

Vibrations des structures en forme de plaques et de coques en présence d'un milieu fluide incompressible

Vibration of plate and shell structures in an incompressible fluid medium

Séverin Casacci

Directeur technique
Société Neyrpic - Grenoble

Gilbert Caillot

Ingénieur
Société Neyrpic - Grenoble

René-Jean Gibert

Chef du Laboratoire
des Études de Vibrations
C.E.A. Saclay

Nous utiliserons dans la suite, les notations générales suivantes :

E, ν et ρ respectivement module de Young, coefficient de Poisson et masse volumique du matériau de la structure immergée,

ρ_L masse volumique du milieu fluide baignant la structure,

ϕ potentiel des vitesses du mouvement de fluide induit par les vibrations de la structure.

1. VIBRATIONS DE PLAQUES DANS UN MILIEU CONFINE

1.1. Bande rectangulaire indéformable = exemple de masse ajoutée

On considère une bande indéformable de largeur unité et de longueur l , pouvant pivoter autour d'un axe passant par le milieu de ce côté. Cette bande obstrue un canal dont les bords sont parallèles entre eux et perpendiculaires au plan de la plaque au repos. Le canal, rempli d'un fluide incompressible est limité par un fond fixe distant de L de l'axe de la paroi pivotante.

Au cours du mouvement, la position d'un point d'abscisse x de la bande est donné par sa cote y :

$$y = a \left(x - \frac{l}{2}\right) \sin \omega t \quad \left(\begin{array}{l} \text{Axe de rotation au point} \\ x = l/2 \\ y = 0 \end{array}\right)$$

$$\text{soit } y = \frac{4a}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{l}{(2n+1)\pi}\right)^2 \cos(2n+1) \frac{\pi x}{l}$$

En se limitant au domaine des petits mouvements, le potentiel de l'écoulement induit par les déplacements de la plaque doit satisfaire à l'équation $\Delta\phi = 0$ et aux conditions aux limites :

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = 0 \quad \text{pour } x = 0 \text{ et } x = l \quad (1)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = 0 \quad \text{pour } y = L \quad (2)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial y}{\partial t} \quad \text{pour } y = 0 \quad (3)$$

Ce potentiel peut donc se représenter par le développement en série :

$$\phi = \omega \cos \omega t \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \cdot \frac{\text{ch} \left(\frac{(2n+1)\pi(y-L)}{l}\right)}{\text{sh} \left(2n+1\right) \frac{\pi L}{l}} \cdot \cos(2n+1) \frac{\pi x}{l}$$

qui vérifie directement l'équation de Laplace et les conditions (1) et (2). La condition (3) permet de calculer les coefficients γ_n par identification et d'obtenir :

$$\gamma_n = \frac{4a l^2}{((2n+1)\pi)^3}$$

Considérons le potentiel des vitesses pour une vitesse angulaire de rotation unité, il vient

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_{y=0} = \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{y=0} \quad \neq \quad \left(x - \frac{l}{2}\right)$$

et dans ces conditions :

$$\phi = 4 l^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{((2n+1)\pi)^3} \cdot \frac{1}{\text{th} \left(2n+1\right) \frac{\pi L}{l}} \cdot \cos \left(\frac{2n+1}{l} \pi x\right)$$

L'inertie ajoutée par unité de largeur est donnée par l'intégrale :

$$I = -\rho_L \int_c \phi \cdot \frac{\partial\phi}{\partial n} \cdot ds$$

le domaine d'intégration s'étendant à toutes les surfaces frontières. Compte tenu des conditions aux limites, seule la bande elle-même subsiste comme domaine d'intégration.

L'inertie ajoutée pour une bande de largeur unité, calculée dans ces conditions est égale à :

$$I = \frac{8 \rho_L l^2}{\pi^5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^5} \cdot \frac{1}{\text{th} \left(2n+1\right) \frac{\pi L}{l}}$$

On peut remarquer que lorsque le fond du canal est rejeté à l'infini, l'inertie ajoutée par unité de largeur tend vers la valeur :

$$I = \frac{8 \rho_L l^2}{\pi^5}$$

L'évolution de l'inertie ajoutée en fonction de l'éloignement relatif $\frac{L}{l}$ du fond du conduit est représentée sur la figure 1. On constate que l'effet de confinement diminue rapidement avec les valeurs de l'éloignement relatif; il est inférieur à 1 % dès $\frac{L}{l} = 0,9$. Ceci est dû au fait que c'est le liquide proche de la paroi mobile qui constitue l'apport le plus important du point de vue inertie ajoutée. La figure 2 illustre cette propriété en représentant les mouvements des différentes tranches de fluide au cours de la vibration; le fluide considéré étant incompressible, les mouvements sont en phase.

