Un modèle de gestion à long terme à objectifs multiples d'une ressource en eau

Application au Lac de Tibériade

A long-term multipurpose water resource management model

Example of its application for Lake Tiberias

Gérard Chetboun

Ingénieur-Docteur ès sciences
Chef du Département des Ressources en Eau
Direction de l'Hydrologie, Commissariat à l'Eau, Israël

Notations

Usi	Volume à la fin de la saison sèche *i*.
Uwi	Volume à la fin de la saison des pluies *i*.
Umw	Volume minimum à la fin de la saison des pluies
Ums	Volume minimum à la fin de la saison sèche
Pwi	Pompage durant la saison des pluies *i*.
Psi	Pompage durant la saison sèche *i*.
Pi	*Pwi* + *Psi* pompage durant l'année *i*.
Pmw	Pompage minimum garanti en hiver.
Pms	Pompage minimum garanti en été.
Pm	*Pmw* + *Pms* Pompage minimum garanti annuellement.
*U*max	Niveau du trop plein.
OVFwi	Débit du trop plein durant la saison des pluies *i*.
OVFsi	Débit du trop plein durant la saison sèche *i*.
Fwi	Remplissage durant la saison des pluies *i*.
Fsi	Remplissage durant la saison sèche *i*.
α	Prix de l'unité de volume d'eau "garantie".
β	Prix de l'unité de volume d'eau "complémentaire".
*L*1*i*	Fonction perte durant l'année *i* dûe au pompage minimum garanti.
*R*1	Fonction risque dûe au pompage minimum garanti.
*L*2*wi*	Fonction perte dûe à l'abaissement du niveau d'eau au-delà d'une valeur critique en hiver.
*L*2*si*	Fonction perte dûe à l'abaissement du niveau d'eau au-delà d'une valeur critique en été.
*L*2*i*	*L*2*wi* + *L*2*si* Fonction perte dûe à l'abaissement du niveau d'eau durant l'année en cours *i*.
*R*2	Fonction risque dûe à l'abaissement du niveau d'eau.
j	Niveau d'eau en m au-dessous du niveau critique.
θwi	Probabilité que le niveau d'eau en hiver se trouve dans l'intervalle $(j-1, j)$.
θsj	Probabilité que le niveau d'eau en été se trouve dans l'intervalle $(j-1, j)$.
$\lambda 1$	Unité d'évaluation des "dégats" dans la fonction Risque *R*1.
$\lambda 2$	Unité d'évaluation des "dégats" dans la fonction Risque *R*2.

Introduction

Le concept d'un approvisionnement constant et garanti prélablement par le fournisseur est d'une importance primordiale dans toute politique de gestion des ressources en eau.

Cependant, en raison de la nature aléatoire du remplissage, toute garantie d'adduction constante ne permet plus le contrôle du niveau de l'eau, et, cause éventuellement certains dégâts.

Ces dégâts se manifestent soit par un niveau trop haut, (dégâts dus aux inondations, gaspillage de l'eau, désertion du tourisme par manque de plage, etc...) soit par un niveau trop bas, (dégâts aux pêcheries et à la plaisance par assèchement des ports, et surtout détérioration de la qualité des eaux, exemple le cas spécifique du lac de Tibériade où la concentration en T.D.S augmente lorsque le niveau d'eau diminue).

Aussi la politique de gestion suggérée devra fixer d'une part le niveau de pompage minimum garanti annuellement et d'autre part limiter les fluctuations du niveau d'eau par une borne maximum et minimum.

Cette politique sera associée à deux fonctions de perte ("loss function")

a) Pertes pour l'économie nationale dues à une adduction garantie minimum fixée trop bas. Cette perte se traduit par une incapacité pour le consommateur de s'organiser et d'intégrer éventuellement des quantités fournies plus grandes que celles garanties.

b) Pertes dûes aux détériorations du réservoir par un niveau d'eau trop bas. Cette perte est d'une nature stochastique, due aux fluctuations aléatoires du remplissage annuel.

(Les espérances mathématiques de ces deux fonctions seront définies comme fonctions de risque).

Cet article présente une méthodologie pour déterminer les deux paramètres qui minimiseront les deux fonctions précédentes. Ces deux fonctions de risque sont contradictoires et du fait qu'elles n'ont pas d'unités communes le problème prend un caractère à objectifs multiples.

