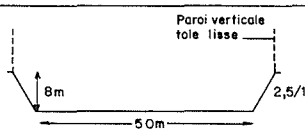
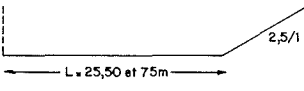
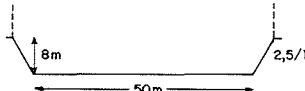
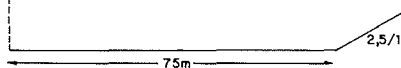

Les types de lits étudiés et les conditions des essais sont consignés dans le tableau 1. Deux exemples de configurations de champs de vitesses sont présentés sur la figure 1, correspondant à des cas de rugosité extrêmes.

La loi de perte de charge adoptée est celle de Strickler parce que la plus communément utilisée dans les calculs de remous et aussi parce que d'autres lois (Chézy, formule universelle) n'ont pas donné de résultats plus satisfaisants.

Pour les lits mineurs au-delà de la limite de débordement, et pour les lits majeurs, la frontière entre les futures parties de lits composés a été matérialisée par une tôle lisse peinte. Dans la recherche du coefficient de rugosité du lit, l'influence de cette paroi a été éliminée par application d'une loi de composition simple (Einstein).

A titre d'exemple, la figure 2 donne pour le lit trapézoïdal repéré "A" l'évolution du coefficient de Strickler en fonction du tirant d'eau pour divers états de surface des parois. Le coefficient de rugosité apparaît comme une fonction croissante du tirant d'eau jusqu'à la limite de débordement, puis il se stabilise ou décroît légèrement au-delà de cette limite. Ces résultats justifient l'habitude d'utiliser en crue le coefficient de Strickler

Tableau 1 – Essais en lits simples

Repère de l'essai	lit simple	Géométrie	nature des fonds	Rugosité	tirants d'eau	Pente du lit
A	mineur		tôle	barrettes écartement 10, 20, 40, 80 cm et	tous les mètres de 3 à 15 m	10^{-3}
B	majeur		tôle	barrettes écartement 10, 20, 40, 80 cm et	tous les mètres de 3 à 7 m	10^{-3}
C	mineur		ciment	lisse	tous les mètres de 3 à 14 m	$5 \cdot 10^{-4}$
D	majeur		ciment	lisse et avec boulons	tous les mètres de 3 à 7 m	$5 \cdot 10^{-4}$
E	mineur		ciment	lisse	tous les mètres de 3 à 11 m	$5 \cdot 10^{-4}$

PENTE	10^{-3}
Tirant d'eau	14 m
Largeur	50 m
Ecartement des barrettes	00
Vitesse moyenne	7,28 m/s
Débit jaugeage	8270 m ³ /s

Pente	10^{-3}
Tirant d'eau	14 m
Largeur	50 m
Ecartement des barrettes	10 cm
Vitesse moyenne	3,51 m/s
Débit jaugeage	3990 m ³ /s

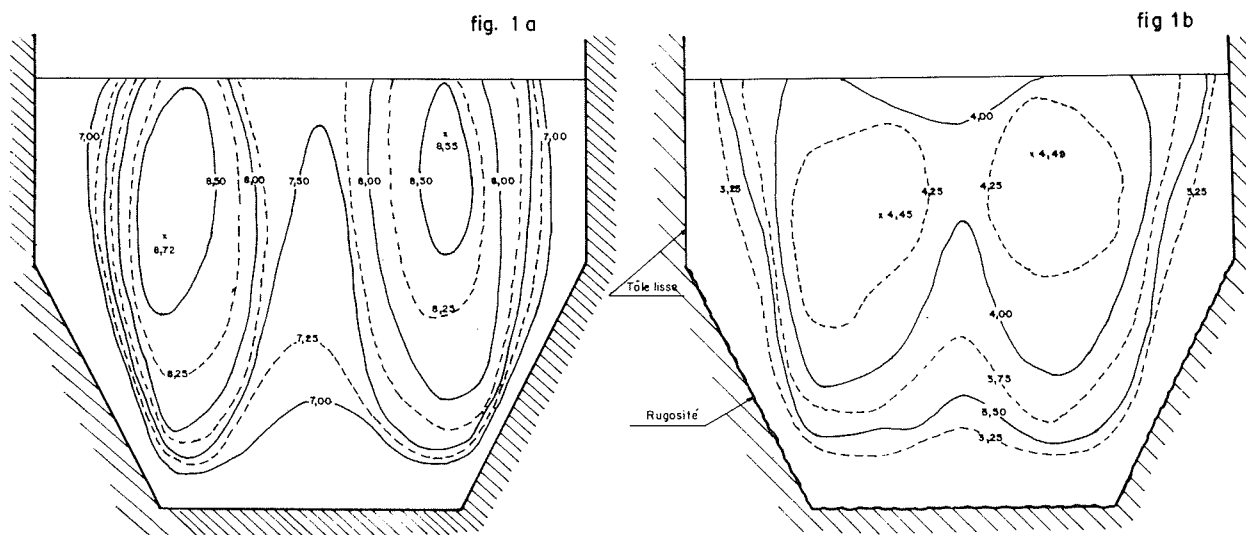


Figure 1 – Lit simple. Schéma A – Isovitesses $H = 14$ m (en m/s)