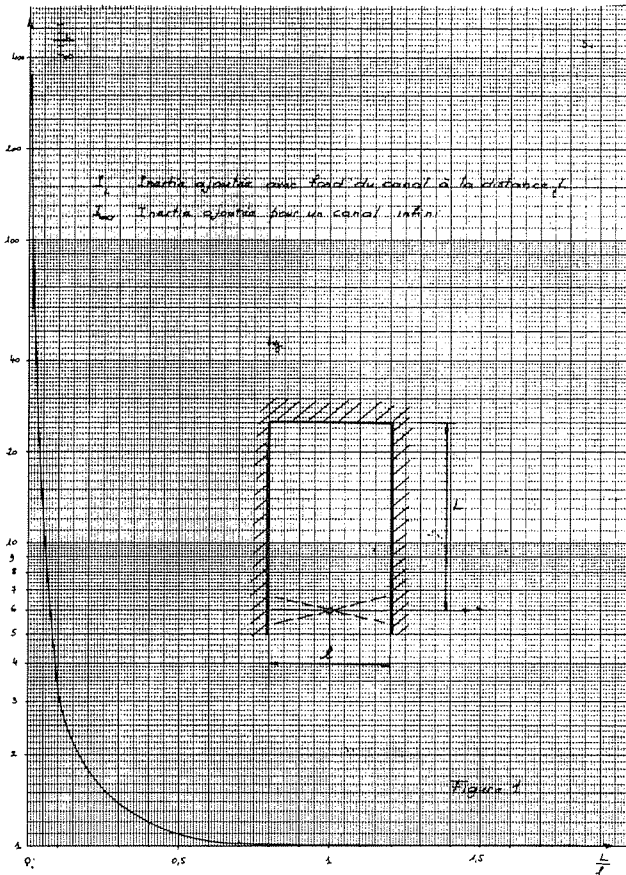
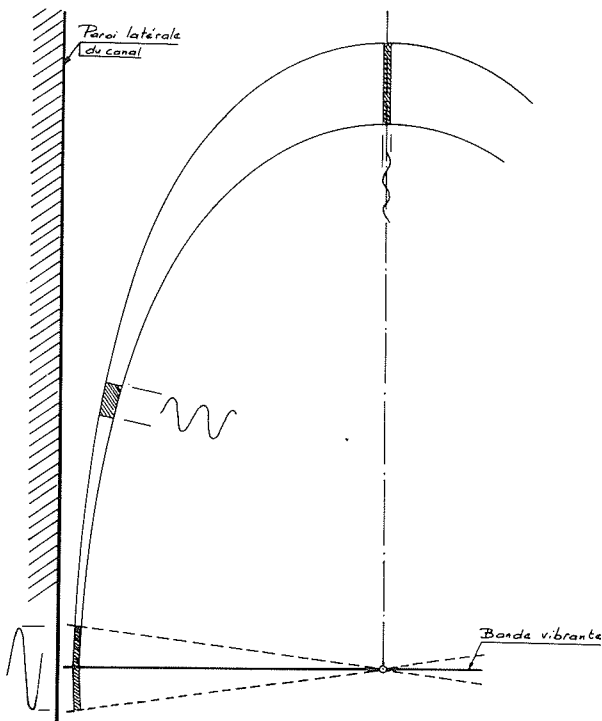


Figure 1



Amplitude comparée en différents points, du fluide mis en mouvement par la bande vibrante.

Figure 2

1.2. Bande rectangulaire encastrée

On considère une bande de largeur unité encastrée à ses deux extrémités dans les parois parallèles d'un canal rempli de fluide incompressible.

La plaque est baignée sur ses deux faces. On désigne par :

a et e respectivement longueur et épaisseur de la plaque

$$k^2 = 12 \left(\frac{a}{e}\right)^2 ; D = \frac{Ee^3}{12(1-\nu^2)}$$

x = axe longitudinal de la bande, variable adimensionnelle $X = \frac{x}{a}$

z = axe perpendiculaire à la plaque, variable adimensionnelle $Z = \frac{z}{a}$
Cet axe définit un côté positif et un côté négatif de la plaque

w = déplacement selon l'axe des z, variable adimensionnelle $W = \frac{w}{a}$

\dot{w} = vitesse selon la normale à la plaque

q = effort tranchant dans la bande ; variable adimensionnelle $Q = \frac{qa}{D}$

m = moment de flexion dans la bande ; variable adimensionnelle $M = \frac{ma}{D}$

f = effort extérieur normal à la plaque

Les équations d'équilibre d'un élément de plaque s'écrivent :

$$\frac{\partial q}{\partial x} + f = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial m}{\partial x} + q = 0 \tag{2}$$

Le moment m s'exprime par :

$$\frac{m}{D} = \frac{\partial w^2}{\partial x^2} = \frac{\partial y}{\partial x} \text{ en posant } y = \frac{\partial w}{\partial x}$$

Les équations (1) et (2) deviennent alors :

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial X^2} = - \frac{a^3}{D} \frac{\partial f}{\partial X} \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial X^2} = - Q \tag{4}$$

L'effort extérieur normal à la plaque correspond à l'action de la pression p exercée par le fluide et aux effets d'inertie sur la plaque.

$$f = - p - \rho e \ddot{w} \tag{5}$$

Les potentiels des écoulements induits de part et d'autre du panneau (ϕ_+ du côté des z positifs, ϕ_- du côté des z négatifs) doivent satisfaire à l'équation de Laplace et aux conditions aux limites suivantes :

$$\frac{\partial \phi_+}{\partial z} = \frac{\partial \phi_-}{\partial z} = a \dot{w} \tag{6}$$

$$\frac{\partial \phi_+}{\partial x} = \frac{\partial \phi_-}{\partial x} = 0 \text{ pour } X = 0 \text{ et } X = 1 \tag{7}$$

$$\frac{\partial \phi_+}{\partial z} = 0 \text{ pour } Z = +\infty \text{ et } \frac{\partial \phi_-}{\partial z} = 0 \text{ pour } Z = -\infty \tag{8}$$

Le déplacement d'un point du panneau peut se représenter par le développement :

$$W = \frac{w}{a} = \cos \beta t \sum_{n=1}^{\infty} W_n \cos n\pi X$$

Si on étudie les déformations antisymétriques du panneau, c'est-à-dire celles qui n'entraînent pas de variation de volume du fluide supposé incompressible, le développement ne comporte que des termes impairs.

