
Écoulements transitoires dans les massifs autour d'une galerie en charge

Application à la mise en service de l'ouvrage

*Transient leakage flow through the ground
surrounding a pressure tunnel*

Maurice Bouvard * et Jean-Jacques Niquet **

Introduction

Dans l'étude des souterrains, et plus particulièrement dans celle de galeries d'adduction d'eau, les phénomènes hydrauliques dans les structures, en particulier les écoulements poreux dans le terrain, dans le revêtement, constituent un élément très important pour la tenue et l'étanchéité de l'ouvrage. Ces actions deviennent d'ailleurs prédominantes lorsque les terrains, dans lesquels se trouve la galerie, compte tenu de leur bonne qualité, n'exercent pas d'effort particulier.

La connaissance approfondie des phénomènes hydrauliques dans les massifs et des échanges d'eau qui s'établissent entre l'ouvrage et le terrain permet d'alléger les revêtements des galeries, comme le montre M. Bouvard dans l'article cité en référence⁽¹⁾.

L'auteur s'intéresse, dans l'article cité ci-dessus, aux fuites de la galerie et aux efforts que subit le revêtement une fois que l'écoulement qui s'établit autour de la galerie est stabilisé, c'est-à-dire en période d'exploitation normale de l'ouvrage.

Pendant les phases transitoires (remplissage, vidange), et tant que le régime permanent n'est pas atteint, les résultats de l'étude précédente ne sont pas valables. Les efforts appliqués sur le revêtement et les pertes de la galerie sont d'ailleurs très nettement supérieurs en phase transitoire à ce qu'ils sont en régime permanent.

Pour ne pas risquer d'endommager le revêtement de la galerie, l'exploitant doit exécuter les mises en service et vidanges de son ouvrage avec une grande prudence et en ayant une connaissance aussi bonne que possible des limites de son ouvrage et des efforts auxquels il est à tout moment soumis.

On se propose, ici, d'étudier l'écoulement transitoire engendré dans le terrain par le remplissage d'une galerie, de déterminer de quelle façon s'établit le régime permanent d'échange d'eau entre la galerie et le terrain, dans le but de mieux définir comment doit se faire la mise en pression d'une galerie hydraulique en forte charge.

Etude de l'écoulement autour d'une galerie en charge en terrain sec

Dans ce chapitre, on étudie les caractéristiques de l'écoulement qui s'établit dans le terrain autour d'une galerie en charge creusée dans un terrain sec.

Formulation de l'écoulement (Rappel)

L'étude, déjà citée en référence, débute par la détermination analytique de cet écoulement à partir des hypothèses suivantes :

L'écoulement est naturellement supposé plan et la perméabilité du rocher, considéré comme homogène, est définie par le coefficient (isotrope) de perméabilité K . La galerie est supposée circulaire.

On montre que l'écoulement qui en résulte dans le terrain est identique à celui représenté par la superposition d'un écoulement engendré par une source débitant entre deux plaques et d'un écoulement parallèle de même débit.

(*) Docteur ès Sciences – Professeur à l'Ecole Nationale Supérieure d'Hydraulique de Grenoble.

(**) Ingénieur à la Société du Canal de Provence et d'Aménagement de la Région Provençale.

(1) "Les fuites de galeries en charge en terrain sec – Rôle du revêtement, des injections, du terrain". M. Bouvard – La Houille Blanche n° 4 (1975).

La fonction complexe caractérisant cet écoulement est la suivante :

$$f(z) = \frac{Q}{2\pi} \log \operatorname{sh}(\pi z/2a) + 3Qz/4a \quad (1)$$

Q est le débit de fuite de la galerie en régime établi
 a est la grandeur caractéristique de l'écoulement défini par la figure n° 1

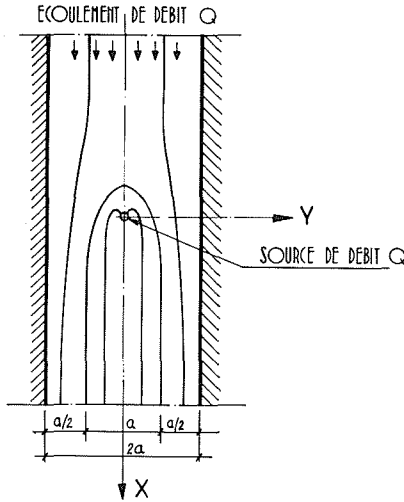


Figure 1 - Détermination du réseau d'écoulement.