La nature aléatoire du remplissage rend le problème très complexe et une solution analytique est très difficile ; aussi nous proposons une solution par simulation.

Politique d'opération du réservoir

Considérons un réservoir. La distribution aléatoire du remplissage est connue.

L'unité de temps proposée est la saison (saison sèche et saison des pluies).

Durant la saison sèche le remplissage peut prendre éventuellement des valeurs négatives si l'évaporation est supérieure aux débits d'entrée.

Soit Qwi le débit qu'il est possible de disposer à la fin de la saison des pluies i s'il n'y avait pas de pompage

$$Qwi = Usi - 1 - Umw + Fwi \tag{1}$$

Les critères de pompage durant la saison des pluies seront :

$$Pwi = \begin{cases} Pmw & \text{si} \quad Qwi \leqslant Pmw \\ Qwi & \quad Pmw < Qwi < U\max - Umw \\ U\max - Umw & \quad Qwi \geqslant U\max - Umw \end{cases} \tag{2}$$

Il s'en suit que le trop plein durant la saison des pluies sera :

$$OVFwi = \begin{cases} Usi - 1 - U\max + Fwi & \text{si } Usi - 1 - U\max + Fwi > 0 \\ 0 & \quad Usi - 1 + U\max + Fwi \leqslant 0 \end{cases} \tag{3}$$

Le volume de l'eau à la fin de la saison des pluies sera :

$$Uwi = Usi - 1 + Fwi - Pwi - OVFwi \tag{4}$$

D'une façon analogue les critères de pompage durant la saison sèche seront :

$$Psi = \begin{cases} Pms & \quad Qsi \leqslant Pms \\ Qsi & \text{si} \quad Pms < Qsi < U\max - Ums \\ U\max - Ums & \quad Qsi \geqslant U\max - Ums \end{cases} \tag{5}$$

lorsque :

$$Qsi = Uwi - Ums + Fsi \tag{6}$$

Le trop plein durant la saison sèche sera :

$$OVFsi = \begin{cases} Uwi - U\max + Fsi & \text{si} \quad Uwi - U\max + Fsi > 0 \\ 0 & \quad Uwi - U\max + Fsi \leqslant 0 \end{cases} \tag{7}$$

Le volume dans le réservoir à la fin de la saison sèche sera :

$$Usi = Uwi + Fsi - Psi - OVFsi \tag{8}$$

Optimisation de la politique d'opération.

Fonction de Risque dûe au pompage minimum garanti

Le producteur s'engage à fournir annuellement une quantité d'eau minimale Pm.

Le prix de l'unité de cette eau sera α. Ce prix est élevé. Mais le consommateur est prêt à payer ce prix dans la mesure où une quantité d'eau livrée lui est garantie.

Lorsque la situation des réserves le permet, il est alors possible de compléter l'adduction par une nouvelle quantité d'eau.

Le prix β de cette eau complémentaire sera inférieur au prix précédent.

Le gain du producteur sera :

$$Bi = \alpha Pm + \beta(Pi - Pm) \tag{9}$$

La perte du producteur sera définie par le manque à gagner s'il avait vendu toute sa production au prix fort α.

La fonction perte sera donc :

$$L1i = (\alpha - \beta) . Pi - (\alpha - \beta) . Pm \tag{10}$$

Du fait de la nature aléatoire du pompage Pi il est nécessaire de considérer la fonction risque $R1$ qui est l'espérance mathématique de la fonction perte

$$R1 = \overline{L1i} = (\alpha - \beta) . (\bar{P} - Pm) \tag{11}$$

où $\bar{P}$ est l'espérance mathématique du pompage Pi.

Fonction de Risque dûe à la détérioration du réservoir

Il a été vu précédemment que la baisse du niveau d'eau pouvait entraîner certains dégâts. Nous supposons donc que ces dégâts peuvent être évalués quantitativement par une fonction $L2i$. Il est évident que l'appréciation de ces dégâts sera différente en hiver qu'en été. En effet si le niveau d'eau est au-dessous d'une certaine valeur critique en hiver, il y restera toute l'année et les dégâts seront amplifiés en été. Tandis que si ce phénomène se passe en été il y a de fortes chances pour que le remplissage d'hiver comble ce déficit. Les fonctions pertes $L2is$ et $L2iw$ en été et en hiver seront également fonction du déficit durant ces périodes respectives.