$$W = \cos \beta t \sum_{n=1,3,5}^{\infty} W_n \cos \alpha_n X \text{ en posant } \alpha_n = n\pi$$

relation qui satisfait la condition de pente nulle à l'encastrement. La vitesse de déplacement d'un point du panneau s'exprime par :

$$\dot{w} = a\dot{W} = - a\beta \sin \beta t \sum_{n=1,3,5}^{\infty} W_n \cos \alpha_n X$$

Les potentiels des écoulements peuvent se représenter par les développements suivants :

- du côté des z positifs :

$$\phi_+ = a^2 \beta \sin \beta t \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{W_n}{\alpha_n} \cdot \cos \alpha_n X \cdot e^{-\alpha_n z}$$

- du côté des z négatifs :

$$\phi_- = -a^2 \beta \sin \beta t \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{W_n}{\alpha_n} \cdot \cos \alpha_n X \cdot e^{\alpha_n z}$$

Ces relations satisfont à l'équation de Laplace et aux conditions (6), (7) et (8).

en posant $K = \frac{\rho L a}{\rho e}$

L'équation (3) devient alors :

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial X^2} = k^2 \gamma^2 \cos \beta t \sum_{n=1,3,5}^{\infty} (\alpha_n + 2K) W_n \sin \alpha_n X$$

avec : $\gamma^2 = \rho \frac{(1-v^2) a^2 \beta^2}{E}$

Si on désigne par Q (0) et Q (1) les cisaillements en X = 0 et X = 1, ils sont tels que Q (0) = Q (1).

Envisageons le changement de variable :

$$Q = Q^* + Q(0)$$

Q* devra satisfaire aux conditions Q* = 0 pour X = 0 et X = 1 et par suite être développé en série de sin $\alpha_n X$

Q peut donc se représenter sous la forme :

$$Q = \left[\sum_{n=1,3,5}^{\infty} Q_n^* \sin \alpha_n X + 4 Q(0) \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\sin \alpha_n X}{\alpha_n} \right] \cos \beta t$$

Le système (9) et (4) se transforme par identification terme à terme en un système algébrique :

$$\begin{cases} -\alpha_n^2 Q_n^* = k^2 \gamma^2 (\alpha_n + 2K) W_n & (10) \\ \alpha_n^3 W_n = -Q_n^* - 4 \frac{Q(0)}{\alpha_n} & (11) \end{cases}$$

La résolution de ce système conduit à :

$$W_n = \frac{-4 \alpha_n Q(0)}{\alpha_n^5 - k^2 \gamma^2 (\alpha_n + 2K)}$$

et la condition de déformation nulle au niveau de l'encastrement ($W(0) = W(1) = 0$) sera faite si :

$$\sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\alpha_n^5 - k^2 \gamma^2 (\alpha_n + 2K)} = 0 \quad (12)$$

Les valeurs de γ permettant de satisfaire l'équation (12) conduisent aux valeurs des fréquences propres.

Les termes de la série diminuent très rapidement lorsque l'ordre de n s'élève. Pour calculer la première fréquence propre il suffit de considérer les deux ou trois premiers termes et de remplacer les autres par $\frac{1}{\alpha^4}$. Ces derniers se calculent aisément si on tient compte de la relation :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^n} = \frac{1}{96}$$

Remarquons que dans le vide, les fréquences propres seraient données par les valeurs de γ satisfaisant à :

$$\sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^5 - k^2 \gamma^2} = 0$$

On constate ainsi que les fréquences propres sont considérablement affectées par la présence de fluide. Ainsi par exemple, une bande d'acier dont le rapport de la longueur à l'épaisseur serait égal à 100, a une fréquence propre 2,6 fois plus faible lorsque le conduit est rempli d'eau que lorsqu'il est vide.

1.3. Plaque rectangulaire encastrée sur ses 4 côtés

Soit une plaque obstruant un canal de section carrée, d'axe perpendiculaire au plan de la plaque.

On considère un système orthonormé x_1, x_2, x_3 ; le plan de la plaque étant défini par x_1, x_2 .

On désigne par :

a et e respectivement la longueur du côté et l'épaisseur de la plaque :

$$k^2 = 12 \frac{a^2}{e^2}, \quad D = \frac{Ee^3}{12(1-v^2)}$$

β = la pulsation de la vibration ($\gamma^2 = \frac{\rho(1-v^2)}{E} a^2 \beta^2$ carré de la pulsation réduite)

$$K = \frac{\rho_1 a}{\rho e}, \quad \alpha_i = i\pi$$

$$\beta_{ij}^2 = \alpha_i^2 + \alpha_j^2$$

Une étude analogue à celle effectuée en 1.2 conduit à un système infini d'équations qui n'admet une solution que si son déterminant caractéristique s'annule :

$$\| a_{ij} \| = 0$$

où $a_{ij} = D_{ij}^{-1} + \delta_{ij} \sum_{l=1,3,5,\dots}^{\infty} D_{il}^{-1}$

où $D_{ij} = k^2 \gamma^2 (K_{ij} + 1) - \beta_{ij}^4$

Ce déterminant développé s'écrit :

$D_{11}^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} D_{1n}^{-1}$	D_{13}^{-1}	D_{15}^{-1}	D_{17}^{-1}
D_{31}^{-1}	$D_{33}^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} D_{3n}^{-1}$	D_{35}^{-1}	D_{37}^{-1}
D_{51}^{-1}	D_{53}^{-1}	$D_{55}^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} D_{5n}^{-1}$	D_{57}^{-1}
D_{71}^{-1}	D_{73}^{-1}	D_{75}^{-1}	$D_{77}^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} D_{7n}^{-1}$

La première fréquence propre correspond approximativement à la valeur de γ_1 qui annule l'équation :

$$D_{13} = k^2 \gamma_1^2 (K_{13} + 1) - \beta_{13}^4 = 0$$

avec :

$$K_{13} = \frac{\rho_1 a}{\rho e} \beta_{13}^{-1} \quad (4)$$

et :

$$\beta_{13}^2 = \pi^2 (1 + 3^2) = 10 \pi^2$$

d'où la première fréquence propre pour un panneau carré obturant un conduit de même section rempli d'un fluide incompressible.

$$f_1 = \frac{10 \pi}{4 \sqrt{3(1-v^2)} (K_{13} + 1)} \frac{e}{a^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Remarquons que si le conduit supposé infini existe aussi du côté des z négatifs, il faut remplacer le K_{13} défini par (4) par $2 K_{13}$.