On détermine alors dans cette étude la valeur de a en calculant la perte de charge de l'écoulement entre la galerie et le toit de la nappe sur la verticale de l'axe de la galerie

$$H_0 - b = \Delta h = \int_{R_0}^b U/K dx \quad (2)$$

où :

H_0 est la charge de la galerie
 b est la hauteur atteinte par le toit de la nappe au-dessus de la galerie

R_0 est le rayon de la galerie
 U est la vitesse de l'écoulement selon son axe de symétrie

On aboutit alors à l'expression :

$$H_0 - 3/4 R_0 = a/2\pi \log a/\pi R_0 \quad (3)$$

qui permet de calculer a .

Le calcul montre alors que b et a sont liés par la relation $b = -(a/\pi) \log 2$, tandis que, rappelons-le, $Q = Ka$. La figure 2 représente l'allure de cet écoulement.

Etude des lignes équipotentielles

A) Expression analytique des équipotentielles

Le réseau des lignes équipotentielles est obtenu en prenant la partie réelle de la fonction complexe définissant l'écoulement.

La formule (1) peut s'écrire :

$$f(z) = \underbrace{\frac{Q}{2\pi} \log r + 3Qx/4a}_{\text{équipotentielles}} + i \underbrace{\left(\frac{Q}{2\pi} \theta + \frac{3Qy}{4a} \right)}_{\text{lignes de courant}}$$

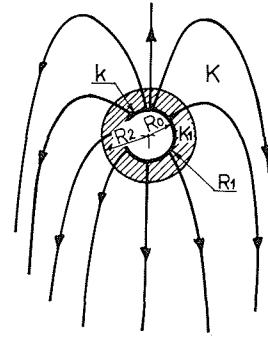


Figure 2 - Représentation de l'écoulement.

Définition des symboles

- R_0 = Rayon de la galerie
- e_1 = Epaisseur du revêtement
- e_2 = Epaisseur zone injectée
- $R_1 = R_0 + e_1$
- $R_2 = R_1 + e_2 = R_0 + e_1 + e_2$
- H_0 = Pression d'eau à l'intérieur de la galerie
- k = Coefficient de perméabilité du revêtement béton
- K_1 = Coefficient de perméabilité de la zone injectée
- K = Coefficient de perméabilité du terrain

Les équipotentielles sont données par la relation :

$$Q/2\pi \log r + \frac{3Q}{4a} x = \text{cst} = Qc$$

En remplaçant r par sa valeur, on obtient :

$$1/2 \pi \log \sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi x}{2a} + \sin^2 \frac{\pi y}{2a}} = c - \frac{3}{4a} x$$

En continuant le calcul, on peut facilement obtenir l'expression analytique suivante définissant les lignes équipotentielles, dans un repère où l'axe vertical est celui des x

$$\left. \begin{aligned} y &= \pm \frac{2a}{\pi} \operatorname{Arc} \sin u \\ u^2 &= e^{4\pi(c - \frac{3x}{4a})} - \operatorname{sh}^2 \frac{\pi x}{2a} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

B) Représentation graphique des équipotentielles

On a dessiné sur la figure 3 le réseau des équipotentielles ; les valeurs choisies pour les paramètres H_0 , charge de la galerie, K , perméabilité du terrain et R_0 , rayon de la galerie, sont les suivantes :

$$H_0 = 70 \text{ m} \quad ; \quad K = 10^{-7} \text{ m/s} \quad ; \quad R_0 = 1,875 \text{ m}$$

ce qui permet de déterminer a par la formule (3)

$$a = 137 \text{ m}$$

Sur ces courbes, figurent également la valeur du coefficient c apparaissant dans l'expression (4) ainsi que la perte de charge ΔH de l'écoulement entre l'équipotentielle considérée et la galerie.