Donc, la fonction perte dûe au niveau trop bas du réservoir sera :

$$L2i = L2is + L2iw$$

$$\text{avec} \quad L2is = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad Usi \geqslant Ums \\ L2s\,(Dsi) & \text{si} \quad Usi < Ums \end{cases}$$
$$Lsiw = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad Uwi \geqslant Ums \\ L2w(Dwi) & \text{si} \quad Uwi < Ums \end{cases} \qquad (12)$$

Dsi et *Dwi* sont les déficits en hiver et été

$$Dsi = Ums - Usi$$
$$Dwi = Ums - Uwi \qquad (13)$$

Du fait de la nature aléatoire de cette fonction perte, nous ne considérerons uniquement que l'espérance mathématique de cette fonction, c'est-à-dire la fonction risque

$$R2 = \int_0^\infty \theta s\,(D)\,L2s\,(D)\,dD + \int_0^\infty \theta w\,(D)\,L2w\,(D) dD \quad (14)$$

$\theta s(D)$ et $\theta w(D)$ sont les fonctions de distribution des déficits en hiver et en été.

Optimisation de l'opération

L'objectif est de minimiser aussi bien la fonction risque $R1$ que la fonction risque $R2$. Ces deux fonctions sont contradictoires. En effet $R1$ est minimum lorsque $R2$ est maximum et inversement. La méthode proposée est celle des solutions préférentielles ("efficient solution"). Il est possible de démontrer (Haimes, 75) que lorsque $R2$ est fixé, il n'y a qu'une solution qui minimise $R1$ et inversement.

Ainsi le décideur devra apporter de nouveaux éléments afin de pouvoir choisir parmi l'ensemble des solutions préférentielles.

Application au lac de Tibériade

Le modèle hydrologique

Ce modèle fut déterminé empiriquement en considérant l'influence de la pluie sur le remplissage du réservoir. Il a été établi (Ben Zvi, 1976) que l'ensemble des apports se subdivisaient en deux parties : d'une part l'apport dû à la pluie de l'année en cours et d'autre part l'apport dû à la pluie de l'année précédente.

Si Ri est la pluie en mm de l'année en cours i, l'apport en million de mètres cubes sera :

a) en hiver

$$F2w2i = \begin{cases} 0 & Ri \leqslant 250 \text{ mm} \\ 10^{-19.23}\; Ri^{8.43} & 250 < Ri < 350 \text{ mm} \\ 10^{-3.29}\; Ri^{2.14} & Ri \geqslant 350 \text{ mm} \end{cases} \quad (15)$$

b) en été

$$Fsi = \begin{cases} -100 & Ri \leqslant \; 300 \text{ mm} \\ 1.53\,Ri^{0.38} \\ +\,(Ri - 250)\,(100 \; - Ri)\,533.10^{-6} \\ -\,100 \quad 300 \leqslant & Ri < 1\,500 \text{ mm} \\ 500 & Ri \geqslant 1\,500 \text{ mm} \end{cases}$$

L'apport durant l'année en cours i dû à la pluie de l'année précédente sera :

$$Fw1i = \begin{cases} 0 & Ri - 1 \leqslant 300 \text{ mm} \\ 7.8\,\sqrt{Ri - 1} & Ri - 1 > 300 \text{ mm} \end{cases}$$

Il est évident que l'ensemble des apports durant l'année en cours i sera en hiver :

$$Fwi = Fw1i + Fw2i$$

Il est supposé que la pluie est distribuée selon une loi log-normal de moyenne 474 mm/an et de déviation standard 149 mm/an.

Les fonctions de risque

Il a été démontré par simulation que l'espérance mathématique du pompage est

$$\overline{P} = 400 \text{ Millions de m}^3 \qquad (16)$$

donc (11) devient

$$R1 = (\alpha - \beta)\,.\,(400 - Pm) \qquad (17)$$

On peut considérer que sur chaque apport de 100 millions de m^3 sur le pompage minimum garanti, la fonction de risque $R1$ diminue de $\lambda 1$:

$$\lambda 1 = -\frac{dR1}{d\,Pm} = \alpha - \beta \qquad (18)$$

$\lambda 1$ représente la différence de prix entre les deux catégories d'eau livrée.

Pour faciliter les calculs on considèrera que la fonction $R1$ est une fonction en escalier (fig. 1).

Afin d'établir la fonction risque $R2$, équation (14), il est supposé connu les fonctions pertes $L2s$ et $L2w$.