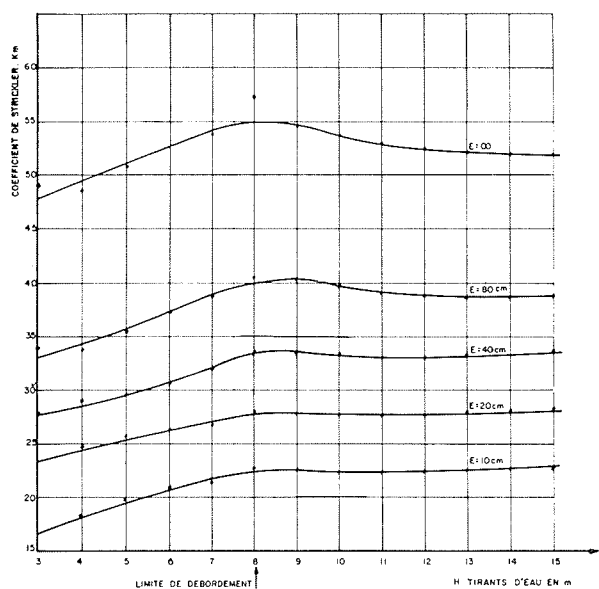


Figure 2 – Lit simple. Schéma A – Coefficient de Strickler en fonction de H pour différents écartements E des barrettes de rugosité.

mineur déterminé par une ligne d'eau à la limite de débordement.

b) lits composés

Les observations des écoulements en lits composés montrent le caractère essentiellement instable de ces écoulements. Des visualisations des champs de vitesses par des flotteurs ont mis en évidence l'existence de vitesses latérales fluctuantes essentiellement à la jonction lit-mineur – lit majeur.

Les écoulements des lits mineur et majeur apparaissent comme non permanents à une échelle de temps réduite, mais l'écoulement peut être considéré comme "globalement permanent" à une échelle de temps plus importante.

La nomenclature des essais réalisés au Laboratoire est donnée sur le tableau 2 qui fait apparaître la gamme des paramètres explorés (pente, géométrie, nature des parois, tirant d'eau).

Trois exemples de répartition de vitesses sont présentés sur les figures 3 à 5 :

Figure 3 : Essai TLa3 : lit mineur trapézoïdal lisse et lit majeur le plus rugueux de toute la série. Cette figure est à rapprocher de la figure n° 1a de l'écoulement en lit mineur seul dans les mêmes conditions de rugosité et de tirant d'eau. Le débit du lit mineur est passé de 8.270 à 6.650 m³/s du fait du lit majeur très rugueux ; le lit majeur a un effet de freinage très important sur l'écoulement. Les vitesses décroissent régulièrement de l'axe vers l'extérieur du lit.

Figure 4 : Essai TRc3 : lit mineur trapézoïdal très rugueux et lit majeur lisse ; le lit mineur simple correspondant est celui de la figure n° 1b. A l'opposé de l'exemple précédent, le lit majeur lisse a un effet d'entraînement : la vitesse moyenne mineure est passée de 3,51 à 3,63 m/s. On distingue trois collines de vitesses nettement individualisées : le lit mineur et les deux demi-lits majeurs ; les maxima des vitesses se trouvent en lit majeur.

Figure 5 : Essai CEd3 : lit mineur lisse rectangulaire et lit majeur lisse. La pente du lit est moitié de celle des exemples précédents. La présence du lit majeur lisse a entraîné une diminution du débit mineur par rap-

Repère de l'essai	Pente	Nature des fonds	Lit mineur		Lit majeur		tirants d'eau majeurs étudiés (m)	
			repère lit simple	rugosité	repère lit simple	1/2 largeur L(m)		rugosité
TL a 1	10^{-3}	tôle	A	lisse	B	25	barrettes E = 10 cm	tous les m de 1 à 7
TL a 2	10^{-3}	tôle	"	lisse	"	50	barrettes E = 10 cm	" " " " 1 à 7
TL a 3	10^{-3}	tôle	"	lisse	"	75	barrettes E = 10 cm	" " " " 1 à 7
TL b 1	10^{-3}	tôle	"	lisse	"	25	barrettes E = 40 cm	" " " " 1 à 7
TL b 2	10^{-3}	tôle	"	lisse	"	50	barrettes E = 40 cm	" " " " 1 à 7
TL b 3	10^{-3}	tôle	"	lisse	"	75	barrettes E = 40 cm	" " " " 1 à 7
TL C 1	10^{-3}	tôle	"	lisse	"	25	lisse	" " " " 1 à 7
TL C 2	10^{-3}	tôle	"	lisse	"	50	lisse	" " " " 1 à 7
TL C 3	10^{-3}	tôle	"	lisse	"	75	lisse	" " " " 1 à 7
TR C 1	10^{-3}	tôle	"	barrettes E = 10 cm	"	25	lisse	" " " " 1 à 7
TR C 2	10^{-3}	tôle	"	barrettes E = 10 cm	"	50	lisse	" " " " 1 à 7
TR C 3	10^{-3}	tôle	A	barrettes E = 10 cm	B	75	lisse	" " " " 1 à 7
CL a 3	$5 \cdot 10^{-4}$	ciment	C	lisse	D	75	lisse	7 m
CL d 3	$5 \cdot 10^{-4}$	ciment	C	lisse	D	75	boulons	3 et 7 m
CR a 3	$5 \cdot 10^{-4}$	ciment	E	lisse	D	75	lisse	3,5 et 7 m
CR a 3	$5 \cdot 10^{-4}$	ciment	E	lisse	D	75	boulons	3,5 et 7 m