Pour avoir l'équipotentielle correspondant à une pression donnée Δx , il suffit de chercher sur toutes les équipotentielles les points à l'altitude $-\Delta x$ par rapport à leur intersection avec la ligne de séparation.

Les relations (8) peuvent s'écrire également de la manière suivante :

$$e^{-\frac{2\pi x}{a}} - 2e^{-\frac{\pi x}{a}} \cos \frac{\pi y}{a} + 1 - 4e^{A\pi k} = 0 \quad (9)$$

Les isochrones

Les isochrones sont les lignes atteintes par les particules d'eau parties au même instant de la galerie.

Pour les déterminer, on part des expressions suivantes :

— Equations des lignes de courant (voir étude précédente déjà citée) :

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{\pi y}{2a}}{\frac{\pi x}{2a}} = \operatorname{tg} \left(\frac{2\pi\psi}{Q} - \frac{3\pi}{2a} y \right)$$

Vitesse :

$$\frac{dy}{dt} = \frac{Q}{4a} \frac{\sin \frac{\pi y}{a}}{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{a} - \cos \frac{\pi y}{a}}$$

On calcule ensuite le temps t mis par les particules fluides pour arriver sur une ordonnée définie y . On introduit dans ce but x en fonction de y , donné par la première équation, dans l'équation différentielle. Après intégration, on obtient :

$$\tau = \frac{\pi Q t}{a^2} = \log \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi y}{a} - A \right)}{\sin(-A) \sin \left(2 \frac{\pi y}{a} - A \right)}$$

avec :

$$A = \frac{2\pi}{Q} \psi$$

Cette expression donne t en fonction de y pour les différentes lignes caractérisées chacune par la constante A .

L'équation des isochrones s'obtient alors en éliminant A entre cette dernière équation et la première équation des lignes de courant.

On aboutit alors à :

$$e^{-\frac{2\pi x}{a}} - 2e^{-\frac{\pi x}{a}} \cos \frac{\pi y}{a} + e^{-\tau} = 0 \quad (10)$$

On remarquera dès maintenant que la forme des équations des isochrones est la même que l'équation des équipressions, aux constantes près.

Le régime transitoire

Si on suppose que la galerie est mise en pression brusquement, le terrain étant initialement sec, le régime permanent étudié précédemment est précédé d'un régime transitoire.

Considérations qualitatives

Pour atteindre le débit pendant cette période on peut raisonner de la façon suivante :

Le terrain s'imbibe suivant une auréole qui est symétrique par rapport à l'axe de la galerie.

La hauteur de cette auréole au-dessus de la galerie croît moins vite que sa hauteur dessous.

L'écoulement est favorisé par la gravité dans le second cas, et contrecarré dans le premier.

Soit x la hauteur atteinte par la ligne de saturation transitoire sur la verticale du centre de la galerie.

Sa progression sera alors définie par le phénomène suivant : toute la pression à l'intérieur de la galerie, moins la hauteur X (ou plutôt $X - R_0$) correspond à la perte de charge de l'écoulement souterrain sur la verticale. C'est alors cette perte de charge qui définit l'échelle des vitesses entre R_0 et X . C'est ainsi que :

— Initialement, on a $R_0 = X$. Toute la pression, à l'intérieur de la galerie se traduit par une perte de charge sur une longueur à la limite nulle (puisque $R_0 = X$). La vitesse est donc infinie, et le débit aussi.

— En régime permanent, au bout d'un temps infini, on a au contraire, $X = b$, c'est-à-dire que

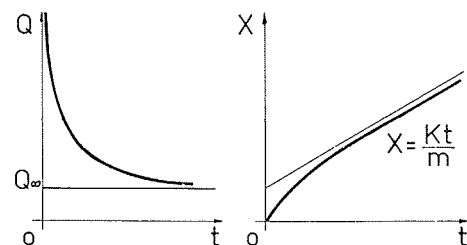
$$\Delta H = H_0 - b = \int_{R_0}^b \frac{U}{K} dx$$

qui n'est autre chose que l'équation (2).

