Vagues de grande amplitude et fonction de courant

Representation of high-amplitude waves by stream function

Gilles Susbielles et Bernard Molin

Institut Français du Pétrole

Jusqu'à l'apparition d'ordinateurs capables d'effectuer un grand nombre d'opérations en un temps très court, la cinématique de grandes vagues ne pouvait être calculée qu'à partir des développements de Stokes lorsque la profondeur était suffisamment grande (développements poussés au 5ème ordre par L. Skjelbreia, 1967) ou à partir de la théorie de la houle cnoïdale, en eau peu profonde (J. Wehansen, 1960) et, à la limite, à partir des modèles d'onde solitaire (E. Laitone, 1960). Il était alors impossible d'atteindre la cinématique des vagues au voisinage du déferlement en faisant croître d'une manière continue la hauteur de vague.

Le développement des moyens de calcul a rendu possible la résolution du problème – l'obtention des vitesses et accélérations d'une houle périodique avec potentiel des vitesses – des conditions aux limites étant satisfaites exactement (la condition de perméabilité du fond et les deux conditions sur la surface libre : la condition cinématique et la condition dynamique ou condition de Bernoulli), en mettant en œuvre une série de termes atteignant un ordre très élevé.

Il faut mentionner ici, les travaux de :

- R.G. Dean sur la représentation de vagues à l'aide de la fonction de courant (1968) ;
- L. Schwartz sur l'extension des développements de Stokes à l'ordre N (1974) ;
- M. Longuet-Higgins sur les vagues au voisinage immédiat de déferlement (1977) bien que les équations de base aient été posées depuis fort longtemps.

Les deux premiers modèles mathématiques ont l'avantage de donner des expressions correctes des vitesses et accélérations des particules d'eau quelle que soit la profondeur. Elles remplacent ainsi tous les développements d'ordre moins élevé.

A priori, la représentation des vagues à l'aide de la fonction de courant (obtenue par R.G. Dean) correspond à un développement numérique dont les coefficients n'ont jamais été obtenus analytiquement.

Le but de cet article est de montrer, en comparant les

travaux de L. Schwartz et de R.G. Dean, que ces coefficients ont des expressions analytiques relativement faciles à obtenir en profondeur infinie.

Dans un souci de clarté, les deux théories seront brièvement présentées.

Développement de Stokes à l'ordre N

Le problème consiste à trouver la fonction potentiel des vitesses telle que :

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad \text{dans le fluide}$$

$$\partial^2 \Phi / \partial z^2 = 0 \quad \text{sur un fond horizontal}$$

$$(u - c) \frac{\partial z}{\partial x} + w = 0 \quad \text{à la surface libre. Ceci est la}$$

condition cinématique, supposant le profil indéformable, se déplaçant à la célérité c , et avec :

$$u = \partial \Phi / \partial x \quad \text{et} \quad w = \partial \Phi / \partial z$$

$$gz + \frac{1}{2} (\Delta \Phi)^2 + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad \text{à la surface libre qui est}$$

la condition de Bernoulli, indiquant que la pression est constante (ou nulle).

L. Schwartz résout le problème par une transformation qui remplace le domaine fluide (limité par la surface libre, le fond et deux lignes verticales séparées par une longueur d'onde – ou une période) par une couronne dont le cercle intérieur est réduit à son centre en profondeur infinie (Fig. 1).

Le profil de la houle devient le cercle extérieur de la couronne et les coefficients permettant d'ajuster la transformation sont calculés à partir des valeurs des paramètres complémentaires (hauteur de vague, longueur d'onde et profondeur d'eau).

L. Schwartz astreint la fonction de courant ψ à prendre la valeur 0 à la surface libre et la valeur $-Q$ sur le fond (avec $Q = Ld/T$ soit $d = Q/e$).

Fig. 1

La condition de Bernoulli peut alors être écrite sous la forme :

$$q\bar{q} + 2z = K \quad \text{avec}$$

$$q = u - iw \quad \text{et} \quad \bar{q} = u + iw$$

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial z} \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

La transformation changeant le domaine fluide en une couronne est donnée par :

$$z(Z) = i [\log Z + a_1 (Z - r_0^2/Z) + \dots + a_j/j (Z^j - r_0^{2j}/Z^j) + \dots] \\ Z = r \exp i\chi.$$

avec les conditions : $\psi = -cd$ sur le fond et $\psi = 0$ à la surface libre, entraînant : $r_0 = \exp(-d)$ et $r = 1$. c ayant été divisé par $(gL/2\pi)^{1/2}$ et d (ainsi que toutes les longueurs) par $L/2\pi$.