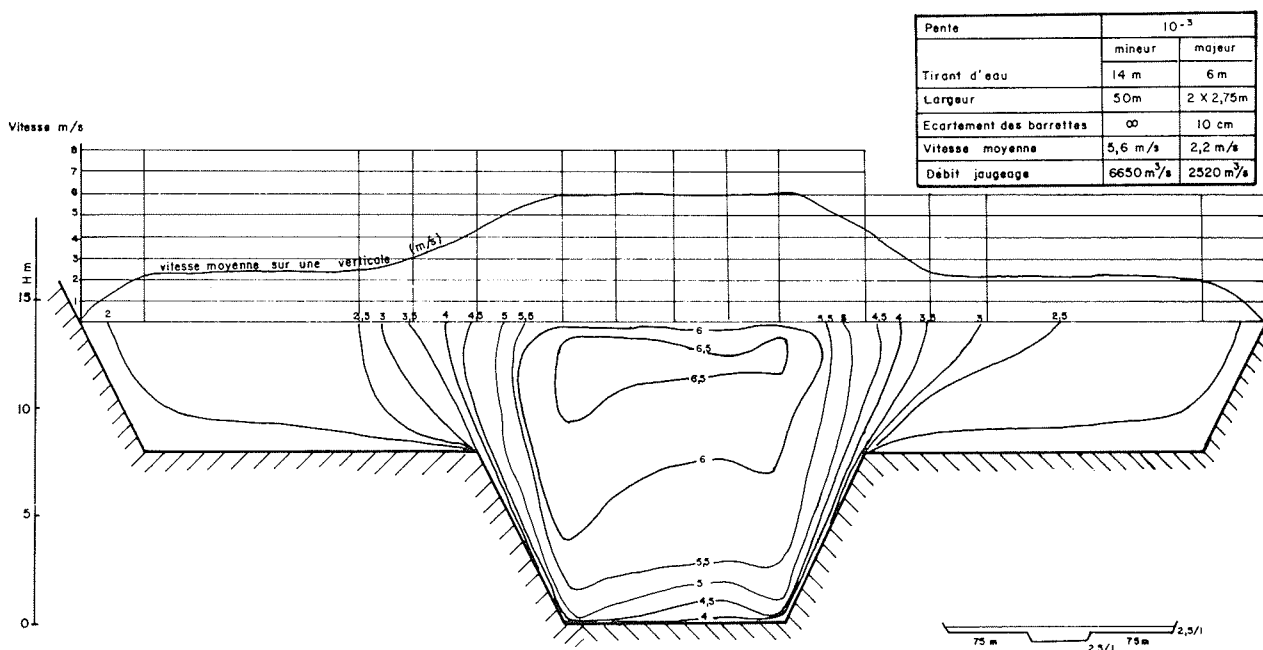


Figure 3 – Isovitesse. Essai TL a 3.

port au lit simple (1.550 au lieu de 1.675 m³/s. Les lignes isovitesse du lit majeur ont une orientation générale horizontale, c'est-à-dire que le profil vertical des vitesses se conserve approximativement dans la largeur du lit majeur.

Les trois exemples ci-dessus montrent l'extrême diversité des configurations d'écoulement en lit composé, ce

que la multiplicité des paramètres en jeu permet aisément de pressentir : pente du lit, géométries mineure et majeure, rugosités. Pour cette raison il n'a pas été cherché à caractériser quantitativement l'influence de tous ces paramètres avec un nombre d'essais aussi restreint (malgré trois années d'expérimentation), mais seulement de trouver des relations globales par la méthode statis-

Pente	10 ⁻³	
	mineur	majeur
Tirant d'eau	14 m	6 m
Largeur	50m	2 x 2,75m
Ecartement des barrettes	10cm	00
Vitesse moyenne	3,63 m/s	4,05 m/s
Débit jaugeage	4210 m ³ /s	4235 m ³ /s

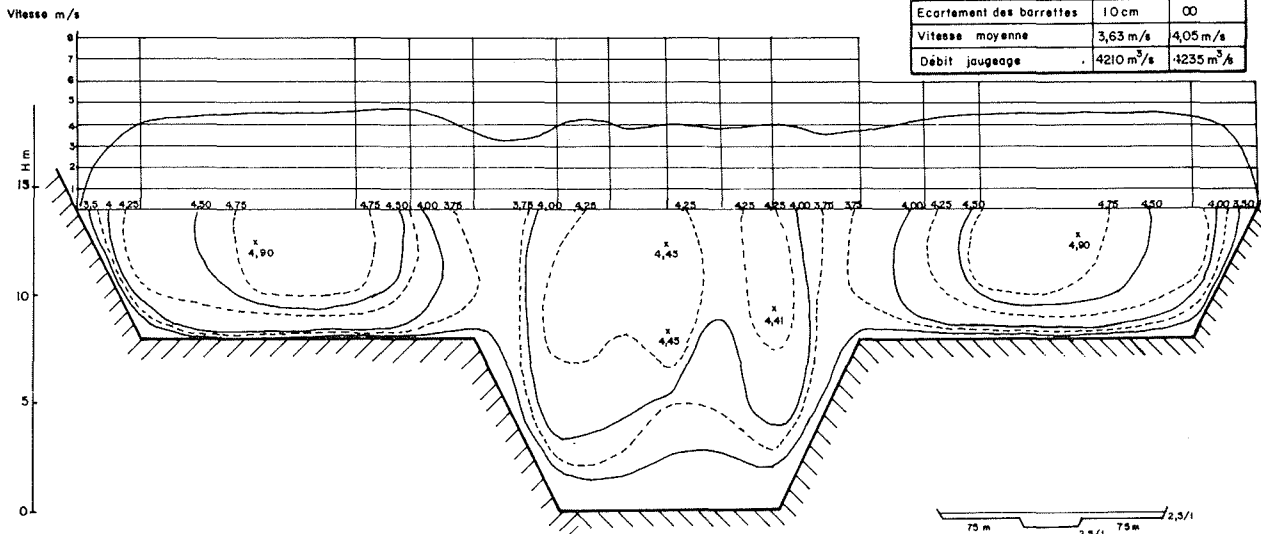


Figure 4 – Isovitesses. Essai TR c3.