2. VIBRATIONS DE COQUES

Coques cylindriques

On considère deux coques de longueur infinie, d'axes parallèles et excentrés de la distance e . Un fluide incompressible et non visqueux remplit l'intervalle entre les deux coques dont les rayons respectifs sont R (coque extérieure) et r (coque intérieure).

Pour faciliter l'expression du potentiel, on utilise un système de coordonnées bipolaires.

Dans le plan orthonormé x, y , considérons le système de coordonnées orthogonales et tel que :

$$Z = \alpha + i\beta = \text{Log} \frac{z + ib}{z - ib} = \frac{x + i(y+b)}{x + i(y-b)}$$

où : $z = x + iy$

$$z\bar{z} = \rho^2$$

soit :
$$e^Z = \frac{\rho^2 - b^2 + 2ixb}{\rho^2 + b^2 - 2yb}$$

Expression qui peut se mettre sous la forme :

$$e^\alpha (\cos \beta + i \sin \beta) = \left(\frac{(\rho^2 + b^2)^2 - 4y^2 b^2}{\rho^2 + b^2 - 2yb} \right)^{1/2} (\cos \beta + i \sin \beta)$$

d'où l'on peut tirer en posant $h = \frac{2b}{((\rho^2 - b^2)^2 + 4x^2 b^2)^{1/2}}$

$$hx = \sin \beta \quad (1)$$

$$\cos \beta = (\rho^2 - b^2) \left[(\rho^2 - b^2)^2 + 4x^2 b^2 \right]^{-1/2}$$

$$e^{2\alpha} = \frac{\rho^2 + b^2 + 2yb}{\rho^2 + b^2 - 2yb}$$

Après quelques transformations simples, il vient :

$$e^\alpha = (1 + y^2 h^2)^{1/2} + yh \quad \text{et}$$

$$yh = \text{sh} \alpha \quad (2)$$

Comme :

$$h^2 x^2 + h^2 y^2 = h^2 \rho^2 = \sin^2 \beta + \text{sh}^2 \alpha = \text{ch}^2 \alpha - \cos^2 \beta$$

On obtient :

$$hb = \text{ch} \alpha - \cos \beta \quad (3)$$

Les coordonnées α et β sont donc reliées aux paramètres b, x et y par les relations (1), (2) et (3).

Forme des courbes correspondant à α ou β constants (voir figure 3)

Courbes $\alpha = \alpha_1 = \text{cte}$

Par élimination de β et h entre (1), (2), et (3), on obtient la relation

$$x^2 = (y - b \text{ch} \alpha_1)^2 = \frac{b^2}{\text{sh}^2 \alpha_1}$$

équation d'un cercle de rayon $r_i = \frac{b}{\text{sh} \alpha_1}$ et centré sur l'axe des y à

$d_i = r_i \text{ch} \alpha_1$, c'est-à-dire que pour tous les $\alpha_1 \neq 0$ $d_i > r_i$ (cercles non sécants avec l'axe des x)

Les cas limites donnent :

$$\alpha = 0 = \text{cercle confondu avec l'axe des } x$$

$$\alpha = \infty = \text{cercle confondu avec le point } x = 0, y = b$$

Courbes $\beta = \beta_1 = \text{cte}$

De façon analogue, on obtient l'équation d'un cercle de rayon $\frac{b}{\sin \beta_1}$ et dont le centre est situé sur l'axe des x à une distance $b \cotg \beta_1$ de celui des y .

Ces cercles passent tous par les points $(x = 0, y = +b)$ et sont orthogonaux au réseau $\alpha_1 = \text{cte}$.

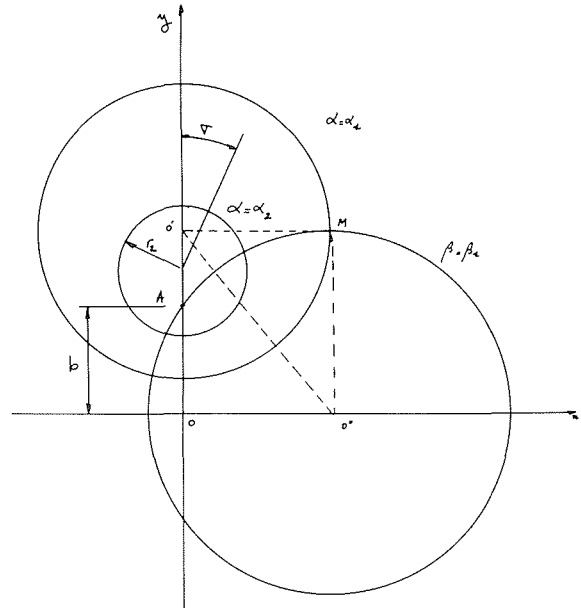


Figure 3

Envisageons le cas qu'une coque située à l'intérieur d'une enceinte cylindrique indéformable.