La solution du problème, dans le plan complexe, correspond à un simple tourbillon tel que :

$$W = \Phi + i\psi = ic \log Z$$

La vitesse est obtenue à partir de :

$$q = \frac{dW}{dz} = \frac{dW/dZ}{dz/dZ} = \frac{c}{1 + a_1 (Z + r_0^2/Z) + \dots + a_j/j (Z^j + r_0^{2j}/Z^j) + \dots}$$

Les conditions à la surface libre s'en déduisent aisément :

$$c^2 + 2 \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{a_{\ell} \delta_{\ell} f_{\ell}}{\ell} = K f_0$$

$$\sum_{\ell} \frac{a_{\ell} \delta_{\ell}}{\ell} (f_{\ell-j} + f_{j+\ell}) = K f_j \quad (j = 1, 2, \dots)$$

$$\text{avec} \quad f_0 = 1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} a_{\ell}^2 \sigma_{2\ell} \\ f_1 = a_1 \sigma_1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} a_{\ell} a_{\ell+1} \sigma_{2\ell+1}$$

$$f_i = a_i \sigma_i + \sum_{\ell=1}^{\infty} a_{\ell} a_{\ell+1} \sigma_{2\ell+i} + \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^{i-1} a_{\ell} a_{i-\ell} (\sigma_{\ell} - \delta_{i-\ell}) \quad (i = 2, 3, \dots)$$

$$\text{et} \quad \sigma_i = 1 + r_0^{2i} \quad \delta_i = 1 - r_0^{2i} \quad i \geq 1$$

Le développement de a , f et c^2 en fonction d'un même paramètre permet de résoudre ce système apparemment compliqué, par approximations successives.

L'introduction de la hauteur de vague

$$(z(0) - z(\pi)) = 2h = 2\pi H/L$$

permet d'exprimer tous les coefficients a et les grandeurs f et c^2 en fonction de h (ou l'inverse).

La résolution est considérablement simplifiée en profondeur infinie car $r_0 = 0$.

Représentation des vagues à l'aide de la fonction de courant

Le problème à résoudre est exactement le même que celui posé au paragraphe précédent mais c'est la fonction de courant qui intervient et non le potentiel des vitesses.

Ceci signifie que :

$$\nabla^2 \psi = 0 \quad \text{dans tout le fluide} \\ \partial \psi / \partial x = 0 \quad \text{sur le fond}$$

$$(u - c) \frac{\partial z}{\partial x} + w = 0 \quad \text{condition cinématique}$$

$$gz + \frac{1}{2} (u^2 + w^2) + \partial \Phi / \partial t = 0$$

avec : $\partial \Phi / \partial t = c \partial \Phi / \partial x = cu$ (en supposant que le profil se déplace — sans déformation — à la vitesse c)

entraînant :

$$gz + \frac{1}{2} [(u - c)^2 + w^2] - c^2/2 = 0$$

La fonction de courant ψ s'exprime à partir de :

$$\psi = \frac{L}{T} z - \sum_{p=1}^N X(p) \frac{Sh k p (z + d)}{Sh k p d} \cos p(kx + \omega t)$$

Cette expression de ψ satisfait toutes les conditions aux limites (sauf la condition de Bernoulli) quelles que soient les valeurs des coefficients X .

Il faut donc ajuster les valeurs de X pour que la condition de Bernoulli soit remplie. La méthode des moindres carrés peut être utilisée en tenant compte de la hauteur de la vague et de sa période

$$z(0) - z(\pi) = H$$

Comme une vague est définie par sa hauteur, sa période et la profondeur d'eau (le fond étant supposé horizontal), la longueur d'onde L sera l'une des inconnues, ainsi que la valeur de ψ sur le profil. On résout en posant $t = 0$.