Nous écrirons donc, en régime transitoire :

$$h = H_0 - X = \int_{R_0}^x \frac{U}{K} dx$$

Les variations de $Q(t)$ et de $X(t)$ auront donc a priori les formes indiquées ci-dessous



Hypothèse fondamentale

Nous allons admettre que :

“Les lignes de saturation atteintes par l'écoulement en régime transitoire sont représentées par les lignes d'égale pression de l'écoulement permanent”.

Cette hypothèse a été vérifiée avec une très bonne approximation dans des études d'écoulement filtrant par analogie de Hela-Shaw au laboratoire de l'École Nationale Supérieure d'Hydraulique de Grenoble⁽²⁾.

(2) Thèse Inthavong (Grenoble, 1971).

A défaut de démonstration nous pouvons apporter une bonne justification de cette hypothèse qui est très probablement exacte.

En se rapportant au chapitre précédent et aux équations (9) et (10) des lignes d'égalité pression et des isochrones, on s'aperçoit que ces équations sont identiques au terme constant près.

En régime permanent, les isochrones sont donc confondues avec les lignes d'égalité pression. On peut alors faire les deux remarques suivantes :

- dans le régime transitoire, les lignes atteintes par l'écoulement sont des lignes d'égalité pression puisqu'elles sont définies par le fait que la pression est égale sur leur contour à la pression atmosphérique ;
- par ailleurs, les lignes d'égalité pression d'un écoulement permanent sont telles que toutes les particules parties en même temps de la source y arrivent au même instant puisqu'elles sont également des lignes isochrones.

On peut alors considérer que n'importe quelle ligne d'égalité pression de l'écoulement permanent représente la limite d'un écoulement transitoire à un instant donné.

Calcul du débit de fuite en fonction de 'X'

L'évolution de la ligne de saturation est déterminée par l'étude du phénomène sur l'axe vertical (OX).

La vitesse verticale est donnée par (voir article précité) :

$$U = \frac{Q}{4a} \frac{ch \frac{\pi x}{2a}}{\frac{\pi x}{sh \frac{\pi x}{2a}}} + 3Q/4a$$

La perte de charge de l'écoulement dans le terrain sur un intervalle x_1 x_2 est obtenue par intégration

$$\Delta H = \int_{x_1}^{x_2} \frac{U}{K} dx$$

Entre les points d'abscisse R_0 et X la perte de charge est égale après intégration, à :

$$\frac{Q}{2\pi K} \log \frac{sh(\pi X/2a)}{sh(\pi R_0/2a)} + \frac{3}{4} \frac{Q}{Ka} (X - R_0) = H_0 + X$$

Le débit a donc pour valeur :

$$Q(X) = \frac{2\pi K(H_0 + X)}{\log \frac{sh(\pi X/2a)}{sh(\pi R_0/2a)} + \frac{3\pi}{2a}(X - R_0)} \quad (11)$$

On remarque bien que :

- lorsque $X \rightarrow R_0$ $Q \rightarrow \infty$
- lorsque $X \rightarrow \infty$ $Q \rightarrow Ka$ (débit de fuite de l'écoulement permanent)

Calcul de 'X' en fonction du temps

La vitesse U selon l'axe Ox est égale à $m dx/dt$, m représentant le coefficient de porosité du terrain ; en

tenant compte de ce que nous avons vu plus haut, on peut écrire :

$$U = \frac{dX}{dt} = \frac{Q(X)}{4am} \left(\frac{ch \frac{\pi X}{2a}}{\frac{\pi X}{sh \frac{\pi X}{2a}}} + 3 \right) \quad (12)$$

où $Q(X)$ a l'expression donnée en (11).

On peut alors calculer X en fonction de t puis Q en fonction de t .