Pente	5 · 10 ⁻⁴	
	mineur	majeur
Tirant d'eau	9 m	5 m
Longueur	50 m	2 x 75 m
Rugosité	lisse	lisse
Vitesse moyenne	3,44 m/s	2,92 m/s
Débit jaugeage	1550 m ³ /s	2375 m ³ /s

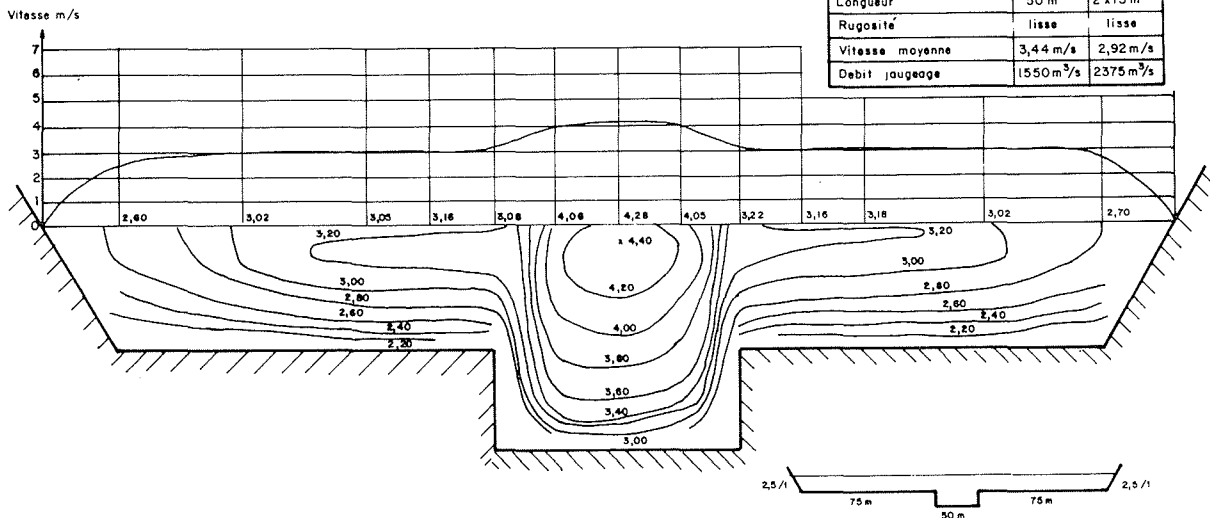


Figure 5 – Isovitesses. Essai CR d3

tique : corrélations entre des rapports de grandeurs simples (débits, rugosités).

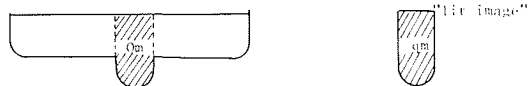
Malgré leur diversité, ces divers écoulements présentent tous cependant une frontière nettement marquée entre lit mineur et lit majeur, ce qui justifie la séparation classique entre ces parties du lit au moyen de parois verticales fictives.

Loi expérimentale proposée

De nombreuses corrélations entre les divers paramètres ont été essayées ; la plus séduisante relie le rapport du débit en lit mineur composé Q_m au débit dans le lit simple correspondant q_m (lit "image"), au rapport

des rugosités mineur K_m et majeur K_M déterminées par l'étalonnage en lit simple :

$$\frac{Q_m}{q_m} = f \left(\frac{K_m}{K_M} \right)$$



En se limitant aux submersions notables, c'est-à-dire aux tirants d'eau majeurs supérieurs ou égaux à 3 m, la régression entre $\text{Log} (Q_m/q_m)$ et $\text{Log} (K_m/K_M)$