La méthode appliquée est la suivante :

L'intervalle $0 - 180^\circ$ (ou $0-360$) — à partir de $\theta = kx$ — est divisé en $(M - 1)$ intervalles. On donne aux X des valeurs de départ X_0 ainsi qu'à la longueur d'onde L (on peut prendre au départ L_0 donné par la formule d'Airy). On calcule $z(0)$ et $z(\pi)$ tels que $z(0) - z(\pi) = H$ et tels que $\psi(0) = \psi(\pi)$ puisque ψ est constant sur tout le profil.

On en déduit la valeur de ψ sur le profil. On fait alors varier la phase de 0 à π , ce qui permet d'obtenir 1 à 1 tous les points du profil puisqu'ils sont donnés par la résolution de l'équation implicite de z , $\psi = c^{\text{ste}}$. Ensuite, tous les z_i étant connus, il faut calculer u et w en chaque point (aucune difficulté) et les valeurs de Q_i :

$$Q_i = gz_i + \frac{1}{2} [(u_i - c)^2 + w_i^2]$$

et minimiser l'expression $E = [Q_i - Q_{\text{moyen}}]^2$ où :

$$Q_{\text{moyen}} = \sum_{i=1}^M \frac{Q_i}{M}$$

Il est à noter — ceci est très important — que R.G. Dean a appliqué la condition supplémentaire $\int z dx = 0$ ce qui signifie que le niveau moyen du profil est le niveau de l'eau au repos.

Par contre, il n'a pas appliqué la condition $\psi = 0$ sur la surface libre et a laissé ψ prendre une valeur quelconque sur le profil, pourvu qu'elle soit la même en tous points.

Les conséquences de cette situation seront examinées car la fonction E est fonction des variables X mais aussi de ψ et de L .

Comparaison des deux méthodes

Ces deux méthodes peuvent être employées pour traiter le même problème mais les résultats obtenus ne seront comparables que si les conditions aux limites sont les mêmes, en particulier $\psi = 0$ sur la surface libre. En conséquence, il suffit d'inverser la transformation appliquée par L. Schwartz pour revenir du domaine circulaire au domaine réel (limité à une période).

Inversion de la transformation $z(Z)$

Cette transformation est donnée par :

$$z(Z) = i [\log Z + a_1 (Z - r_0^2/Z) + a_2/2 (Z^2 - r_0^4/Z^2) + \dots +]$$

dans laquelle $r_0 = \exp(-d)$

Comme L. Schwartz, nous supposons qu'il existe un paramètre de perturbation ϵ tel que a , soit de l'ordre de ϵ , a_2 de l'ordre de ϵ^2 , etc.

Inversement, on cherche à obtenir l'expression de Z à partir du développement suivant où b_1 est de l'ordre de ϵ , b_2 de l'ordre de ϵ^2 .

$$Z = \exp(-iz + b_1 A_1 + b_2 A_2 + \dots + b_n A_n + \dots)$$

$$\begin{aligned} \text{avec } A_1 &= \exp(-iz) - r_0^2 \exp(iz) \\ A_2 &= \exp(-2iz) - r_0^4 \exp(2iz) \\ A_n &= \exp(-niz) - r_0^{2n} \exp(niz) \end{aligned}$$

Les expressions conjuguées sont définies à partir de celles qui sont écrites ci-dessus :

$$\begin{aligned} \bar{A}_1 &= \exp(-iz) + r_0^2 \exp(iz) \\ \bar{A}_2 &= \exp(-2iz) + r_0^4 \exp(2iz) \end{aligned}$$

Les produits $A_i A_j$ et $A_i \bar{A}_j$

En formant A^2 , et $A_1 A_2$, on remarque que :

$$\begin{aligned} A_1^2 &= \bar{A}_2 - 2r_0^2 \\ A_1 A_2 &= \bar{A}_3 - r_0^2 \bar{A}_1 \end{aligned}$$

Lorsque la profondeur tend vers l'infini, la contribution des termes en r_0^2 tend à s'annuler. C'est pourquoi :

$$A_1^2 = \bar{A}_2 \quad \text{et} \quad A_1 A_2 = \bar{A}_3$$

On obtient également que :

$$A_1 \bar{A}_1 = A_2 \quad \text{et} \quad A_1^3 = A_3$$

Plus généralement :

$$A_{p_1} A_{p_2} \dots A_{p_n} = A_{p_1+p_2+\dots+p_n} \quad \text{si } n \text{ est impair}$$

$$A_{p_1} A_{p_2} \dots A_{p_n} = \bar{A}_{p_1+p_2+\dots+p_n} \quad \text{si } n \text{ est pair.}$$

