
Une nouvelle méthode de calcul des réseaux maillés

A new mesh network calculation method

André Divenot

Compagnie Générale des Eaux, Paris

Introduction

Au cours des quinze dernières années, la méthodologie du calcul des réseaux maillés de distribution d'eau en état permanent a beaucoup évolué, en liaison avec les possibilités nouvelles offertes par les ordinateurs. Vers le milieu des années soixante dix, la Compagnie Générale des Eaux a souhaité disposer de nouveaux programmes, car ceux qui étaient en exploitation présentaient quelques restrictions qui n'étaient plus admises.

Il est rapidement apparu que, pour les raisons qui seront exposées ci-après, aucune des méthodes connues ne pouvait donner pleinement satisfaction. Les recherches entreprises en 1975 ont débouché sur une méthode originale de génération et de traitement du système d'équations des mailles. Le premier programme à l'utiliser est le produit-programme PROGRES (PROG pour programme et RES pour réseaux) qui tient plus que ses promesses depuis sa mise en exploitation, au cours de l'été 1976.

Afin de bien situer le problème, il est nécessaire de rappeler tout d'abord les principes de la technique de Newton-Raphson et des méthodes de résolution publiées.

La méthode de Newton-Raphson

Calculer un réseau en état permanent revient à résoudre un système de n équations algébriques non linéaires à n inconnues, n pouvant atteindre des valeurs très élevées, de l'ordre du millier. Parmi les techniques itératives utilisables, c'est celle de Newton-Raphson qui a la faveur des spécialistes du calcul des réseaux maillés de distribution d'eau.

Dans le cas simple d'une seule équation à une seule inconnue, x :

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

la solution est recherchée en appliquant à l'inconnue des corrections successives, de valeurs absolues décroissantes, à partir d'une valeur approchée x_0 . A l'itération i , une approximation meilleure est obtenue ainsi :

$$x_i = x_{i-1} + \delta x_i \quad (2a)$$

avec

$$\delta x_i = - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})} \quad (2b)$$

ce qui peut aussi s'écrire :

$$f'(x_{i-1}) \delta x_i = - f(x_{i-1}) \quad (2c)$$

A l'itération $i + 1$, x_i est pris comme nouvelle valeur approchée de x . Le processus est répété jusqu'à l'itération p où un critère de précision est satisfait. Le critère peut être appliqué à la valeur absolue de δx_p ou à la valeur absolue de $f(x_{p-1})$ ou encore aux deux. Alors, il est admis que $x = x_p$.

Dans le cas d'un système de n équations non linéaires à n inconnues, et en notation matricielle, soit le vecteur X des n variables inconnues ou variables d'itération :

$$X = x_1, x_2, \dots, x_n \quad (3)$$

Il s'agit de résoudre le système :

$$F(X) = f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (4)$$

La solution est recherchée en ajoutant au vecteur des variables inconnues des vecteurs de correction successifs, de normes décroissantes, à partir d'une valeur approchée X_0 . A l'itération i , une approximation meilleure est obtenue ainsi :

$$X_i = X_{i-1} + \Delta X_i \quad (5a)$$

avec

$$\Delta X_i = \delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_n \quad (5b)$$

$$\Delta X_i = - \frac{F(X_{i-1})}{J_{i-1}} \quad (5c)$$

ce qui peut aussi s'écrire :

$$J_{i-1} \Delta X_i = - F(X_{i-1}) \quad (5d)$$

J_{i-1} est la matrice jacobienne correspondant au vecteur X_{i-1} . Afin d'éviter les indices multiples, et maintenant que le processus est bien établi, la référence à l'itération i est abandonnée. L'équation 5d s'écrit alors :

$$J \Delta X = - F(X) \quad (5e)$$

et J peut être défini par l'élément de la ligne i et de la colonne j :

$$J = \frac{\partial F(X)}{\partial X} = \left[\frac{\partial f_i(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_j} \right] \quad (5f)$$

La similitude entre les équations 2a, 2b, 2c d'une part et les équations 5a, 5c, 5d d'autre part n'est pas fortuite. Comme dans le cas d'une seule équation, le calcul est poursuivi jusqu'à ce qu'un ou plusieurs critères de précision soient satisfaits. La différence est que le test d'un vecteur peut porter sur la valeur absolue de chacun de ses éléments ou, globalement, sur sa norme.

Les bases du calcul des réseaux maillés en état permanent

Afin d'alléger l'exposé, les pseudo-maillages ou mailles ouvertes sont ignorées dans cette première partie, ce qui revient à dire que, par convention, un réseau ne comprend qu'un seul nœud de niveau piézométrique déterminé, appelé racine. La question sera reprise en détail plus loin.

Pour un réseau de T tronçons, N nœuds et M mailles, on peut alors écrire :

$$T = M + N - 1 \quad (6)$$

Comme, dans les réseaux réels, T est couramment supérieur à N de 40 à 50 %, il vient, en première approximation :

$$\left. \begin{array}{l} N \approx 2M \\ T \approx 3M \end{array} \right\} \quad (7)$$

Un réseau maillé en état permanent est équilibré lorsque deux ensembles de conditions sont satisfaits :

1) En tout nœud i autre que la racine r , la somme des débits est nulle. C'est la loi de Kirchoff aux nœuds, ou loi de continuité du débit :

$$f_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N Q_{ij} + C_i = 0 \quad (i \neq r ; i = 1, \dots, N) \quad (8)$$

où Q_{ij} est le débit du tronçon ij et C_i la consommation prélevée au nœud i . Q_{ij} est nul si le tronçon ij n'existe pas. Tout débit s'éloignant du nœud est positif.