Pour étudier la masse ajoutée du fluide incompressible et non visqueux, compris entre la coque et l'enceinte cylindriques dont les surfaces moyennes admettent pour sections respectivement les cercles $\alpha = \alpha_2$ et $\alpha = \alpha_1$ avec α_1, α_2 constants, considérons le potentiel :

$$\phi = b V(t) \sum_{n=1,2}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\text{ch} n (\alpha - \alpha_1)}{\text{sh} n (\alpha_2 - \alpha_1)} (a_n \cos n\beta + b_n \sin n\beta)$$

La vitesse u_α , dans le sens des α positifs s'exprime par :

$$u_\alpha = h \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} = (\text{ch} \alpha - \cos \beta) V(t) \sum_{n=1,2}^{\infty} \frac{\text{sh} n (\alpha - \alpha_1)}{\text{sh} n (\alpha_2 - \alpha_1)} (a_n \cos n\beta + b_n \sin n\beta)$$

Cette expression montre que u_α s'annule sur le cercle $\alpha = \alpha_1$ (parois rigides de l'enceinte) et donc que le champ des vitesses défini par le potentiel ϕ choisi satisfait bien aux conditions aux limites à ce niveau.

Au niveau de la coque α_2 la vitesse est donnée par :

$$u_{\alpha_2} = (\text{ch} \alpha_2 - \cos \beta) V(t) \sum_{n=1,2}^{\infty} (a_n \cos n\beta + b_n \sin n\beta) \quad (4)$$

Masse ajoutée

La masse ajoutée par unité de longueur est donnée par l'intégrale :

$$m' = \rho_L \iint_{\Sigma} \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} ds \quad (5)$$

le domaine d'intégration s'étendant à toutes les surfaces frontalières.

2.1. Coque indéformable

Envisageons le cas d'une coque se déplaçant en bloc dans la direction $\sigma = \sigma_0$. Dans ces conditions la coque α_2 est soumise à un mouvement tel que :

$$u_{\alpha_2} = V(t) \cos (\sigma - \sigma_0) = V(t) [\cos \sigma \cdot \cos \sigma_0 + \sin \sigma \cdot \sin \sigma_0]$$

Le potentiel des vitesses s'exprime alors par :

$$\phi = 2 b V(t) \sum_{n=1,2}^{\infty} \frac{\text{ch} n (\alpha - \alpha_1)}{\text{sh} n (\alpha_2 - \alpha_1)} \cdot e^{-n\alpha_2} (\cos \sigma_0 \cos n\beta + \sin \sigma_0 \sin n\beta)$$

Pour une vitesse de translation unité, on a sur le cercle $\alpha = \alpha_2$:

$$\phi_{\alpha = \alpha_2} = 2 b \sum_{n=1,2}^{\infty} e^{-n \alpha_2} \cdot \text{cth } n (\alpha_2 - \alpha_1) \left(\cos \sigma_0 \cos n \beta + \sin \sigma_0 \sin n \beta \right)$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \right)_{\alpha = \alpha_2} = 2 b \sum_{n=1,2}^{\infty} n e^{-n \alpha_2} \left(\cos \sigma_0 \cdot \cos n \beta + \sin \sigma_0 \sin n \beta \right)$$

d'où d'après (5), la masse ajoutée m' par unité de longueur après intégration :

$$m' = 4 \rho_L \pi b^2 \sum_{n=1,2}^{\infty} n e^{-2n \alpha_2} \text{cth } n (\alpha_2 - \alpha_1)$$

La figure 4 met en évidence, d'une part l'influence du confinement d  à l'enceinte cylindrique extérieure, et d'autre part l'effet de l'excentrement de la coque intérieure.

2.2. Coque déformable

Envisageons à titre d'exemple le cas d'une coque respirant suivant le mode $\cos 2 (\sigma - \sigma_0)$; les autres modes peuvent s'analyser de façon tout-à-fait similaire.

Dans ces conditions la coque α_2 est soumise à un mouvement du type tel que $u_{\alpha_2} = v(t) \cos 2 (\sigma - \sigma_0)$

Le potentiel des vitesses s'écrit :

$$\phi = 2 b \sum_{n=1,2}^{\infty} e^{-n \alpha_2} (n \text{sh } \alpha_2 - \text{ch } \alpha_2) \frac{\text{ch } n (\alpha - \alpha_1)}{\text{sh } n (\alpha_2 - \alpha_1)} (\cos 2 \sigma_0 \cos n \beta + \sin 2 \sigma_0 \sin n \beta)$$

L'intégration de la relation (5) conduit à la masse ajoutée par unité de longueur de coque :

$$m' = 4 \rho_L \pi b^2 \sum_{n=1,2}^{\infty} n (n \text{sh } \alpha_2 - \text{ch } \alpha_2)^2 e^{-2n \alpha_2} \text{cth } n (\alpha_2 - \alpha_1)$$

2.3. Influence de la vitesse du fluide

Consid rions une coque placée dans un écoulement perpendiculaire à l'axe de la coque.