De même :

$$\begin{aligned} \bar{A}_{p_1} A_{p_2} \dots A_{p_n} &= A_{p_1+p_2+\dots+p_n} \quad \text{si } n \text{ est pair} \\ &= \bar{A}_{p_1+p_2+\dots+p_n} \quad \text{si } n \text{ est impair.} \end{aligned}$$

Résolution dans le cas de la profondeur infinie

Il faut maintenant calculer tous les coefficients b_1 en fonction des coefficients a_1 . Ceci est obtenu en remplaçant, successivement, Z dans le développement de $z(Z)$, puis Z^2 , Z^3 ... et en identifiant

$$\begin{aligned} 0 &= b_q + \text{terme d'ordre } q \text{ de } [a_1 (Z - r_0^2/Z) + \\ &\quad + \dots + a_{p/p} (Z^p - r_0^{2p}/Z^p)] \end{aligned}$$

avec :

$$Z = \exp[-iz + b_1 A_1 + \dots + b_{q-1} A_{q-1} + \dots]$$

Ceci est développé sous la forme :

$$\begin{aligned} Z &= \exp(-iz) \left[1 + (b_1 A_1 + \dots + b_{q-1} A_{q-1} + \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} (b_1 A_1 + \dots + b_{q-1} A_{q-1})^2 + \dots + \\ &\quad \left. + \frac{1}{p!} (b_1 A_1 + \dots + b_{q-1} A_{q-1})^p \right] \\ r_0^2/Z &= r_0^2 \exp(iz) \left[1 - (b_1 A_1 + \dots + b_{q-1} A_{q-1}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (b_1 A_1 + \dots + b_{q-1} A_{q-1})^2 + \dots \right] \end{aligned}$$

$Z - r_0^2/Z$ et $Z^2 - r_0^4/Z^2$ sont fonctions de A_p et $\bar{A}_p$.

A partir du développement de :

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^p = \sum_{p_1+p_2+\dots+p_n=p} \frac{p!}{(p_1! \dots p_n!)} x_1^{p_1} \dots x_n^{p_n}$$

Ceci donne :

$$\begin{aligned} b_q + \frac{a_q}{q} + \sum_{n=1}^{q-1} \frac{a_n}{n} \sum_{p=1}^{q-n} \frac{n_p}{p!} \\ \sum_{p_1+\dots+p_n=p} \frac{p!}{p_1! \dots p_n!} b_1^{p_1} - b_{q-n}^{p_{q-n}} = 0 \end{aligned}$$

Jusqu'au 4^e ordre, ce système est facile à résoudre et les résultats sont les suivants :

$$b_1 = a_1 \quad b_2 = a_1^2 - a_2/2$$

$$b_3 = -3/2 a_1^3 + 3/2 a_1 a_2 - q_3/3$$

$$b_4 = 5/3 a_1^4 - 4 a_1^2 a_2 + 4/3 a_1 a_3 + q_2^2 - a_4/4$$

Compte tenu du fait que L. Schwartz emploie des coefficients adimensionnels dans ses développements, on obtient :

$$X(1) = -L^2/2\pi T a_1$$

$$X(2) = -L^2/2\pi T (a_2/2 - a_1^2)$$

$$X(3) = -L^2/2\pi T (a_3/3 - 3/2 a_1 a_2 + 3/2 a_1^3)$$

$$X(4) = -L^2/2\pi T (a_4/4 - a_2^2/2 - 4/3 a_1 q_3 + 4 q_1^2 q_2 - 5/3 q_1^4)$$

Ces résultats peuvent être exprimés plus simplement car, ainsi que montré en appendice, L. Schwartz a développé les coefficients $a_2, a_3 \dots a_n$ en fonction de a_1 , chacun de ces coefficients étant ensuite développé en fonction de $\pi H/L$.