2) La somme des pertes de charge des tronçons appartenant à toute maille m est nulle. C'est la loi de Kirchoff aux mailles, ou loi de conservation de l'énergie :

$$f_m = \sum_{\substack{ij \in m \\ ij=1}}^T h_{ij} = 0 \quad (m = 1, \dots, M) \quad (9)$$

où h_{ij} est la perte de charge du tronçon ij , positive si le sens du débit du tronçon coïncide avec le sens de la maille, lequel est arbitraire mais doit être parfaitement défini. La relation fonctionnelle qui lie la perte de charge et le débit est, sous une forme générale :

$$h_{ij} = H_i - H_j = R_{ij} Q_{ij} |Q_{ij}|^{\alpha-1} \quad (10a)$$

ou, réciproquement

$$Q_{ij} = R_{ij}^{-\frac{1}{\alpha}} (H_i - H_j) |H_i - H_j|^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \quad (10b)$$

où H_i et H_j sont les niveaux piézométriques des nœuds i et j . R_{ij} est la résistance hydraulique du tronçon ij . L'exposant α est habituellement compris entre 1,8 et 2.

Le système d'équations non linéaires qu'il faut résoudre pour équilibrer le réseau peut avoir pour dimensions le nombre de nœuds N , ou le nombre de mailles M , ou encore le nombre de tronçons T . L'évaluation initiale porte, dans le premier cas, sur les niveaux piézométriques inconnus et, dans le deuxième cas, sur les débits des tronçons. Dans le troisième cas, aucune évaluation initiale n'est nécessaire. Toutes les méthodes qui vont maintenant être présentées s'appuient sur l'un ou l'autre des trois systèmes d'équations.

Système d'équations des nœuds

La loi de Kirchoff aux mailles est constamment satisfaite et l'objectif est de satisfaire la continuité des débits aux nœuds, en corrigeant les niveaux piézométriques inconnus. Le rapprochement entre les équations 8 et 10b donne :

$$f_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N R_{ij}^{-\frac{1}{\alpha}} (H_i - H_j) |H_i - H_j|^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} + C_i = 0 \quad (11)$$

Le système est alors obtenu en appliquant les équations 5d et 5f :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial H_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial H_N} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial H_1} & \dots & \frac{\partial f_N}{\partial H_N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta H_1 \\ \vdots \\ \delta H_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_1 \\ \vdots \\ -f_N \end{bmatrix} \quad (12)$$

avec

$$\frac{\partial f_i}{\partial H_j} = \frac{\partial f_j}{\partial H_i} = -\frac{1}{\alpha} R_{ij}^{-\frac{1}{\alpha}} |H_i - H_j|^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \quad (i \neq j) \quad (13)$$

et

$$\frac{\partial f_i}{\partial H_i} = -\sum_{j=1}^N \frac{\partial f_j}{\partial H_i} \quad (14)$$

La matrice jacobienne est définie positive symétrique et elle est de rang $(N - 1)$ puisque le nœud de niveau piézométrique déterminé n'y figure pas.

En 1936, Cross [3] établissait les relations de base pour le traitement de chaque nœud considéré individuellement, ce qui conduisait à des convergences particulièrement difficiles. En 1963, Martin et Peters [14] étaient les premiers à utiliser la technique de Newton-Raphson. Plus tard, Shamir et Howard [15] ont montré que, tout en gardant le même nombre d'équations et d'inconnues, il est possible de substituer à une partie de ces dernières des consommations aux nœuds ou des résistances de tronçons. Liu [13] essaie de ne conserver que la diagonale principale de la matrice jacobienne. Donachie [4] insiste sur la possibilité d'ajuster les résistances pour mieux caler le modèle.

Chandrashekar et Stewart [2] tirent parti du fait que la matrice jacobienne est particulièrement clairsemée et ne calculent pas, explicitement, son inverse. Afin d'éviter également les inversions répétées, Lam et Wolla [10, 11] utilisent une inverse approchée, retouchée à chaque itération. Lemieux [12] propose une autre modification de l'algorithme de Newton-Raphson, basée sur les propriétés des matrices-bandes symétriques, définies positives. L'arrangement en matrice-bande, dans le but de réduire l'encombrement, est également pratiqué par d'autres auteurs [7, 14].

Système d'équations des mailles

Les lignes qui suivent exposent seulement le principe de la méthode. D'autres détails seront donnés plus loin. La loi de Kirchoff aux nœuds est satisfaite dès la répartition initiale des débits et le reste constamment. L'objectif est de satisfaire la loi de conservation de l'énergie en corrigeant les débits des mailles. Chaque correction δQ_m est appliquée à tous les tronçons de la maille m .

Le système résulte de l'application des équations 5d et 5f aux équations 9 et 10a :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial Q_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial Q_M} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_M}{\partial Q_1} & \dots & \frac{\partial f_M}{\partial Q_M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta Q_1 \\ \vdots \\ \delta Q_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_1 \\ \vdots \\ -f_M \end{bmatrix} \quad (15)$$

En 1936, Cross [3] présentait l'algorithme de calcul de chaque maille prise individuellement, toutes les corrections étant appliquées seulement à la fin de l'itération. En 1947, Dubin [5] remarquait que la convergence est souvent médiocre et énonçait deux principes pour l'améliorer :

- appliquer immédiatement la correction de débit de chaque maille, avant de passer aux mailles suivantes,
- faire en sorte que la partie commune à deux mailles soit de résistance hydraulique minimale.