Ces deux fonctions sont également en escalier, elles sont fonction du déficit, c'est-à-dire de la baisse du niveau d'eau au delà d'une certaine valeur critique (fig. 2 et fig. 3). Ces fonctions prennent donc les valeurs $L2s(j)$ mesure en unité de dégât $\lambda 2$ pour le niveau d'eau j en mètre au-dessous de la valeur critique.

Soit θwj et θsj les probabilités en été et en hiver que les niveaux d'eau se trouvent dans l'intervalle $(j - 1, j)$.

Il s'ensuit que la fonction risque $R2$ sera (14)

$$R2 = \sum_{j=1}^{j-4} \theta sj\; L2sj + \sum_{j=1}^{j=4} \theta wj\; L2wj \qquad (19)$$

Résultat de la simulation

Les variables de décision à déterminer sont :

– la quantité de pompage minimum garanti Pm,

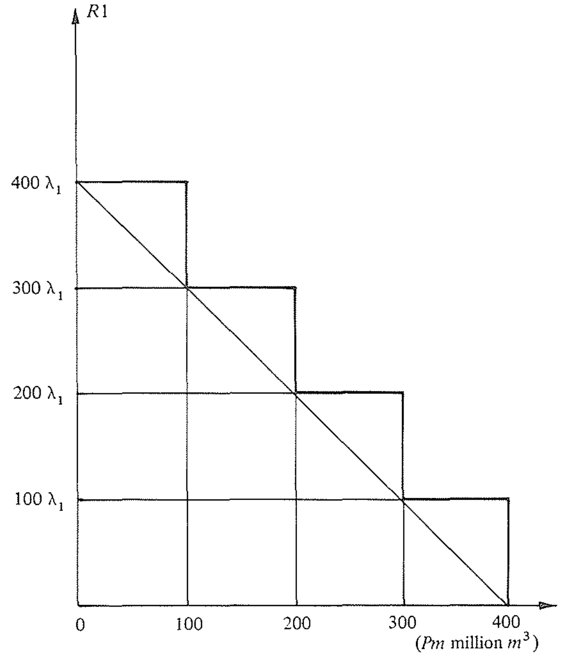

Figure 1 – Fonction "Risque" $R1$, due au pompage minimum garanti.

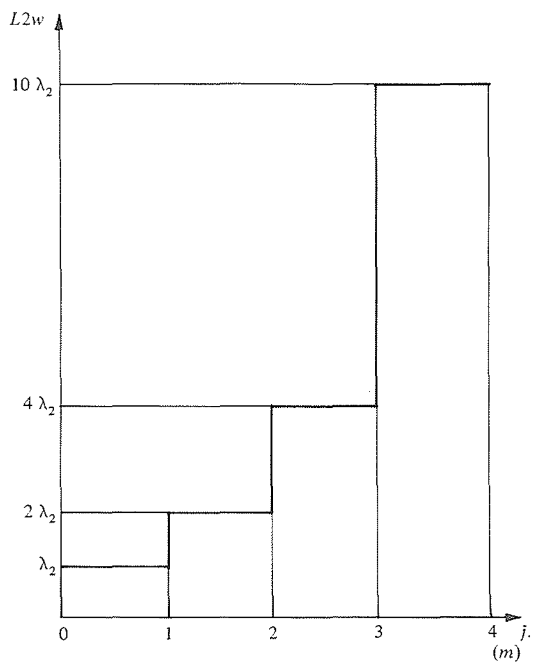

Figure 2 – Fonction "Perte" $L2w$, due à l'abaissement j du niveau de l'eau au-delà du niveau critique à la fin de la saison des pluies.

– le niveau d'eau minimum à la fin de la saison des pluies Umw.

Il est supposé que le niveau d'eau minimum à la fin de la saison sèche est une variable d'état, qui représente en fait le niveau critique au-delà duquel la fonction $L2i$ n'est pas nulle.