Une fois les calculs menés à leur terme, il vient :

$$X(1) = -L^2/2\pi T (\pi H/L - 3/2 (\pi H/L)^3 - 1/24 (\pi H/L)^5 - (3007/1440) (\pi H/L)^7)$$

$$X(2) = -L^2/2\pi T (1/2 (\pi H/L)^4 - (7/12) (\pi H/L)^6 + (37/72) (\pi H/L)^8 \dots)$$

$$X(3) = -L^2/2\pi T (1/12) (\pi H/L)^5 + (49/144) (\pi H/L)^7 + \dots)$$

$$X(4) = -L^2/2\pi T (1/72) (\pi H/L)^6 + (827/4320) (\pi H/L)^8 + \dots)$$

Ces résultats coïncident parfaitement avec ceux qui sont obtenus par calcul direct à l'aide de la méthode de R.G. Dean (paragraphe 2) à condition de poser $\psi = 0$ à la surface libre.

La série des termes en $X(1), X(2) \dots$ est plus rapidement décroissante que celle des termes obtenus par L. Schwartz ($a_1, a_2, a_3 \dots a_n$), ce qui est évident d'après l'ordre de la première partie de chacun des termes.

A priori, il est possible d'appliquer le même processus en profondeur finie, mais les calculs deviennent vite très compliqués car la contribution des termes en r_0 n'est pas négligeable.

Si $\pi H/L$ est suffisamment petit, il apparaît clairement que, à partir du 2^e terme, les termes suivants sont obtenus par multiplication par $(1/6) (\pi H/L)$ ce qui justifie la loi de décroissance semi-logarithmique proposée par R.G. Dean et telle que :

$$X(n) = X(2) \exp(-\alpha n)$$

Aucune justification n'en avait été donnée par l'auteur.

Autres remarques

Hauteur de déferlement

Contrairement aux résultats présentés par R.G. Dean (Fig. 7. Réf. donnée à la fin de cet article), le critère de

déferlement est exactement le même que celui accepté communément.

C'est la condition supplémentaire $\int z dx = 0$ à la surface libre qui entraîne une hauteur maximum de vague plus grande que celle trouvée normalement, en fonction de H/T^2 . La condition $\psi = 0$ sur le profil n'est plus respectée, et le débit peut prendre une valeur quelconque. L'écart peut atteindre 10 % de la hauteur de déferlement définie habituellement par :

$$H_b = 0.14 L \tanh kd$$

les valeurs ainsi obtenues étant supérieures à H_b . (Fig. 2).

Fig. 2

Accélération verticale à la crête

Si la condition $\psi = 0$ est maintenue à la crête, l'accélération verticale à la crête tend vers une limite qu'il est difficile de déterminer à cause de l'imprécision des calculs lorsqu'on est au voisinage du déferlement.

Cependant, cette valeur est différente de 0,5 g prédite par Longuet-Higgins mais très proche de la valeur 0,388 g qu'il a obtenue par le calcul (Fig. 3). Les auteurs ont obtenu 0,374 g.

D'autre part, lorsque la condition $\psi = 0$ n'est pas imposée sur la surface libre, l'accélération à la crête passe par un maximum pour des valeurs de la hauteur de vague très inférieures au déferlement. Quand la hau-

Fig. 3

teur approche celle qui correspond au déferlement, l'accélération (composante normale) à la crête tend vers 0.

Lorsque $\psi = 0$ sur le profil, la composante verticale de l'accélération croît et atteint son maximum au déferlement.

Valeurs des coefficients au voisinage du déferlement

Le premier coefficient du développement $X(1)$ varie comme le coefficient a_1 obtenu par Schwartz (voir Fig. 8 — Réf. L. Schwartz). Il atteint un maximum lorsque le quotient H/H_b est légèrement inférieur à 1 et décroît ensuite au voisinage immédiat du déferlement.

Etant donné la relative imprécision des calculs au voisinage du déferlement et la non-utilisation d'approximants tels ceux de Padé (employés par L. Schwartz), les auteurs n'ont pas retrouvé le maximum de la célérité atteinte avant le déferlement (ainsi qu'obtenu par Longuet-Higgins).

L'introduction de la condition $\int z dx = 0$ n'apporte pas beaucoup de changement dans les valeurs des coefficients $X(p)$ (sauf au voisinage du déferlement) quand on les compare aux valeurs des coefficients $X(p)$ calculées avec $\psi = 0$ et $\int z dx \neq 0$ à la surface libre.