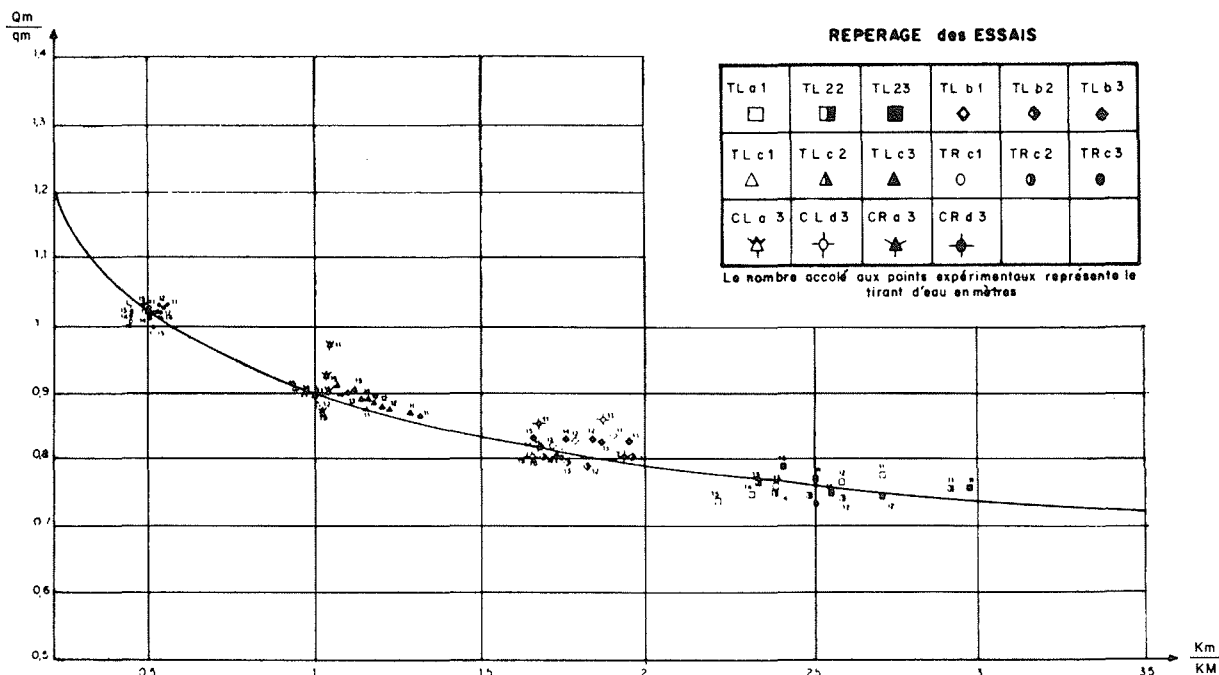


Figure 6 – Rapport du débit mineur en lit composé au débit en lit simple.

conduit à un coefficient de corrélation de 0,984, d'où la formule monome :

$$\frac{Q_m}{q_m} = 0,901 \left(\frac{K_m}{K_M} \right)^{-0,1802} \quad (1)$$

Dans la suite, nous adopterons :

$$\frac{Q_m}{q_m} = A_0 \approx 0,9 \left(\frac{K_m}{K_M} \right)^{-1/6}$$

La figure 6 montre l'excellent groupement des points expérimentaux en fonction d'un seul paramètre K_m/K_M . L'influence des autres paramètres apparaît d'un poids négligeable, dans la gamme étudiée :

- pente du lit de 10^{-3} et 5.10^{-4} ,
- tirants d'eau majeurs entre 3 et 7 m,
- demi-largeur du lit majeur comprise entre 25 et 75 m,
- lit mineur rectangulaire et trapézoïdal.

Extension de la limite de validité de la loi expérimentale pour les faibles submersions

A la limite, lorsque le lit majeur est d'importance faible vis à vis du lit mineur, soit que sa largeur soit très faible, soit que sa profondeur soit proche de zéro, il est impératif de retrouver les résultats du lit mineur simple, c'est-à-dire que le rapport Q_m/q_m doit tendre vers l'unité quel que soit le rapport des rugosités.

Soit un paramètre géométrique r caractérisant le débordement (par exemple tirants d'eau, périmètres mouillés, sections mouillées, rayons hydrauliques, ...) tel que $r = 0$ en l'absence d'écoulement en lit majeur et $r = \rho$

au point où la loi (1) commence à être applicable, soit :

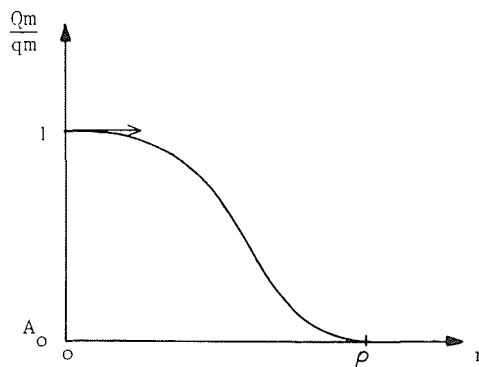
pour $r = 0$ $\frac{Q_m}{q_m} = 1$

pour $r = \rho$ $\frac{Q_m}{q_m} = A_0 \approx 0,9 \left(\frac{K_m}{K_M} \right)^{-1/6}$

Une loi de type cosinus répondant à ces conditions a pour expression :

$$A = \frac{Q_m}{q_m} = \frac{1}{2} \left\{ [1 - A_0] \cos \frac{\pi r}{\rho} + [1 + A_0] \right\}$$

pour $0 \leq r \leq \rho$



Cette loi a été utilisée deux fois successivement pour rendre compte de la transition en hauteur d'une part, en largeur d'autre part.

- Transition en hauteur : le paramètre r adopté a été le rapport des rayons majeur et mineur $r = R_M/R_m$