Résolution numérique

Le calcul de X en fonction du temps a été fait par intégration pas à pas en partant d'une valeur de $X_0(t)$ obtenue par intégration directe pour $X_0(t)$ voisin de (R_0) .

A) Solution analytique pour X voisin de R_0

On a posé :

$$X = (1 + \lambda) R_0$$

On reporte cette expression de X dans les équations (11) et (12). Après développement en série des fonctions hyperboliques, on obtient une équation différentielle simple permettant de conduire le calcul pour λ petit. Cette expression est la suivante :

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{\lambda}{\alpha + \lambda} = \delta$$

dans laquelle α , δ , sont des constantes qui s'expriment en fonction de H_0 , R_0 et a

$$t = \frac{1}{\delta} \left[\frac{1}{\beta} \lambda - \frac{\alpha}{\beta^2} \log(\alpha + \beta\lambda) + \frac{\alpha}{\beta^2} \log \alpha \right]$$

B) Solution numérique pour X plus grand

A partir du couple de valeurs (t, X) trouvé précédemment pour X petit, on résout numériquement l'ensemble des équations (11) (12) par une intégration pas à pas.

Le pas de cette intégration est variable : il augmente pour tenir compte du caractère asymptotique du phénomène.

C) Extension au cas de plusieurs milieux

L'extension de cette théorie, au cas de plusieurs milieux, ne pose pas de problèmes particuliers, mais complique les formules puisqu'il est nécessaire de faire intervenir les perméabilités K_1, K_2, K_3, \dots , et les porosités m_1, m_2, m_3, \dots des différents milieux, et d'examiner ce qui se passe milieu par milieu.

Ce calcul est conduit de la même manière que celui présenté ci-avant et s'inspire de celui mené dans l'article cité précédemment pour l'étude des fuites de galerie dans un terrain composé de plusieurs milieux concentriques de perméabilité différente.

Il est surtout intéressant pour l'étude de la mise en eau d'une galerie revêtue et injectée et pour voir l'influence du revêtement et des injections sur les vitesses d'extension de la zone saturée.

Ce calcul n'est théoriquement valable que si les limites des milieux injectés coïncident avec des isochrones de l'écoulement transitoire, ce qui n'a, bien entendu, aucune raison d'être le cas. On remarquera cependant que ces isochrones sont pratiquement des cercles au voisinage de la galerie, précisément dans la zone revêtue ou injectée (dont les dimensions sont très faibles vis-à-vis de a). L'approximation se trouve alors justifiée.

D) Représentation graphique

La figure 4 représente l'évolution de la zone de terrain saturée d'eau autour de la galerie ; la partie gauche est relative à un terrain de perméabilité 10^{-6} m/s et de porosité 5‰, la partie droite à un terrain de perméabilité 10^{-7} m/s et de porosité 2,5‰.

Dans les deux cas, la galerie est supposée être instantanément mise en pression à la valeur de 70 m de hauteur d'eau.

On remarque, ce qui est assez intuitif, que le remplissage du terrain s'effectue beaucoup plus rapidement lorsque la perméabilité du terrain est plus grande. Dans ce cas, en effet, l'eau circule plus vite dans le terrain et les pertes de la galerie sont plus élevées.

Il faut compter, selon la perméabilité du terrain, d'une à plusieurs semaines pour qu'il soit possible de considérer que le rocher au voisinage de la galerie se trouve saturé.