Cette valeur représente le niveau d'eau de – 212 m. (Ben Zvi, 1974)

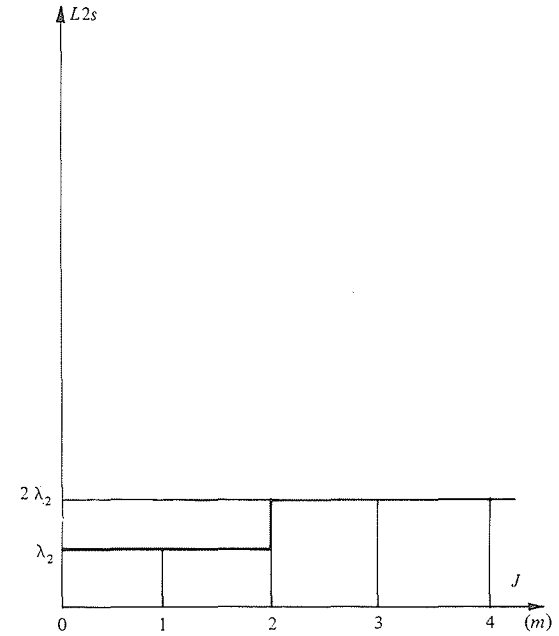

Figure 3 – Fonction "Perte" $L2s$, due à l'abaissement j du niveau de l'eau au-delà du niveau critique à la fin de la saison sèche.

Il a été calculé les valeurs de fonctions risques $R1$ et $R2$ à l'aide d'une simulation sur 1 000 ans pour des valeurs différentes des deux variables de décisions, présenté plus haut (fig. 4).

Il est supposé que la période de simulation est suffisamment grande afin d'éviter des fluctuations aléatoires sur les résultats.

Les observations de cette simulation sont :

– Le pompage, P, de fait à long terme n'est pas fonction du pompage minimum garanti

$$\text{pour } P < 400 \text{ M MC/an}$$

– Le pompage minimum garanti Pm est très nettement correlatif avec θw et θs.

– La position de la variable de décision Umw influence seulement le partage du pompage de fait entre l'hiver et l'été suivant la loi :

$$Pwi = (.116 + .354\, \Delta h)\, .\, Pi \tag{20}$$

Pi est le pompage de fait annuellement durant l'année i.

Δh est la différence entre le niveau d'eau minimum à la fin de la saison des pluies et le niveau d'eau minimum à la fin de la saison sèche, donc

$$\Delta h = \frac{Umw - Ums}{S} \tag{21}$$

S étant la surface du Lac : $S = 164 \text{ km}^2$.

Le pompage de fait en été sera donc :