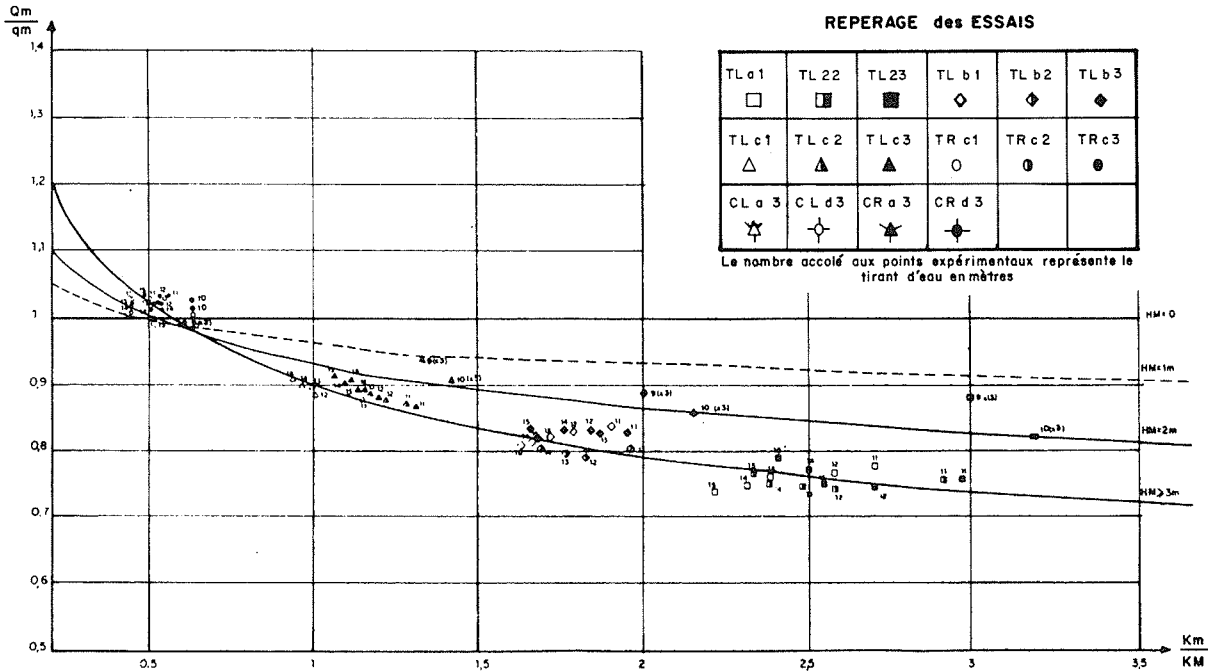


Figure 7 – Extension du domaine de validité aux faibles submersions.

et sa valeur limite ρ a été prise égale à 0,3 pour rendre compte aussi fidèlement que possible des expériences.

– Transition en largeur : $r = P_M/P_m$ rapport des périmètres mouillés, la valeur limite étant $\rho = 1$.

Une vérification de la validité des lois de raccordement ci-dessus n'a pu être tentée que pour la transition en hauteur. En effet, pour les très faibles tirants d'eau majeurs, on possède des résultats expérimentaux permettant d'atteindre q_m , Q_m et K_m . Par contre K_M coefficient de rugosité du lit simple schéma B (demi-lit majeur seul) est inconnu puisqu'il n'a pas été possible d'étudier des écoulements en lit simple pour des tirants d'eau très faibles. Par extrapolation des courbes $K_M = f(H_M)$ on a pu déterminer les valeurs de K_M correspondant à $H_M = 1$ et 2m, d'où les points expérimentaux portés sur la figure 7.

Ces quelques points ne sont pas en contradiction avec la loi de raccordement adoptée pour traduire la transition en hauteur.

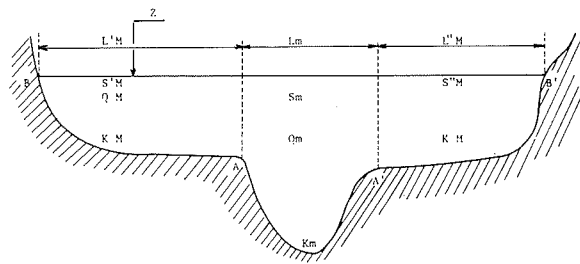
Aucun résultat expérimental n'est malheureusement disponible pour vérifier le raccordement adopté en largeur.

Interprétation des résultats en régime uniforme

Notations

La figure représente une coupe en travers d'un lit naturel.

L'indice "m" caractérise le lit mineur et l'indice "M" le lit majeur. De plus, l'indice "im" caractérise le lit simple homologue du lit mineur en lits composés, appelé aussi "lit image".



- Q_m, Q_M débits transitant par les lits mineur et majeur
- Q débit total du lit actif ($Q_m + Q_M$)
- L_m, L_M largeurs au miroir du lit mineur et du lit majeur ($L'_m + L''_m$)
- S_m, S_M surfaces mouillées mineur et majeur ($S'_m + S''_m$)
- S aire du lit actif = $S_m + S_M$
- K_m, K_M coefficients de Strickler des lits mineur et majeur
- J_m, J_M pente de la ligne de charge dans le lit mineur et dans le lit majeur
- P_m, P_M périmètre mouillé du lit mineur (AA') et dans le lit majeur ($A'B' + AB$)
- P périmètre mouillé du lit actif ($P_m + P_M$)
- R_m, R_M rayons hydrauliques du lit mineur (S_m/P_m) et du lit majeur (S_M/P_M)
- R rayon hydraulique du lit actif (S/P)
- V vitesse moyenne de l'écoulement actif (Q/S)
- D débitance

i	pente du fond $\left(-\frac{dZ_0(x)}{dx}\right)$
Z	cote de la surface libre
Y	tirant d'eau maximal
x	abscisse le long de la rivière orientée de l'amont vers l'aval
ρ	masse volumique de l'eau
g	accélération de la pesanteur
β	le coefficient de quantité de mouvement ou coefficient de Boussinesq

$$\beta = \frac{\iint_{\Sigma} v^2(M) ds}{v^2 \Sigma}$$

Formulation "DEBORD"

L'hypothèse fondamentale consistant à supposer que la surface libre est horizontale sur un profil en travers perpendiculaire à l'axe de l'écoulement, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de dénivellée entre lit mineur et lit majeur actif, n'a pas été infirmée par des mesures de l'étude expérimentale.

Les vitesses transversales sont suffisamment faibles pour que l'on puisse considérer les directions des vitesses parallèles à l'axe du lit.