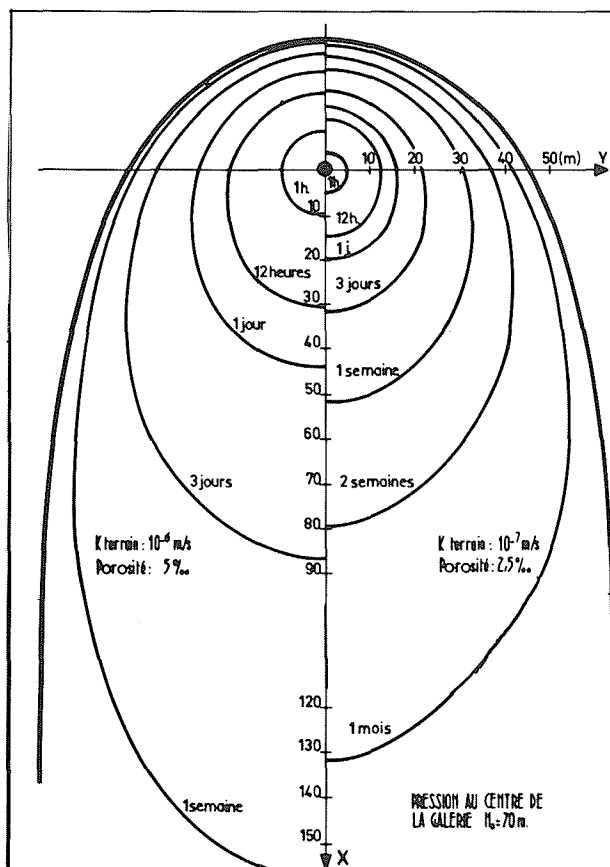


Figure 4 — Progression de la zone saturée pendant le régime transitoire.

Il est également possible, grâce aux formules établies précédemment, de donner les variations du débit de fuite de la galerie et des pressions agissant sur le revêtement en fonction du temps, résultats qui seront utilisés au chapitre suivant pour l'étude de la mise en eau d'une galerie en charge.

Application à la mise en eau d'une galerie en charge en terrain sec

Principe de dimensionnement des revêtements des galeries en charge

Il est maintenant couramment admis que le revêtement des galeries en charge n'est soumis qu'à une partie p_i de la charge d'eau H_0 qui existe dans la galerie.

Cette pression p_i est égale à la perte de charge à travers le revêtement de l'écoulement qui s'établit autour de la galerie.

Elle peut être calculée à partir des résultats et formules théoriques qui figurent dans l'article déjà cité en référence et dépend des perméabilités du revêtement, de la zone injectée et de celle du terrain, ainsi que de l'épaisseur du revêtement et de l'auréole du terrain injecté.

Problème posé par la mise en eau

Le revêtement étant calculé pour résister à une pression d'eau intérieure p_{il} au moins égale à p_i , qui correspond aux poussées auxquelles il se trouve soumis dans la phase d'exploitation normale de l'ouvrage (il est, en effet, inutile de le surdimensionner pour qu'il résiste aux pressions qu'il subit dans les phases transitoires), il ne faut qu'à aucun moment on y applique une pression supérieure à p_{il} ce qui risquerait de le détériorer.

Ceci pourrait arriver au cours des opérations de mise en charge de la galerie si on portait l'eau dans la galerie à la pression correspondante au fonctionnement normal de l'ouvrage, soit H_0 qui est largement supérieure à p_{il} .

Données de base pour l'établissement d'un programme de mise en eau

Pour amener l'ouvrage à sa pression de service H_0 , il est donc nécessaire de monter en pression par paliers.

Dans un premier stade, on remplit la galerie et on la maintient à une pression p_1 telle que $p_1 < p_{il}$.

Au début de l'opération, la pression qui s'applique sur le revêtement est p_1 . Puis cette pression diminue au fur et à mesure que s'établit l'écoulement dans le terrain et tend vers une valeur limite p_{1l} très inférieure à p_1 . Cette valeur limite peut être calculée de la même manière que p_i (voir plus haut).

Le temps nécessaire pour pouvoir considérer que le régime permanent est atteint peut être déterminé par le calcul grâce aux résultats établis au chapitre précédent.

La diminution du débit de fuite de la galerie en fonction du temps permet de suivre l'établissement

du régime permanent. Lorsque ce débit est égal à moins de 10 % près à sa valeur finale, on peut admettre que le régime permanent est atteint (voir figure 5). Selon les porosités et perméabilités des différents milieux, ce temps peut varier de quelques jours à quelques semaines. Il est alors possible d'augmenter la pression dans la galerie de Δp et attendre l'établissement du nouveau régime d'écoulement.