$$Psi = Pi - Pwi \tag{22}$$

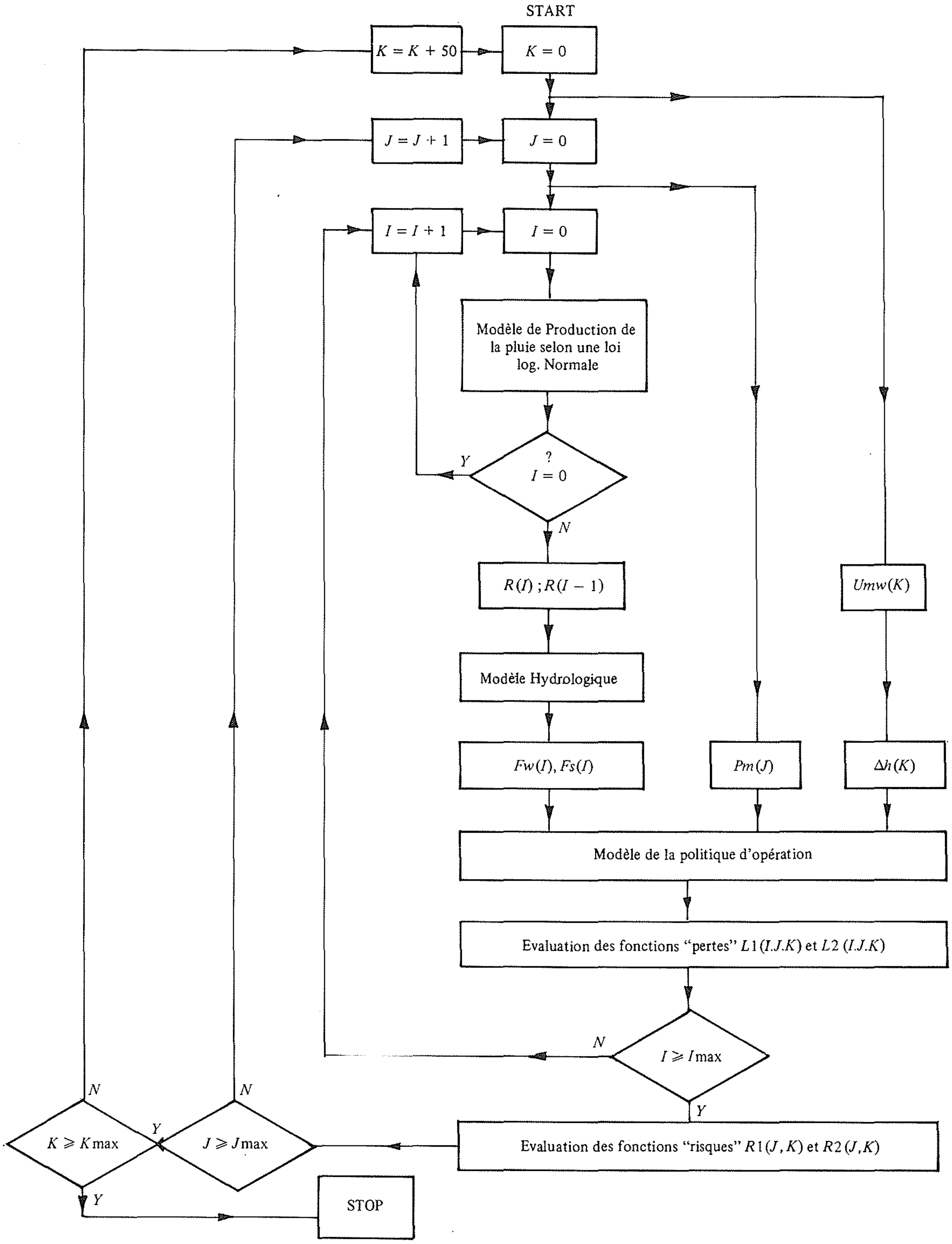

Figure 4 — Diagramme représentant les différentes étapes de la simulation.
I : index de l'année i (Imax = 1 000 ans)
J : index du niveau en m en-dessous du niveau critique (Jmax = 4 m)
K : index du pompage minimum garanti (K max = espérance mathématique du pompage = 400 mmc)

Il est supposé que l'équation (20) est également vraie pour le pompage minimum garanti *Pm*. Ainsi, si *Pm* est connu il pourra être possible d'établir le pompage minimum garanti en hiver et en été selon (20) et (22).

Détermination des solutions préférentielles

Sur un même tableau les fonctions $R1$ et $R2$ sont présentées, pour des valeurs différentes des variables de décision, *Pm* pompage minimum garanti, et Δh niveau d'eau minimum à la fin de la saison des pluies lorsque la base de référence est le niveau d'eau minimum à la fin de la saison sèche.

Pour *Pm* et Δh donnés, la valeur au-dessus est $R1$ en unité $\lambda 1$ et la valeur au dessous est $R2$ en unité $\lambda 2$.

Δh (m) / *Pm* million m³	0	0,5	1	1,5	2
0	400 668	400 18	400 10	400 6	400 5
100	300 785	300 103	300 67	(5) 300 35	300 48
200	200 1 144	200 311	200 293	(4) 200 214	200 269
250	150 1 431	150 600	150 574	(3) 150 474	150 483
300	100 2 030	100 1 197	100 1 158	(2) 100 834	100 877
400	0 4 649	0 3 995	0 3 843	0 2 907	0 2 441

Remarquons que la fonction $R1$ est seulement fonction de *Pm*.

Pour toute valeur de $R1$ donnée il peut être retenu la valeur minimum de $R2$.

L'ensemble des solutions

$$R2 \text{ minimum} = f(R1) \qquad (23)$$

sont l'ensemble des solutions préférentielles. Elles sont soulignées dans le tableau précédent par un chiffre entre parenthèse.

Il est nécessaire d'ajouter de nouveaux critères afin que le décideur puisse choisir une solution parmi l'ensemble de toutes les solutions préférentielles (fig. 5).

Définissons le vecteur "dégât" dans le plan $R1$, $R2$ par

$$F1 = \left\{ \begin{array}{l} R1 \text{ max) min} \\ R2 \text{ max) min} \end{array} \right.$$

Dans notre cas

$$F1 = \left\{ \begin{array}{l} 400\,\lambda 1 \\ 2\,441\,\lambda 2 \end{array} \right.$$

Il est considéré implicitement que les "dégâts" dûs aux fonctions risques $R1$ et $R2$ sont équivalents.