En ajoutant les équations dynamiques relatives au lit mineur et au lit majeur pour des écoulements globalement uniformes, on obtient :

$$\frac{dZ}{dx} = -\frac{J_m S_m + J_M S_M}{S} \quad (2)$$

avec

$$J_m = \frac{Q_m^2}{K_m^2 S_m^2 R_m^{4/3}} \quad \text{et} \quad J_M = \frac{Q_M^2}{K_M^2 S_M^2 R_M^{4/3}}$$

l'équation de continuité est :

$$Q_m + Q_M = Q \quad (3)$$

Les deux équations obtenues sont à trois inconnues Z , Q_m et Q_M .

Pour fermer le problème il faut donc y adjoindre une troisième équation, la relation expérimentale (1). Mais cette dernière introduit le débit du lit image q_m qu'il faut définir. Pour cela écrivons la relation dynamique dans le lit image qui, dans le cas des écoulements uniformes se réduit à :

$$\frac{dZ}{dx} = -\frac{q_m^2}{K_m^2 S_m R_m^{4/3}} = -\frac{J_m}{A^2} \quad (4)$$

En rapprochant les expressions ci-dessus et en introduisant la débitance de l'écoulement global $D_e \left(D_e = Q / \sqrt{-\frac{dZ}{dx}} \right)$, on en déduit le coefficient de

répartition de débits η entre les lits mineur et majeur :

$$D_e = K_m A S_m R_m^{2/3} + K_M \sqrt{S_M^2 + S_m S_M (1-A^2)} R_M^{2/3}$$

$$\eta = \frac{Q_m}{Q_M} = \frac{K_m}{K_M} \frac{A S_m}{\sqrt{S_M^2 + S_m S_M (1-A^2)}} \left(\frac{R_m}{R_M} \right)^{2/3} \quad (5)$$

Ces expressions constituent la formulation "DEBORD".

En faisant $A = 1$ dans les expressions ci-dessus on retrouve la formulation classique des écoulements en lits composés, à savoir :

$$\left. \begin{aligned} D_e &= K_m S_m R_m^{2/3} + K_M S_M R_M^{2/3} \\ \eta &= \frac{Q_m}{Q_M} = \frac{K_m}{K_M} \cdot \frac{S_m}{S_M} \cdot \left(\frac{R_m}{R_M} \right)^{2/3} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

L'expression de la débitance globale en lit composé montre que les débitances des écoulements élémentaires sont modifiées : celle du lit mineur est multipliée par le coefficient A , celle du lit majeur par le coefficient $1 + S_m/S_M (1 - A^2)$.

Pour les essais réalisés en canal il a été procédé à la comparaison entre les valeurs de η résultant :

- du rapport des débits jaugés Q_m et Q_M
- de l'application de l'expression (5), formulation "DEBORD"
- de l'application de l'expression (6), formulation classique.

Les hypothèses DEBORD conduisent à une répartition de débit plus proche de celle mesurée que l'hypothèse classique. L'écart relatif entre η_{DEBORD} et $\eta_{\text{mesuré}}$ ne dépasse que rarement 20 % alors que l'écart relatif entre $\eta_{\text{classique}}$ et $\eta_{\text{mesuré}}$ est toujours supérieur à 40 %, sauf quand A est proche de 1, cas où les expressions (5) et (6) se rejoignent.

D'autre part, en faisant intervenir η dans le coefficient de quantité de mouvement β , son expression devient :

$$\beta = \frac{\beta_m \frac{Q_m^2}{S_m} + \beta_M \frac{Q_M^2}{S_M}}{\frac{Q^2}{S}} \quad (7)$$

$$\beta = \left[\eta^2 \frac{\beta_m}{S_m} + \frac{\beta_M}{S_M} \right] \frac{S}{(1+\eta)^2} \quad (8)$$

Un calcul similaire permet de définir un coefficient de Coriolis :

$$\alpha = \left(\eta^3 \frac{\beta_m}{S_m^2} + \frac{\beta_M}{S_M^2} \right) \frac{S^2}{(1+\eta)^3} \quad (9)$$

Les résultats expérimentaux ont permis de calculer β_m , β_M puis α et β au moyen des expressions (8) et (9). Il a été constaté [4] que les valeurs de β sont plus proches de l'unité que celles de α . Enfin, en prenant $\beta_m = \beta_M = 1$ c'est-à-dire en supposant que chacun des écoulements, mineur et majeur, peut être carac-

térisé par une vitesse moyenne, on a calculé la valeur approchée β^* de β définie par :

$$\beta^* = \left[\eta^2 \frac{1}{S_m} + \frac{1}{S_M} \right] \frac{S}{(1 + \eta)^2} \quad (10)$$

et on a constaté que cette approximation n'induisait pas d'erreur supérieure à 10 % sur la valeur de β . Ceci justifie donc le fait de caractériser chacun des écoulements en lit mineur et majeur par une vitesse moyenne.

Cette expression β^* sera utilisée dans la suite de l'étude pour calculer β dans la formulation des lignes d'eau.

Formulation en régime graduellement varié

Hypothèses du calcul et équations

Les hypothèses de base sont issues de l'étude en régime uniforme, complétées par celle du régime graduellement varié. Ce sont :

- l'horizontalité de la surface libre sur un profil en travers ;
- l'homogénéité des vitesses d'écoulement dans le lit mineur d'une part et dans le lit majeur d'autre part, d'où des coefficients de Boussinesq β_m et β_M égaux à l'unité ;
- l'écoulement est tangent au régime uniforme ; en particulier la relation expérimentale (1) est applicable.