On le verra, les deux propositions sont toujours pertinentes. La deuxième a été formulée à nouveau par Voyles et Wilke [16] en 1962.

Epp et Fowler [6] ont noté que la matrice est symétrique et ont décrit un algorithme d'arrangement en matrice-bande. La contribution de Kesavan et Chandrashekar [9] porte sur la génération des systèmes d'équations (des nœuds ou des mailles) et celle de Jeppson et Davis [7] sur l'inclusion des réducteurs de pression (également avec les systèmes des nœuds et des tronçons).

Système d'équations des tronçons

Les T équations à T inconnues sont obtenues en écrivant $(N - 1)$ équations de continuité des débits aux nœuds et M équations de mailles. Conformément à l'équation 6, le nombre total d'équations est alors bien égal à T . Les variables d'itération sont les débits des tronçons.

Les $(N - 1)$ équations aux nœuds sont directement déduites de l'équation 8. Ce sont des équations linéaires. Les M équations de mailles sont linéarisées en réécrivant l'équation 10a sous la forme :

$$h_{ij} = R_{ij} Q_{ij} |Q_{ij}|^{\alpha-1} = K_{ij} Q_{ij} \quad (16)$$

et les K_{ij} sont recalculés à chaque itération avec les nouveaux débits.

Aucune évaluation initiale n'est nécessaire. Plus exactement, Wood et Charles [17] qui ont décrit cette technique obtiennent de bons résultats en calculant les K_{ij} initiaux de l'équation 16 pour un débit égal à l'unité. Jeppson et Tavallae [8] ont ensuite explicité les modifications nécessaires pour inclure les pompes et réservoirs.

Limites des méthodes

Ce qui précède n'est qu'un aperçu des contributions, la plupart très intéressantes, publiées au cours des dernières années. D'une façon générale, il est fait appel, et avec succès, à tout l'arsenal mathématique dans le but de diminuer l'encombrement de la matrice et la durée des calculs.

Toutefois, des problèmes subsistent. Plusieurs auteurs signalent que la méthode de Newton-Raphson ne converge pas lorsque les valeurs initiales sont mal choisies [4, 10, 11, 12, 15, 17]. C'est probablement pour cette raison que le système des nœuds a la faveur. Il est en effet plus facile de programmer la génération de niveaux piézométriques plausibles que de programmer la génération de débits de tronçons plausibles.

Malheureusement, la méthode des nœuds présente deux difficultés. D'une part, les tronçons de faible perte de charge entraînent des dérivées partielles très grandes. D'autre part, les oscillations près de la solution sont

fréquentes. Cependant, il convient de noter que bien des auteurs annoncent le plein succès, grâce aux diverses améliorations apportées à la méthode de Newton – Raphson.

Par ailleurs, les méthodes matricielles sont – théoriquement – moins bien adaptées que les méthodes maille par maille ou nœud par nœud au traitement des clapets. Ces organes de coupure asymétriques ont longtemps été ignorés ou pris en considération seulement par le biais du réducteur de pression [7] ou de la station de pompage [11, 15]. Chandrashekar [1] a récemment fait le point en la matière, dans le cadre du système d'équations des nœuds.

A chaque itération, toute méthode matricielle considère globalement un système d'équations qui correspond à un état bien précis des clapets : chacun d'entre eux est soit ouvert soit fermé. Application faite des corrections, il est facile de tester la validité des hypothèses mais s'il en résulte le moindre changement d'état, il n'est généralement pas possible d'en déduire à coup sûr le système d'équations approprié pour l'itération suivante, faute d'algorithme de prédiction des interactions en chaîne : l'ouverture ou la fermeture d'un clapet peut entraîner une cascade imprévisible d'autres modifications. La bonne fin du calcul ne peut donc pas être garantie [1, 11, 15] bien que, dans la pratique, il semble qu'elle soit atteinte sans difficultés majeures.

Toutes ces raisons ont motivé la recherche d'une nouvelle méthode. Entre les divers systèmes d'équations, la préférence allait aux mailles : en appliquant à un gros réseau les approximations grossières données précédemment (équation 7), il est logique de choisir 400 équations de mailles plutôt que 800 équations de nœuds ou 1 200 équations de tronçons. Mais, de proche en proche, une propriété beaucoup plus intéressante a été mise en évidence. Tandis que les systèmes des tronçons ou des nœuds sont lourdement figés, un système d'équations de mailles peut être sélectionné et, surtout, dynamisé. C'est ce qui va maintenant être exposé.

Compléments sur le système d'équations des mailles

L'équation 6 donne le nombre M de mailles fermées dans un réseau connexe de N nœuds et T tronçons ne comprenant qu'un seul nœud de niveau piézométrique déterminé. Chacune des $(T - N + 1)$ mailles est un cheminement fermé de tronçons tous différents ; chaque tronçon appartient à au moins une maille ; chaque maille a au moins un tronçon qui lui est propre. Les antennes, qui sont des cheminements ouverts issus du réseau et aboutissant à des nœuds de niveaux piézométriques indéterminés, sont naturellement ignorées au cours de la recherche.

Si, parmi les N nœuds, il en est Z , et non plus un seul, dont les niveaux piézométriques sont déterminés, le nombre de mailles fermées est inchangé mais il faut alors ajouter $(Z - 1)$ pseudo-mailles ou mailles ouvertes. Chaque maille ouverte joint un nœud de niveau piézométrique déterminé à un autre nœud de niveau piézométrique déterminé ; chacun des Z nœuds appartient à au moins une maille ouverte. Un nœud de niveau piézo-

métrique déterminé n'est pas obligatoirement un nœud de niveau piézométrique constant quel que soit le débit. Il suffit que la relation entre le débit et le niveau piézométrique soit connue. Ce peut être, par exemple, l'ensemble constitué par un réservoir et une pompe de refoulement.