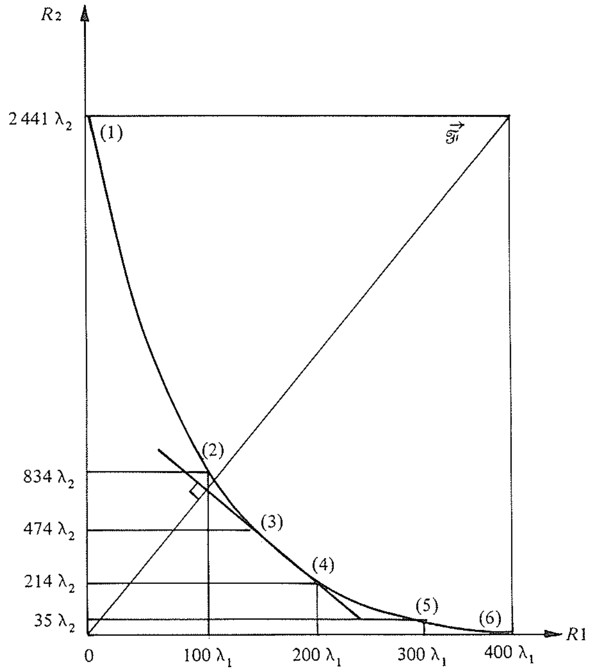

Figure 5 – Ensemble des solutions préférentielles.

La solution optimale sera donc définie par la tangente à la courbe $R2 \text{ min} = f(R1)$ normale au vecteur $F1$.

De la figure 5 il s'avère que la solution (3) est la solution optimale parmi l'ensemble des solutions préférentielles.

Par conséquent les valeurs des fonctions risques seront

$$R1 = 150\,\lambda 1$$

$$R2 = 474\,\lambda 2$$

Donc pour les variables de décisions

$$Pm = 250 \text{ millions de m}^3$$

et

$$\Delta h = 1.5 \text{ m}$$

De l'équation (20) on déduit que le pompage minimum garanti en hiver est de 88 millions de m³ tandis qu'en été il sera de 162 millions de m³.

Conclusion

Cette méthodologie permet donc au décideur de fixer les variables de décisions, en l'occurence le pompage minimum garanti et le niveau d'eau à la fin de la saison des pluies, lorsque l'opération de la ressource en eau est basée sur le concept du "pompage minimum garanti" tout en préservant le réservoir de "dégâts" éventuels dûs à son exploitation.

Cependant cette détermination "objective" des paramètres de décision est surbordonnée à l'estimation "subjective" des dégâts éventuels dûs à l'exploitation.

En effet, il n'existe pas d'algorithme permettant l'évaluation de la fonction "perte" $L2i$, due à l'abaissement du niveau de l'eau au-delà d'une valeur critique. Nous pensons que cette fonction sera évaluée "objectivement" ultérieurement, par une commission interdisciplinaire composée d'un analyste des systèmes, d'un hydrologue, d'un économiste, d'un écologiste et d'un représentant des utilisateurs.

Par soucis de simplification la solution proposée est obtenue à l'aide de simulation. Cette méthode de calcul ne permet pas d'évaluer explicitement l'influence et la sensibilité des différents paramètres.

Bien que très difficile, une solution analytique est plus élégante. C'est ce que nous nous efforcerons de présenter ultérieurement.

Remerciements

L'idée directrice de cet article fut déjà l'objet d'une publication interne (en hébreu) à la direction de l'Hydrologie, Commission des eaux par Monsieur Gérard Chetboun et Monsieur Meyer Ben Zvi.

Je tiens à remercier Monsieur Martin Jacobs, Directeur de l'Hydrologie pour son encouragement à la publication de cet article dans un journal français.

Références

CHETBOUN G. et BEN ZVI M. – *Une approche multiobjective à long terme des ressources en eau.* Rapport n° 1977/2 (En hébreu). Direction de l'Hydrologie – Commission des eaux, Israël.

BEN ZVI A. – *Evaluation du remplissage du lac de Tibériade en fonction des pluies.* Rapport n° 1974/3 (En hébreu). Direction de l'Hydrologie – Commission des eaux, Israël.

HAIMES Y.Y., HALL W.A., FREEDMAN H.T. – *Multiobjective optimization in water ressources systems. The surrogate worth trade-off method.* Elsevier scientific publishing company, 1975.