Les trois inconnues du problème Z , Q_m , Q_M sont solutions du système d'équations constitué par :

- l'équation dynamique dans l'ensemble lit mineur plus lit majeur :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q_m^2}{S_m} + \frac{Q_M^2}{S_M} \right) + g S \frac{dZ}{dx} + g (S_m J_m + S_M J_M) = 0 \quad (11)$$

- l'équation dynamique dans le lit "image" qui, compte tenu de la relation expérimentale (1) s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{A^2} \frac{Q_m^2}{S_m} \right) + g S_m \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{J_m}{A^2} = 0 \quad (12)$$

- l'équation de continuité :

$$Q_m + Q_M = Q \quad (13)$$

Formulation simplifiée "DEBORD"

La résolution des trois équations ci-dessus étant relativement complexe, il a été préféré une formulation simplifiée qui est relative à l'écoulement global de la rivière et qui reprend le principe exposé plus haut p. 28 (débitance équivalente, répartition de débit et coefficient de quantité de mouvement).

L'écoulement est régi par l'équation :

$$\frac{1}{S_g} \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta \frac{Q^2}{S} \right) + \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{Q^2}{D_e^2} = 0 \quad (14)$$

où

$$\begin{cases} A = A_0 = 0,9 \left(\frac{K_m}{K_M} \right)^{-1/6} & \text{pour } r = \frac{R_M}{R_m} > 0,3 \\ A = \frac{1 - A_0}{2} \cos \frac{\pi r}{0,3} + \frac{1 + A_0}{2} & \text{pour } r = \frac{R_M}{R_m} \in [0,0,3] \end{cases}$$

$$\eta = \frac{Q_m}{Q_M} = \frac{K_m}{K_M} \frac{A S_m}{\sqrt{S_M^2 + S_m S_M (1 - A^2)}} \left(\frac{R_m}{R_M} \right)^{2/3}$$

$$\beta = \left(\frac{\eta^2}{S_m} + \frac{1}{S_M} \right) \frac{S}{(1 + \eta)^2}$$

$$D_e = K_m A S_m R_m^{2/3} + K_M \sqrt{S_M^2 + S_m S_M (1 - A^2)} R_M^{2/3}$$

Un code de calcul a été bâti à partir d'une discrétisation de l'équation (14) ; il porte le nom "DEBORD".

Il a été utilisé pour déterminer des lignes d'eau de crue dans une rivière naturelle pour laquelle les données nature étaient abondantes (lignes d'eau avant et après débordement avec les débits correspondants). L'étalonnage a été réalisé en deux temps :

- lit mineur jusqu'à la limite de débordement,
- lit majeur en supposant que le coefficient de rugosité mineur ne variait pas.

On a pu remarquer que pour plusieurs hauteurs de submersion le coefficient de rugosité du lit majeur ne variait que très faiblement et n'était donc fonction que de la nature du lit et pas de la formulation adoptée. Les mêmes calculs effectués avec la formulation classique ($A = 1$) conduisent à l'adoption d'un coefficient de rugosité majeur fonction de la cote pour pouvoir retrouver les lignes d'eau nature.

Conclusion

L'expérimentation en lit prismatique d'écoulements globalement uniformes et l'analyse des équations de l'écoulement ont conduit à une loi de répartition de débit s'écoulant dans les lits mineur et majeur en lits composés :

$$\eta = \frac{Q_m}{Q_M} = \frac{K_m}{K_M} \frac{A S_m}{\sqrt{S_M^2 + S_m S_M (1 - A^2)}} \left(\frac{R_m}{R_M} \right)^{2/3}$$

un coefficient de quantité de mouvement :

$$\beta = \left(\frac{\eta^2}{S_m} + \frac{1}{S_M} \right) \frac{S}{(1 + \eta)^2}$$

et une débitance équivalente :

$$D_e = K_m A S_m R_m^{2/3} + K_M \sqrt{S_M^2 + S_m S_M (1 - A^2)} R_M^{2/3}$$

où le coefficient A représente la loi expérimentale traduisant la variation du débit en lit mineur en raison de la présence du lit majeur :

$$A = 0,9 \left(\frac{K_m}{K_M} \right)^{-1/6}$$

Cette loi a été établie pour une certaine gamme des paramètres géométriques, les raccordements au lit mineur seul étant assurés par une loi en cosinus.

Ces lois extrapolées aux écoulements graduellement variés (tangents à l'écoulement uniforme) ont permis de retrouver des lignes d'eau de crue naturelles avec une excellente précision.

Le cas particulier $A = 1$ dans cette formulation redonne les hypothèses classiques des lits composés. La valeur de A différente de l'unité rend compte de l'interaction entre ces deux écoulements à vitesses différentes : les essais en canal ont permis de mettre en évidence que cette interaction ne se limitait pas à un entraînement simple, mais se caractérisait par des échanges fluctuants (macroturbulence) entre lits mineur et majeur.

Références bibliographiques

- [1] NICOLLET G. – *Ecoulements permanents dans les lits composés. Résultats expérimentaux.* Rapports L.N.H. Références HyF1/551 du 3/12/1969 ; HyF1/619 du 12/11/1970 ; HC/043/684 du 25/11/1971 ; HC/043/063 du 18/12/1972 ; C43/73/54 du 18/12/1973 ; C43/74/67 du 10/12/1974.
- [2] UNG et FILALI – *Ecoulement permanent en régime uniforme dans un canal à lits composés.* Rapport L.N.H. Référence HC/043/658 de mai 1971.
- [3] UAN M. – *Etablissement des équations régissant les équipements non permanents à surface libre avec champ d'inondation.* Rapport L.N.H. Référence C43/75/66 de décembre 1975.
- [4] UAN M. et COCHONNEAU G. – *Contribution à l'étude de la répartition de débit entre les lits mineur et majeur d'une rivière.* Rapport L.N.H. Référence E43/76/54 d'octobre 1976.