On désigne par :

a, e respectivement le rayon et l'épaisseur de la coque et posons :

$$k^2 = 12 \left(\frac{a}{e} \right)^2$$

w, v déplacements radial et tangentiel de la coque, notations adimensionnelles $W = \frac{w}{a}$; $V = \frac{v}{a}$

θ angle azimutal repérant un point de la coque

\dot{w}, \dot{v} dérivées de w et v par rapport au temps

w' et v' dérivées de w et v par rapport à θ

Envisageons les mouvements de la paroi symétriques par rapport à l'axe $\theta = 0$. Le déplacement normal de la coque peut se définir par le développement :

$$W = e^{\beta t} \sum_{n=1}^{\infty} W_n \cos n \theta \quad (1) \text{ avec } \beta \text{ amplitude complexe de la vibration}$$

La vitesse radiale en un point de la coque s'exprime par :

$$\dot{W} = \beta e^{\beta t} \sum_{n=1}^{\infty} W_n \cos n \theta \quad (2)$$

Le fluide applique sur la paroi de la coque une pression extérieure p (variable adimensionnelle $P = \frac{(1 - \nu^2) a p}{E e}$) ; les charges extérieures par unité de surface appliquées dans les conditions normale et tangentielle sont donc égales à :

$$p_n = - e \rho \ddot{w} - p = - e \rho \beta^2 w - p \quad (3)$$

$$p_t = - e \rho \ddot{v} = - e \rho \beta^2 v \quad (4)$$

 coulement induit par les vibrations :

Il dérive du potentiel

$$\phi = - a^2 \beta e^{\beta t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_n a^n}{n r^n} \cos n \theta$$

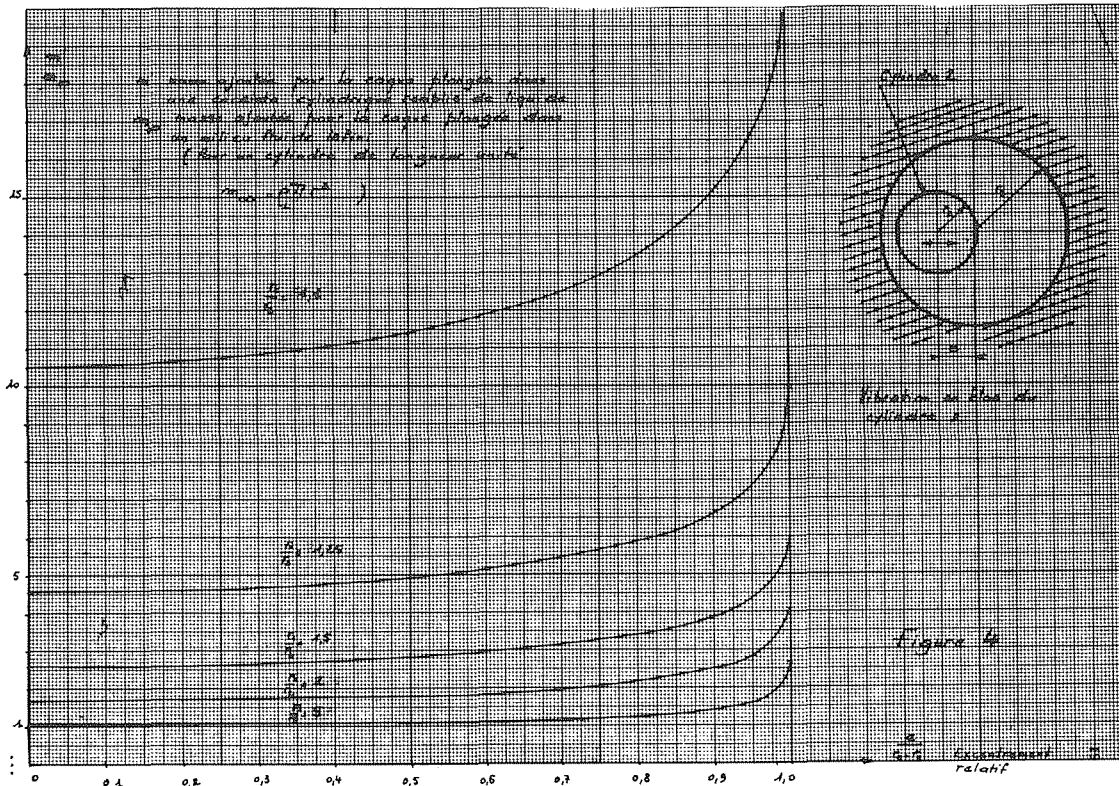


Figure 4

Le champ des vitesses défini par ce potentiel satisfait bien aux conditions aux limites :

- il s'annule à l'infini,
- sur la paroi, la vitesse normale \dot{w} est égale à la relation (2)

Écoulement extérieur dans lequel baigne la coque :

Nous supposons qu'en l'absence de vibration cet écoulement dérive du potentiel

$$\phi_E = - \frac{a V_0}{2} \left(\frac{a}{r} + \frac{r}{a} \right) \cos \theta$$

qui donne, le long de la coque une vitesse tangentielle

$$\dot{v}_E = V_0 \sin \theta$$

Dans la suite, les effets stationnaires ne seront pas considérés.

Le théorème de Bernouilli linéarisé s'écrit :

$$\frac{p}{\rho_L} = - \frac{\partial \phi}{\partial t} - \dot{v} \cdot \dot{v}_E - \dot{w} \cdot \dot{w}_E$$

La vitesse radiale \dot{w}_E correspondant à l'écoulement de base étant nulle, la pression sur la coque est donnée par :

$$\frac{p}{\rho_L} = - \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{r=a} - \dot{v} \cdot \dot{v}_E$$

avec :