Le nombre total de mailles d'un réseau, \bar{M} , s'écrit finalement :

$$\bar{M} = (T - N + 1) + (Z - 1) = T + Z - N \quad (17)$$

où \bar{M} est le nombre de mailles indépendantes strictement nécessaire et suffisant pour équilibrer le réseau. La relation est exacte pour les réseaux palmés, maillés ou mixtes. Ainsi, si $T = 263$, $N = 264$ et $Z = 1$, le réseau est palmé. Si $T = 180$, $N = 145$ et $Z = 9$, le réseau comprend 44 mailles dont 8 ouvertes et il est moyennement maillé car le ratio $(T + Z)/N$ est égal à 1,3. Pour les réseaux de distribution d'eau fortement maillés, ce ratio peut dépasser 1,5. Il est évidemment fonction de la proportion de nœuds de niveaux piézométriques déterminés, mais aussi de la proportion de nœuds points de jonction d'au moins trois tronçons, ainsi que de l'importance relative des antennes.

La répartition entre mailles ouvertes et mailles fermées peut être modifiée par un type d'appareil qui, tel Janus, a deux visages. C'est le réducteur ou stabilisateur de pression qui est un nœud de consommation variable à l'amont et un nœud de niveau piézométrique déterminé à l'aval, ce qui détruit la symétrie de la matrice jacobienne [1,7]. Si par exemple une zone basse est alimentée par l'intermédiaire de n réducteurs de pression, alors $(n - 1)$ mailles ouvertes supplémentaires se substituent à $(n - 1)$ mailles fermées.

Il est maintenant possible de généraliser l'équation 9 sous la forme :

$$f_m = \sum_{t \in m} h_t - \sum_{p \in m} h_p - (H_A - H_B) = 0 \quad (m = 1, \dots, M) \quad (18)$$

où les deux sommes s'appliquent aux éléments appartenant à la maille m . La perte de charge h_t dans le tronçon t peut s'écrire :

$$h_t = R_t Q_t |Q_t|^{\alpha-1} \quad (19)$$

sans référence à quelque formule de perte de charge que ce soit. La résistance hydraulique R_t est fonction des caractéristiques physiques de la canalisation (diamètre, rugosité, longueur) et l'exposant α est habituellement compris entre 1,8 et 2. Mais, en généralisant, R_t peut aussi être fonction de la vitesse de circulation du fluide ou résulter de la combinaison de plusieurs éléments, en série ou en parallèle, et l'exposant α peut varier d'un tronçon à l'autre. Il est parfaitement possible, par exemple, de combiner des pertes de charge singulières – fonction du carré du débit – avec d'autres pertes de charge calculées avec la formule de Colebrook - White. Dans l'équation 19, le débit Q_t est positif lorsqu'il est orienté dans le sens de la maille.

La deuxième somme de l'équation 18 est étendue aux stations de refoulement ou de suppression de la maille. La hauteur de pompage h_p s'exprime habituellement

— ce n'est pas une obligation — par un polynôme :

$$h_p = b_0 + b_1 Q_p + b_2 Q_p^2 + \dots + b_n Q_p^n \quad (20)$$

Le débit de pompage Q_p et la hauteur de pompage h_p sont normalement positifs lorsque le sens du pompage coïncide avec le sens de la maille.

Enfin, toujours dans l'équation 18, les niveaux piézométriques H_A et H_B sont ceux des nœuds d'origine (A) et d'extrémité (B) de la maille. Les deux nœuds ne sont distincts que si la maille est ouverte.

Calcul de deux mailles liées

Le mini-réseau de la figure 1 sera pris en exemple. Les nœuds A, B et C sont des réservoirs de niveaux piézométriques déterminés. Le point de jonction des trois tronçons est un nœud ordinaire sans consommation. Application de l'équation 17, le nombre strictement nécessaire et suffisant de mailles indépendantes, \bar{M} , est égal à 2, et les deux mailles sont ouvertes. Il est supposé que le choix s'est porté sur les mailles formées par les tronçons 1 et 2 d'une part, et par les tronçons 1 et 3 d'autre part, ce qui sera noté 1 + 2 et 1 + 3. Il est important de remarquer que l'équilibrage du réseau nécessite la résolution d'un système de deux équations indépendantes mais que le choix est possible entre le système retenu, mailles 1 + 2 et 1 + 3 (le tronçon 1 est la partie commune aux deux mailles) ou les mailles 1 + 2 et 2 + 3 (le tronçon 2 est la partie commune) ou enfin les mailles 1 + 3 et 2 + 3 (le tronçon 3 est la partie commune).

Les flèches de la figure 1 indiquent le sens des mailles, qui est également celui des débits positifs. Les débits seront d'ailleurs constamment positifs, ce qui évitera toute référence aux valeurs absolues dans l'équation 19 et dans l'expression des dérivées. Les unités sont le l/s pour les débits et le m pour les pertes de charge. Pour simplifier, l'exposant α de l'équation 19 est pris égal à 2. Les résistances, les débits initiaux, les débits exacts et les pertes de charge à la solution sont fournis dans le tableau 1. Pour donner un simple ordre de grandeur, les trois tronçons pourraient avoir la même longueur de 1 km et des diamètres respectifs de 500, 800 et 1 000 mm.