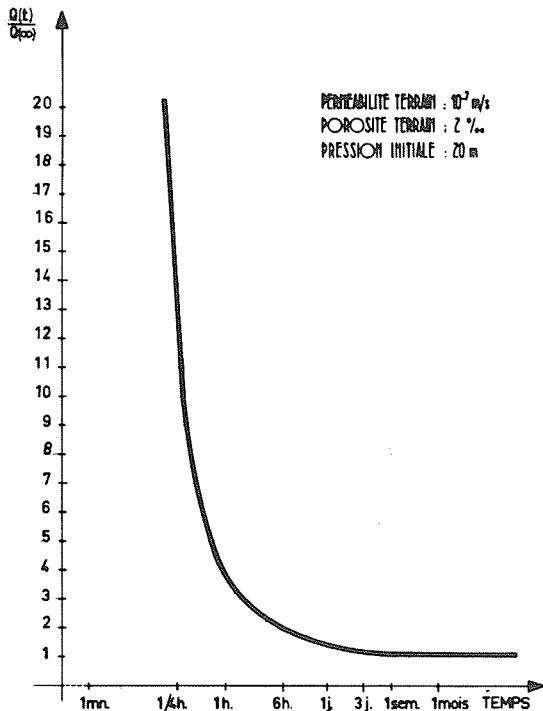


Figure 5 — Etablissement de l'écoulement autour d'une galerie revêtue et injectée. Grandeur caractéristique $Q(t)/Q(\infty)$.

On procède de cette façon, avec des paliers de montée en pression jusqu'à ce que la pression de service soit atteinte.

Remarque : Comme on le constate théoriquement, il est bon de savoir que, initialement, les débits de fuite peuvent être très élevés sans que rien d'anormal ne se soit produit.

Application

Ces développements théoriques et les résultats obtenus ont été appliqués pour définir le programme de mise en eau d'une galerie d'adduction d'eau fonctionnant sous une charge moyenne H_0 de 70 m de hauteur d'eau. Cette galerie est revêtue en béton et le terrain autour de la galerie a été injecté sur une épaisseur correspondant approximativement au rayon de la galerie.

Nous avons alors défini des paliers de montée de pression de deux à trois semaines avec des incréments de charge de 25 m, en tenant compte des paramètres caractérisant le terrain et de la résistance du revêtement.

Il est, bien sûr, absolument nécessaire que des essais soient effectués pendant la mise en eau pour préciser les résultats obtenus par le calcul.

Ces essais, qui doivent rester simples, ont pour but de déterminer l'évolution des pertes de la galerie en fonction du temps. Pour cela, on peut enregistrer en continu le débit d'eau fourni à la galerie pour la maintenir à la pression voulue, ou mesurer, si cela est possible, l'abaissement du plan d'eau dans une cheminée ou un puits à différents moments après avoir interrompu l'alimentation.

L'ensemble de ces résultats permet alors de définir des consignes d'exploitation qui resteront valables pendant la durée de vie de l'ouvrage, chaque fois qu'il sera vidangé.

Conclusion

Il est bien certain que l'on ne peut pas considérer le calcul présenté ici, de même que celui des régimes permanents, comme représentatif dans le détail des phénomènes.

Le rocher n'est pas isotrope. Il est hors de doute, d'autre part, que la porosité du rocher présente une signification en réalité complexe : l'eau circule vraisemblablement par des diaclases ou des fissures bien singularisées, ce qui n'empêche certainement pas que les vides intergranulaires soient remplis d'eau pratiquement stagnante, à une pression définie par celle de l'écoulement dans les diaclases.

Mais, de toute façon, l'analyse basée sur le concept suivant lequel la pression à laquelle est soumise une structure poreuse :

- se transforme en perte de charge de l'écoulement poreux qui en résulte,
- pénètre ainsi, en quelque sorte, la structure poreuse qui contient ce fluide,
- se répartit en fonction des singularités de cet écoulement, et notamment suivant celles dues aux anomalies de perméabilité,

conduit à une interprétation beaucoup plus correcte du phénomène que celle basée sur le concept de pression appliquée en surface, et permet au moins de raisonner dans des conditions satisfaisantes.