Emploi de la représentation des vagues à l'aide de la fonction de courant

Depuis que les compagnies pétrolières ont implanté des plateformes pour l'exploitation des gisements en mer, en toutes profondeurs comprises entre 0 et 300 m, les ingénieurs doivent être capables de calculer les valeurs approximatives de la cinématique de la houle afin d'avoir accès aux efforts.

Ils utilisent des modèles (ou théories) de houle irrotationnelle. Jusqu'à l'apparition d'ordinateurs ayant de grandes performances, les modèles de Stokes-Skjelbreia 5^e ordre et la houle cnoïdale respectivement en eau profonde et en eau peu profonde étaient les plus employés. Pour le déferlement en eau peu profonde, on utilisait les modèles d'onde solitaire.

La représentation à l'aide de la fonction de courant remplace tous ces modèles car elle correspond à une résolution exacte du problème de la houle périodique et non une approximation, et ce, quelles que soient la profondeur d'eau et la hauteur de la vague. Elle est indispensable en faible profondeur et en toute profondeur au voisinage de déferlement.

Les calculs sont beaucoup plus longs à effectuer que pour les autres modèles, en particulier en faible profondeur. Pour en raccourcir la durée, il faut choisir les valeurs initiales des coefficients $X(p)$ aussi proches que possible de celles qui correspondent à la solution.

L'emploi du modèle de L. Schwartz est beaucoup plus difficile car le modèle est plus lourd même si son intérêt "analytique" est plus grand.

Conclusion

Une comparaison des développements de R.G. Dean et de L. Schwartz a permis d'obtenir les développements des coefficients de la représentation des vagues à l'aide de la fonction de courant, en fonction des paramètres (H, L, T) de la vague, en profondeur infinie.

Les développements ont été poussés jusqu'à un ordre assez élevé (25^e), mais aucune approximation n'a été introduite qui, au voisinage du déferlement, limiterait la précision.

Les résultats présentés en 1968 par R.G. Dean ont maintenant été vérifiés et justifiés.

Il est regrettable que les ingénieurs ayant besoin de connaître la cinématique de la houle irrotationnelle n'emploient pas plus systématiquement la représentation à l'aide de la fonction de courant.

Bibliographie

- DEAN R.G. — *Proc. 11th Coastal Eng. Conf.*, Ch. 8, Vol. I, 1968.
 LAITONE E.V. — *J. Fluid Mech.* 9, Part 3, p. 430, 1960.
 LONGUET-HIGGINS M.S. et FOX M.J.H. — *J. Fluid Mech.* 80, p. 721, 1977.
 SCHWARTZ L. — *J. Fluid Mech.* 62, Part 3, p. 353, 1974.
 SKJELBREIA L. et HENDRICKSON J.A. — *Proc. 74 Coastal Eng. Conf.*, Ch. 10, 1961.
 WEHAUSEN J.V. et LAITONE E.V. — *Surface Waves. Handbuch der Physik*, Vol. 9, p. 446, 1960.

Annexe

En résolvant le problème de la houle périodique, L. Schwartz donne les développements suivants pour la série des coefficients a en fonction de a_1 :

$$\begin{aligned} a_2 &= 2 a_1^2 + a_1^4 + 29/6 a_1^6 + 1123/36 a_1^8 \\ a_3 &= 9/2 a_1^3 + 19/4 a_1^5 + 1183/48 a_1^7 \\ a_4 &= 32/3 a_1^4 + 313/18 a_1^6 + 103727/1080 a_1^8 \\ a_5 &= 625/24 a_1^5 + 16603/288 a_1^7 \\ a_6 &= 342/5 a_1^6 + 54473/300 a_1^8 \\ a_7 &= 117649/720 a_1^7 \\ a_8 &= 131072/315 a_1^8 \\ K &= 1 + 2 a_1^2 + 11/2 a_1^4 + 167/6 a_1^6 + 26137/144 a_1^8 \\ c^2 &= 1 + a_1^2 + 7/2 a_1^4 + 229/12 a_1^6 + 6175/48 a_1^8 \\ h &= a_1 + 3/2 a_1^3 + 163/24 a_1^5 + 62047/1440 a_1^7 \\ a_1 &\text{ peut être développé en fonction de } (\pi H/L) \text{ à partir de l'expression suivante :} \\ a_1 &= h - 3/2 h^3 - 1/24 h^5 - 3007/1440 h^7 \\ &\quad - 1617319/302400 h^9. \end{aligned}$$