Ci-après, dans l'application des équations 15, 18 et 19, le double indice se rapporte aux deux tronçons concernés. Ainsi f_{ij} est la fermeture en cote de la maille ij , c'est-à-dire de la maille $i + j$. Le système choisi est le suivant :

$$\left. \begin{aligned} f_{12} &= 3,75 \times 10^{-5} Q_1^2 \\ &+ 3,75 \times 10^{-6} Q_2^2 - 6,15 = 0 \\ f_{13} &= 3,75 \times 10^{-5} Q_1^2 \\ &+ 1,25 \times 10^{-6} Q_3^2 - 6,05 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_{12}}{\partial Q_{12}} & \frac{\partial f_{12}}{\partial Q_{13}} \\ \frac{\partial f_{13}}{\partial Q_{12}} & \frac{\partial f_{13}}{\partial Q_{13}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta Q_{12} \\ \delta Q_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_{12} \\ -f_{13} \end{bmatrix} \quad (22)$$

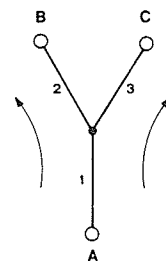


figure 1

Figure 1 — Mini-réseau exemple

Donnée	Tronçon 1	Tronçon 2	Tronçon 3
résistance	$3,75 \cdot 10^{-5}$	$3,75 \cdot 10^{-6}$	$1,25 \cdot 10^{-6}$
débit initial	200	100	100
débit exact	400	200	200
h exact	6	0,15	0,05

Tableau 1 — Données pour le calcul du réseau de la figure 1. Unités : l/s et m

avec

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_{12}}{\partial Q_{12}} &= 2 R_1 Q_1 + 2 R_2 Q_2 \\ &= 7,5 \times 10^{-5} (Q_1 + 0,1 Q_2) \\ \frac{\partial f_{12}}{\partial Q_{13}} &= \frac{\partial f_{13}}{\partial Q_{12}} = 7,5 \times 10^{-5} Q_1 \\ \frac{\partial f_{13}}{\partial Q_{13}} &= 7,5 \times 10^{-5} \left(Q_1 + \frac{0,1}{3} Q_3 \right) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Un calcul est terminé lorsque la valeur absolue de chaque élément du vecteur F est inférieure à 0,5 mm et que la valeur absolue de chaque élément du vecteur ΔQ est inférieure à 0,05 l/s. Les quantités des tableaux 2 et 3 ont été arrondies individuellement.

La partie supérieure du tableau 2 montre le déroulement du calcul selon la méthode de Newton - Raphson. Les tests sont satisfaits à l'itération 5. La convergence est rapide et la précision finale excellente. Le contraste est frappant avec la partie inférieure du même tableau 2, où le réseau est calculé maille par maille avec application immédiate de la correction. Seuls les deux éléments diagonaux de la matrice jacobienne de l'équation 22 sont pris en considération, l'un après l'autre. La maille 1 + 2 génère la correction δQ_{12} qui est appliquée aux débits Q_1 et Q_2 avant de traiter la maille 1 + 3. Les tests de fin de calcul ne sont satisfaits qu'à l'itération 101 et les débits Q_2 et Q_3 ne sont équilibrés qu'à 0,2 l/s près. Avec un test moins sévère, 1 l/s par exemple, le calcul aurait cessé à l'itération 38, mais avec un déséquilibre de l'ordre de 14 l/s.

itération	f_{12}	f_{13}	δQ_{12}	δQ_{13}	Q_1	Q_2	Q_3
0					200,00	100,00	100,00
1	-4,6125	-4,5375	150,00	150,00	500,00	250,00	250,00
2	3,4594	3,4031	-45,00	-45,00	410,00	205,00	205,00
3	0,3113	0,3063	-4,94	-4,94	400,12	200,06	200,06
4	0,0038	0,0037	-0,06	-0,06	400,00	200,00	200,00
5	0,0000	0,0000	-0,00	-0,00	400,00	200,00	200,00
0					200,00	100,00	100,00
1	-4,6125	3,0716	292,86	-82,54	410,32	392,86	17,46
2	0,7424	-0,3953	-22,02	13,55	401,86	370,84	31,02
3	0,4216	-0,3727	-12,81	12,74	401,79	358,03	43,76
4	0,3846	-0,3417	-11,72	11,64	401,71	346,32	55,39
5	0,3512	-0,3137	-10,73	10,65	401,63	335,59	66,04
10	0,2287	-0,2086	-7,07	7,00	401,25	293,65	107,60
30	0,0518	-0,0488	-1,63	1,61	400,37	223,48	176,88
38	0,0299	-0,0283	-0,95	0,93	400,22	213,77	186,45
50	0,0134	-0,0127	-0,42	0,42	400,10	206,23	193,87
101	0,0005	-0,0004	-0,01	0,01	400,00	200,22	199,78

Tableau 2 — Calcul du réseau de la figure 1. Le tronçon 1 est commun aux deux mailles. En haut, Newton-Raphson. En bas, maille par maille. Unités : l/s et m.

En supposant que le calcul démarre avec les débits de l'itération 10, ou avec ceux d'une itération de rang supérieur, il apparaît que la convergence resterait lente avec des débits initiaux pourtant proches de la solution. L'observateur attentif acquiert la certitude que les deux mailles s'équilibreront difficilement dès l'itération 3, et au plus tard à l'itération 4 ou 5. Cette certitude est basée sur le fait symptomatique que les deux fermetures en cote d'une part et les deux corrections de débit d'autre part sont de signes opposés et proches en valeurs absolues.