L'étude présentée ici aboutit alors à une meilleure connaissance qualitative et quantitative de l'établissement dans le terrain autour de la galerie du régime permanent de l'écoulement engendré par les pertes de la galerie.

Elle donne des idées de base pour définir le programme de mise en service d'une galerie hydraulique en charge (nombre de paliers, durée de chaque palier), qui dans tous les cas doit être progressive, en fonction des hypothèses choisies pour le calcul de l'ouvrage et de ses possibilités.

Elle demande, au cours de la mise en service, le contrôle de l'évolution des fuites de la galerie, pour améliorer les résultats théoriques obtenus par le calcul et, si possible préalablement à la mise en service, des essais visant à déterminer les coefficients de perméabilité et les porosités du terrain de la zone injectée et du revêtement, ces essais ayant d'ailleurs une importance capitale pour l'étude de la stabilité du revêtement.

ANNEXE

Au moment de mettre sous presse cette étude, nous croyons utile de la compléter en mentionnant une application suggérée lors de la mise en charge expérimentale d'un tronçon de galerie.

Nous avons précisé, au cours du texte, que si l'on montait brusquement la pression lorsque, initialement, le terrain n'est pas encore imbibé, le débit de fuite était infini. Or, lorsque la galerie est alimentée par pompage, le débit est évidemment limité à une valeur bien définie. Initialement donc, le remplissage du milieu poreux se fait à débit constant et c'est la pression dans la galerie qui croît en fonction du temps, suivant une certaine loi.

Les équations établies ci-dessus permettent de retrouver cette loi, dans les mêmes conditions que la loi $Q(t)$ à pression constante. Il suffit d'introduire la constance du débit et au contraire d'étudier la variation $Ho(t)$.

L'équation (11) s'écrit dans ce cas :

$$Ho(t) = \frac{Q}{2\pi K} \left(\log \frac{sh \frac{\pi X}{2a}}{\frac{\pi Ro}{sh \frac{\pi X}{2a}}} + \frac{3\pi}{2a} (X - Ro) \right) - X \quad (a)$$

avec, d'autre part, l'équation (12), qui reste inchangée :

$$\frac{dX}{dt} = U = \frac{Q}{4am} \left(\frac{ch \frac{\pi X}{2a}}{sh \frac{\pi X}{2a}} + 3 \right) \quad (b)$$

L'intégration à partir de $X = Ro$ de l'équation (b), qui, à la différence du cas précédent, est possible si $Q = \text{Constante}$, permet d'avoir l'équation liant X et t . On obtient :

$$\frac{\pi Q}{a^2 m} t = \log \left(\frac{e \frac{2\pi X}{a} - 2e \frac{\pi Ro}{a} - 1}{e \frac{2\pi Ro}{a} - 2e \frac{\pi X}{a} - 1} \right) \quad (c)$$

L'ensemble des deux équations (a) et (c) permet alors d'obtenir Ho en fonction de t .

A priori, $Ho(t)$ croîtra de la valeur zéro à Ho tel que le débit injecté soit égal aux fuites données par la formule contenant le paramètre Q, K et Ro :

$$Ho - \frac{3}{4} Ro = \frac{Q}{2\pi K} \log \frac{Q}{\pi K Ro} \quad (3)$$

Ho sera alors atteinte, asymptotiquement, au bout d'un temps théoriquement infini.

Rien ne s'opposerait à ce qu'on introduise dans le calcul la caractéristique de la pompe d'injection $Q(Ho)$, en tous cas sous forme de paliers discontinus. Il n'est simplement pas sûr que la difficulté à connaître les paramètres du problème (K et m , en particulier), justifie un tel raffinement.

Le relevé expérimental de $Q, Ho(t)$ permettrait, sans doute, de mieux connaître les valeurs de K et m , donc le terrain, ainsi que le mécanisme physique réel des phénomènes analysés dans cette étude.