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{r=a} = - a^2 \beta^2 e^{\beta t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_n}{n} \cos n \theta$$

et :

$$\dot{v} \cdot \dot{v}_E = \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)_{r=a} = a \beta e^{\beta t} \sum_{n=1}^{\infty} W_n \sin n \theta$$

$$\dot{v} \cdot \dot{w}_E = a \beta V_0 e^{\beta t} \sum_{n=1}^{\infty} W_n \sin n \theta \sin \theta$$

or $\sin n \theta \cdot \sin \theta = \frac{1}{2} (\cos (n-1) \theta - \cos (n+1) \theta)$

d'où :

$$\dot{v} \cdot \dot{w}_E = \frac{a \beta V_0}{2} e^{\beta t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (W_{n+1} - W_{n-1}) \cos n \theta + W_1 \right)$$

en posant : $W_0 = 0$

la pression au droit de la coque est donnée par :

$$\frac{p}{\rho_L} = a^2 \beta^2 e^{\beta t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_n}{n} \cos n \theta - \frac{a \beta}{2} V_0 e^{\beta t} \left(W_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (W_{n+1} - W_{n-1}) \cos n \theta \right)$$

soit en posant : $\gamma^2 = \frac{\rho(1-\nu^2) a^2 \beta^2}{E}$

$$K = \frac{\rho_L a}{\rho e} ; \quad C^2 = \frac{E}{\rho(1-\nu^2)}$$

$$\alpha = \frac{K V_0}{2C}$$

$$P = K \gamma^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_n}{n} \cos n \theta - \alpha \gamma \left(W_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (W_{n+1} - W_{n-1}) \cos n \theta \right) \tag{5}$$

soit :

$$P' = K \gamma^2 \sum_{n=1}^{\infty} W_n \sin n \theta + \alpha \gamma \sum_{n=1}^{\infty} n (W_{n+1} - W_{n-1}) \sin n \theta$$

Si on désire étudier les vibrations de flexion de la coque cylindrique, les équations qui représentent les déformations correspondantes s'écrivent :

$$(5) \begin{cases} v'' = -ay - \frac{(1-\nu^2)}{Ee} a^2 p_c - a \frac{(1-\nu^2)}{Ee} q \\ y'' = -y - 12(1-\nu^2) a^2 q - \frac{(1-\nu^2)}{Ee} q - a \frac{(1-\nu^2)}{Ee} p_t \\ q'' = -q - a p_c' - a p_n' \end{cases}$$

ou q représente l'effort de cisaillement par unité de longueur appliqué sur la lisière de l'élément considéré (variable adimensionnelle $Q = \frac{(1-\nu^2)}{Ee} q$)

$$y = \frac{w'}{a} \text{ déformation angulaire de la coque au point considéré}$$

Le déplacement en bloc n'étant pas considéré, nous considérerons dans la suite $W_1 = 0$ (6)

Pour les mouvements symétriques par rapport à l'axe $\theta = 0$ on doit avoir :

$$y = v = q = 0 \quad \text{pour } \theta = 0 \text{ et } \theta = \pi$$

Ces fonctions peuvent donc se représenter par :

$$v = e^{\beta t} \sum_{n=1}^{\infty} V_n \sin n \theta ; \quad Q = e^{\beta t} \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \sin n \theta$$

$$y = - e^{\beta t} \sum_{n=1}^{\infty} n W_n \sin n \theta \quad \text{d'après (1)}$$

avec d'après la condition (6) $W_1 = V_1 = Q_1 = 0$

Compte tenu des relations (3) et (4) le système (5) s'écrit donc :

$$v'' = -y + \gamma^2 v - Q$$

$$y'' = -y - (k^2 + 1) Q + \gamma^2 v$$

$$Q'' = \gamma^2 y - Q + \gamma^2 v + P'$$

soit par identification terme à terme pour $n \geq 2$ avec $W_1 = 0$

$$(n^2 + \gamma^2) V_n = Q_n - n W_n$$

$$n(n^2 - 1) W_n = \gamma^2 V_n - (k^2 + 1) Q_n$$

$$(n^2 - 1) Q_n = -\gamma^2 V_n + \gamma^2 (K + n) W_n + \alpha \gamma_n W_{n-1} - \alpha \gamma_n W_{n+1}$$

Système qui s'écrit encore :

$$a_{n(n-1)} W_{n-1} + a_{nn} W_n + a_{n(n+1)} W_{n+1} = 0$$

où :

$$a_{nn} = 1 + \frac{(n^2 + 1)(k^2 + n^2) + nK(k^2 + 1)}{n^2(n^2 - 1)^2} \gamma^2 + \frac{K^2(K + n)}{n^3(n^2 - 1)^2} \gamma^4$$

$$a_{n(n-1)} = -a_{n(n+1)} = \frac{\alpha \gamma (k^2 + 1) n^2 + k^2 \alpha \gamma^3}{n^2(n^2 - 1)^2}$$

Le déterminant caractéristique s'écrit :

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & & & \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} & & \\ & a_{43} & a_{44} & a_{45} & \\ & & & \dots & \end{vmatrix} = 0$$

Les racines de :

$$a_{22} = 0$$

$$D_{33} = \frac{a_{22} a_{33} - a_{32} a_{23}}{a_{22}} = 0$$

$$D_{44} = \frac{a_{44} D_{33} - a_{34} a_{43}}{a_{66}} = 0 \text{ etc... tendent vers les racines du déterminant}$$

A titre d'exemple, considérons une coque en acier de rapport $\frac{a}{e} = 10$ et baignée extérieurement par de l'eau dont la vitesse tangentielle maximale en paroi atteint 100 m/s. L'étude précédente montre que cet écoulement n'affecte que de 0,2 % la première fréquence propre (mode = 4 noeuds) par rapport au cas où le fluide serait initialement au repos.

Rappelons toutefois que si du point de vue des masses ajoutées, l'influence du mouvement du fluide peut être considérée comme faible, il peut engendrer une amplification des vibrations de la coque par suite de :

• l'instabilité de l'écoulement lui-même (décollements, sillages, tourbillons de Benard Karman),

• la présence du fluide en mouvement qui constitue lui-même un apport continu d'énergie.