La conclusion (provisoire) est évidente : il faut proscrire à jamais le calcul maille par maille car il n'est pas possible d'ignorer les éléments non diagonaux de la matrice jacobienne. Et en effet, pour l'itération 6 par exemple, on obtient, avec les débits de la fin de l'itération 5 :

$$J_5 = 10^{-4} \begin{bmatrix} 326 & 301 \\ 301 & 303 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Tous les éléments sont du même ordre de grandeur mais, ainsi que le montre bien l'équation 23, parce que chacun d'entre eux contient :

$$2R_1Q_1 = 7,5 \times 10^{-5} Q_1 = 301 \times 10^{-4} \quad (25)$$

qui est la dérivée partielle prépondérante. Or, il en est ainsi parce que le tronçon 1 est commun aux deux mailles.

Cette dernière observation permet de sortir de l'impasse. Le maillage d'origine ayant fait la preuve de son inadaptation, rien ne s'oppose à un changement de maillage à partir de l'itération 6 (par hypothèse, car le rang de l'itération est secondaire). Il a déjà été remarqué que le choix était possible entre trois systèmes d'équations, chacun des trois tronçons du réseau de la figure 1 pou-

vant être la partie commune des deux mailles ouvertes. Un examen rapide des matrices jacobiennes correspondantes montre que le choix fait à l'origine est le pire et qu'à l'opposé le meilleur système est celui obtenu en prenant le tronçon 3 comme partie commune, ce qui revient à substituer f_{23} à f_{13} dans l'équation 21, d'où :

$$\left. \begin{aligned} f_{23} &= -3,75 \times 10^{-6} Q_2^2 \\ &\quad + 1,25 \times 10^{-6} Q_3^2 + 0,10 = 0 \\ f_{13} &= 3,75 \times 10^{-5} Q_1^2 \\ &\quad + 1,25 \times 10^{-6} Q_3^2 - 6,05 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Comme les modifications sont évidentes, les équations 22 et 23 ne seront pas réécrites, mais il est intéressant de donner la nouvelle matrice jacobienne de l'itération 6 :

$$J'_5 = 10^{-4} \begin{bmatrix} 27 & 2 \\ 2 & 303 \end{bmatrix} \quad (27)$$

La différence avec la matrice relative au maillage d'origine, équation 24, est éloquent. Il est maintenant tout à fait normal d'ignorer les éléments non diagonaux, puisqu'ils sont effectivement négligeables par rapport aux éléments diagonaux. La partie supérieure du tableau 3 le prouve : la solution est atteinte en 4 itérations nouvelles.

Un autre calcul, qui ne figure pas sur le tableau 3 pour des raisons d'encombrement, montre — ce qui est tout à la fois intuitif et facile à vérifier — que la situation est aussi énergiquement redressée si la maille 2 + 3 est, à partir de l'itération 6, ajoutée au système d'origine, et non pas substituée à l'une des équations du système d'origine. Un procédé aussi peu orthodoxe (système de 3 équations non indépendantes à 2 inconnues) ne se

itération	f_{23}	f_{13}	δq_{23}	δq_{13}	q_1	q_2	q_3
6	-0,3169	0,0413	118,14	-1,35	400,28	217,44	182,84
7	-0,0355	0,0082	17,01	-0,27	400,01	200,43	199,58
8	-0,0009	0,0002	0,43	-0,01	400,00	200,00	200,00
9	-0,0000	0,0000	0,00	-0,00	400,00	200,00	200,00
<hr/>							
0					200,00	100,00	100,00
1	0,0750	-4,5492	-75,00	302,02	502,02	175,00	327,02
2	0,1188	3,4930	-55,79	-91,13	410,89	230,79	180,10
3	-0,0592	0,3349	27,14	-10,69	400,20	203,65	196,55
4	-0,0072	0,0062	3,58	-0,20	400,00	200,07	199,93
5	-0,0001	0,0000	0,07	-0,00	400,00	200,00	200,00
6	-0,0000	0,0000	0,00	-0,00	400,00	200,00	200,00

Tableau 3 — Calcul maille par maille du réseau de la figure 1. Le tronçon 3 est commun aux deux mailles. En haut, reprise du calcul du bas du tableau 2. En bas, calcul normal. Unités : l/s et m.

justifie pas dans le cas simple de l'exemple mais il est bien utile pour traiter les réseaux réels.

La partie inférieure du tableau 3 est relative au déroulement du calcul lorsque le maillage est bien choisi dès l'origine. Le rapprochement avec la partie supérieure du tableau 2 conduit à la conclusion que, dans ce cas, la méthode de Newton-Raphson est à peine plus efficace (en nombre d'itérations, par en durée de calcul) que le calcul maille par maille. Pour un petit réseau comme celui-ci, il n'est d'ailleurs par rare de constater le même nombre d'itérations.

D'autres calculs, qu'il n'est pas possible de reproduire ici mais qui sont faciles à réaliser, démontrent en complément :

- le cas présenté n'a rien d'exceptionnel. En première approximation (les débits interviennent également), plus les résistances sont différenciées, plus le choix du maillage est important ;
- peu importe la formule de perte de charge utilisée, même si l'exposant α est différent de 2, même si la formule est celle de Colebrook-White ;
- il est toujours préférable d'appliquer immédiatement la correction de chaque maille. L'avantage est d'autant plus grand que la convergence est moins rapide.