BIBLIOGRAPHIE

Vibrations d'un panneau rectangulaire encastré, seule face flexible d'une enceinte parallélépipédique remplie d'un fluide incompressible.

S. CASACCI (S.F.M.)

Calcul bidimensionnel de la matrice masse ajoutée créée par un fluide séparant deux coques cylindriques circulaires d'axes parallèles décentrés.

R.J. GIBERT (Note Technique C.E.A)

Masses ajoutées de coques cylindriques excentrées baignant dans un fluide

S. CASACCI - L. EREMEEF (Rapport interne NEYRPIIC)

Discussion

Président : M. S. CASACCI

M. le Président. — Je remercie M. CAILLOT de cet exposé. Je pense nécessaire de préciser ce qu'il entend par conditions d'adhérence. En fait, en écoulement parfait, seule compte la vitesse normale à la paroi puisqu'il peut y avoir glissement du fluide le long de la paroi.

M. BINDER. — Ne pourrait-on pas considérer l'influence de la viscosité ? L'effet de la viscosité peut changer complètement l'écoulement potentiel.

M. le Président. — Il faut sérier les difficultés. Deux caractéristiques principales influent sur le comportement dynamique des structures :

- les modes et les fréquences propres en présence d'un milieu fluide,
- l'amortissement dû à la viscosité du fluide.

Les études analytiques se rapportant à des cas relativement simples montrent que l'influence de la viscosité sur les modes et les fréquences propres reste pratiquement négligeable. L'hypothèse du fluide parfait et du mouvement à potentiel se justifie donc lorsqu'on s'intéresse aux risques de résonance.

L'évaluation de l'amortissement dû à la viscosité du fluide peut se calculer pour des cas simples en supposant des vibrations de très faible amplitude, ce qui permet de négliger les termes convectifs d'accélération. Malheureusement les valeurs de l'amortissement réduit calculé ne correspondent pas aux résultats de mesures effectuées sur des modèles ou des structures industrielles. En fait, l'amortissement est un phénomène complexe.

Pour revenir à la détermination des modes et des fréquences propres, les exemples traités par M. Caillot montrent que l'effet de confinement est primordial. L'influence de la vitesse ambiante du fluide reste faible sur les fréquences, sauf bien entendu si l'existence de ce mouvement provoque d'autres phénomènes tels qu'instabilité hydro-élastique ou flambage de la structure.

M. GIBERT. — L'effet de la viscosité du fluide a un rôle essentiellement sur l'amortissement de la structure vibrante. *Exemple* : Deux coques cylindriques concentriques, l'une rigide (épaisseur grande) l'autre vibrante (épaisseur $\sim 0,5$ mm), séparées par une lame d'eau d'épaisseur 5 mm (diamètre des cylindres ~ 200 mm).

Un calcul analytique bi-dimensionnel peut être effectué en supposant le fluide visqueux.

Une comparaison expérience-calcul en fluide visqueux ou non visqueux montre une bonne concordance en ce qui concerne les fréquences de résonance des premiers modes (les

effets d'inertie du fluide, très importants dans ce cas, sont donc bien estimés par le calcul).

En ce qui concerne les amortissements modaux, ils sont de l'ordre de 10^{-2} (le calcul en fluide visqueux retrouve cet ordre de grandeur). L'effet de la viscosité est donc faible vis-à-vis de l'effet d'inertie. Il est cependant important de le considérer pour l'estimation des amortissements qui sont des paramètres essentiels de l'analyse vibratoire des structures.

Ce qui vient d'être dit précédemment ne s'applique pas à certaines configurations particulières où le confinement est extrême : par exemple, les paliers fluides des machines tournantes. Dans ce cas, l'effet de la viscosité est prépondérant.

M. SAGNER. — On peut évaluer l'ordre de grandeur de l'influence de la viscosité en considérant l'équation du fluide, linéarisée pour les petits mouvements. Elle a la forme d'une équation de la chaleur et montre que la perturbation due à la viscosité se fait sentir dans une couche limite d'épaisseur $\sqrt{\nu/\omega}$ alors que l'effet d'inertie correspond au champ de vitesse potentiel qui se fait sentir sur une distance de l'ordre des dimensions du corps. Si le nombre de Reynolds $\omega^2 L/\nu$ est très grand, le rapport de ces deux grandeurs est très petit et l'effet de viscosité est négligeable.

M. BINDER. — Dans quelle mesure les effets de la viscosité modifient-ils les résultats obtenus pour le fluide parfait, notamment lorsqu'il y a décollement ?

M. le Président. — Le comportement des structures plongées dans des écoulements fortement perturbés fera l'objet d'un premier examen dans l'exposé relatif à l'effet des détachements tourbillonnaires du sillage.

Les études présentées ici se rapportent à la détermination des modes et des fréquences des structures vibrant en présence d'un milieu fluide initialement au repos. Les amplitudes des vibrations sont supposées très faibles. Dans le cas d'un fluide en mouvement, le calcul montre sur des exemples simples que la vitesse ambiante du fluide n'a que peu d'influence si le phénomène reste stable. Nous n'avons pas traité le cas des instabilités hydro-élastiques.

M. SAGNER. — Dans le seul cas où on a étudié l'influence d'un décollement (celui du cylindre circulaire) on constate que celui-ci n'apparaît que pour des grandes amplitudes de vibration. Il se traduit principalement par un terme d'amortissement élevé et une réduction modérée du terme d'inertie. Tout se passe comme si la force se déphasait par rapport à l'accélération en conservant sensiblement son module.