En résumé, le calcul maille par maille peut, à la limite, ne pas demander plus d'itérations que l'application de la méthode de Newton-Raphson. La répartition initiale des débits est secondaire. En revanche, le choix des mailles, qui est fondamental, peut être optimisé et dynamisé.

Dans ce chapitre, aucune référence n'a été faite à la méthode de Cross [3]. Pourtant, l'auteur n'oublie pas que Cross a ouvert la voie à tous ceux qui ont apporté leur contribution dans ce domaine. Ainsi, appliquer la méthode de Newton-Raphson, c'est traiter simultanément des équations de Cross. Ces mêmes équations sont à la base de la méthode proposée ici. Mais l'algorithme de sélection des mailles — qui sera explicité plus loin — et plus encore le concept de dynamisation du maillage — qui est l'aspect essentiel — sont totalement

étrangers à Cross. Même sans aller jusqu'à la dynamisation, le fait que Cross soit muet sur le choix des mailles rend déjà ambiguë l'expression, pourtant souvent utilisée : "le calcul de tel réseau par la méthode de Cross demande tant d'itérations". Au fait, quelles sont les mailles Cross conformes du réseau de la figure 1 ?

Principe de la méthode

Le raisonnement ne s'applique plus au mini-réseau de la figure 1 mais, très généralement, à un réseau important. Toute maille du réseau a au moins un tronçon qui lui est propre (les exceptions qui peuvent se produire avec les mailles ouvertes ne modifient pas le raisonnement). Soient M_i et M_j les ensembles d'éléments appartenant respectivement aux mailles i et j . Ces ensembles sont la réunion des parties propres des deux mailles, P_i et P_j , et de leur partie commune P_c :

$$\left. \begin{aligned} M_i &= P_c + P_i \\ M_j &= P_c + P_j \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Quatre éléments de la matrice jacobienne sont relatifs à ces deux mailles : les éléments diagonaux a_{ii} et a_{jj} , et les éléments non diagonaux a_{ij} et a_{ji} (équations 15, 22, 23). Soit, en désignant par φ_c , φ_i et φ_j les dérivées partielles de premier ordre des parties P_c , P_i et P_j :

$$\left. \begin{aligned} a_{ii} &= \varphi_c + \varphi_i \\ a_{jj} &= \varphi_c + \varphi_j \\ a_{ij} &= a_{ji} = \varphi_c \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Il a été démontré qu'il faut éviter de former des paires de mailles conduisant à un φ_c grand par rapport à φ_i et φ_j . Fait favorable, la matrice jacobienne contient beaucoup d'éléments nuls car P_c est fréquemment vide, ce qui entraîne $\varphi_c = 0$. Les deux mailles sont alors totalement indépendantes et l'équilibrage de l'une n'interfère pas du tout avec l'équilibrage de l'autre.

S'il pouvait en être ainsi pour toute paire de mailles, tous les éléments non diagonaux seraient nuls et le calcul du réseau ne poserait aucun problème. Mais il est vrai que le réseau ne serait pas maillé, au sens habituel du terme.

Faute de pouvoir annuler tous les φ_c , l'objectif de la méthode est de faire en sorte que, pour toute paire de mailles, φ_c soit négligeable devant φ_i et φ_j . Alors, tous les éléments non diagonaux sont négligeables devant la diagonale principale, et le calcul maille par maille est justifié. Dans la pratique, l'objectif n'est pas pleinement atteint mais il l'est suffisamment pour commencer le calcul dans de bonnes conditions. Plus tard, le maillage est amélioré, si nécessaire et juste de ce qui est nécessaire.

Le discriminant utilisé pour évaluer les poids respectifs des éléments de la matrice jacobienne est la résistance cumulée des tronçons constitutifs. Chacune des quantités φ_c , φ_i et φ_j est une somme de dérivées de pertes de charge (équations 18 et 19) :

$$\frac{dh_t}{dQ_t} = \alpha R_t |Q_t|^{\alpha-1} \quad (30)$$

ou de hauteurs de pompage (équations 18 et 20) :

$$\frac{dh_p}{dQ_p} = b_1 + 2b_2Q_p + \dots + nb_nQ_p^{n-1} \quad (31)$$

La valeur de α dans l'équation 30 est constante ou évolue dans une fourchette étroite, de l'ordre de 1,8 à 2. Le débit Q_t peut varier très largement d'un tronçon à l'autre mais généralement beaucoup moins que la résistance R_t . Celle-ci est extrêmement différenciée, ce qui en fait le bon critère : à longueur et rugosité identiques, elle est en effet inversement proportionnelle à la puissance 5,25 du diamètre, environ (l'exposant dépend de la formule de perte de charge utilisée). Ainsi par exemple, si les diamètres sont dans le rapport 1 à 5, les résistances sont dans le rapport 5 000 à 1, environ.

S'il est fait usage de la formule de Colebrook-White, la résistance R_t est fonction du débit Q_t , mais une simple approximation suffit puisqu'il s'agit seulement d'évaluer l'ordre de grandeur relatif des dérivées, et que l'erreur est admise. A ce stade, il est de même possible d'assimiler, même grossièrement, chaque courbe de pompage à la courbe de perte de charge d'un tronçon fictif.

Comme toutes les dérivées sont fonction des débits, et que les débits initiaux sont très éloignés de la solution, les éléments de la matrice jacobienne implicite évoluent au cours du calcul. Certains éléments non diagonaux peuvent en conséquence devenir gênants, soit parce que l'algorithme de sélection initiale des mailles — qui sera explicité plus loin — n'est pas parfait, soit parce que les débits corrigés renforcent singulièrement le poids relatif de quelques éléments non diagonaux. Il est alors nécessaire et parfois indispensable d'améliorer le maillage car il suffit que deux mailles deviennent farouchement antagonistes pour que le réseau soit rendu incalculable. Qu'elle soit nécessaire ou indispensable, l'amélioration est toujours largement bénéfique.

L'expérience acquise avec le mini-réseau de la figure 1 est généralisable. Il n'est pas du tout nécessaire de connaître la matrice jacobienne, qui reste parfaitement implicite. L'attitude de deux mailles dont le φ_c n'est plus négligeable est un message suffisamment clair. Les deux mailles s'attardent, convergent mal, leurs fermetures en cote et corrections de débit sont de signes opposés et proches en valeurs absolues. La formation de la nouvelle maille, k , nécessite l'identification de la partie commune par intersection (équation 28) :

$$P_c = M_i \cap M_j \quad (32)$$

puis l'union des deux parties propres :

$$M_k = (M_i - P_c) \cup (M_j - P_c) \quad (33)$$

L'ensemble M_k peut être substitué à M_i ou M_j , mais il est plus simple de ne pas bouleverser le vecteur du maillage (voir ci-après) et d'ajouter M_k au maillage existant. Selon l'option exercée, l'amélioration est dite être réalisée par modification du maillage ou par maillage supplémentaire. Dans le premier cas, le nombre strictement nécessaire et suffisant de mailles indépendantes est préservé. Dans le second cas, les mailles supplémentaires sont redondantes.

L'opération peut être répétée plusieurs fois au cours d'un calcul. Le maillage est alors véritablement dynamisé, ce qui permet le traitement approprié des interactions entre les mailles, dès qu'elles se manifestent. Le concept est extrêmement puissant. L'équilibrage des gros réseaux demande à peine plus d'itérations qu'avec la méthode de Newton-Raphson, mais moins de temps car l'exécution de chaque itération est beaucoup plus rapide. Bien qu'aucune tentative n'ait encore été réalisée, il n'est pas impossible que la méthode puisse être appliquée dans d'autres domaines.

Arborescence

Conformément à ce qui vient d'être développé, le but est d'extraire du graphe un maillage proche de l'optimum. L'arborescence (le terme est utilisé dans un sens large) est particulièrement bien adaptée au problème car elle permet, selon le sens de l'exploration, le calcul des débits initiaux ou celui des niveaux piézométriques équilibrés.

Les tronçons sont regroupés en arêtes, échelons intermédiaires entre les tronçons et les parties propres ou communes des mailles. Une arête est une séquence de tronçons, non orientée tant qu'elle n'est pas intégrée dans l'arborescence. Ses nœuds courants sont de degré 2, ses nœuds d'extrémité de degré différent de 2. La figure 2 donne le détail de l'arête 1-20 de la figure 3. Les nombres supérieurs sont les numéros de nœuds, les nombres inférieurs les numéros de tronçons. L'arête compte 3 tronçons. Les nœuds 14 et 5 sont courants.

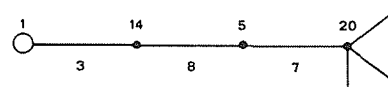


figure 2

Figure 2 — Détail de l'arête 1-20 du réseau de la figure 3.

Les degrés des nœuds d'extrémité, 1 et 20, sont respectivement de 1 et 4. La résistance d'une arête est le cumul des résistances hydrauliques des tronçons constitutifs.

La racine de départ est l'un des nœuds de niveau piézométrique déterminé. La méthode prévoyait à l'origine le choix de la racine par le programme (meilleure conductance au point d'entrée dans le réseau) avec la

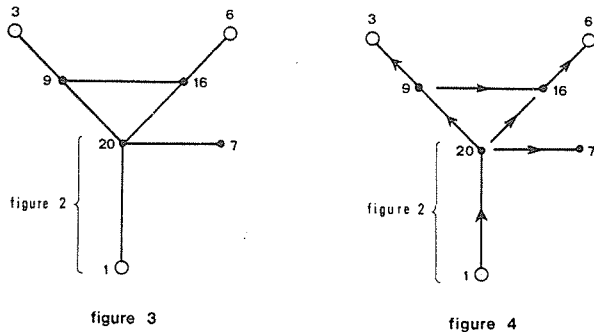


Figure 3 — Exemple de réseau. Les niveaux piézométriques des nœuds 1, 3 et 6 sont déterminés.

Figure 4 — Arborescence du réseau de la figure 3.

possibilité pour l'utilisateur de forcer le choix dans l'ensemble des nœuds de niveaux piézométriques déterminés. L'expérience a montré que c'était une précaution inutile qui d'ailleurs faisait, au moins partiellement, double emploi avec le nœud d'écart minimal, autre notion qui sera bientôt explicitée.

Chaque arête n'est parcourue qu'une seule fois dans un sens précis. La progression s'effectue en marquant les arêtes intégrées et les nœuds de passage. A chaque extrémité d'arête, l'arête choisie pour poursuivre le chemin est celle de résistance minimale. Le chemin est totalement constitué lorsque le nœud d'extrémité de la dernière arête incorporée est de degré 1 ou déjà marqué. Chaque fois que ce deuxième cas se produit, l'arborescence est "fermée", ce qui est contraire à la définition habituelle. La première arête du chemin suivant est l'arête pendante (l'une de ses extrémités, au moins, est marquée) de résistance minimale. La recherche est poursuivie jusqu'à ce que toutes les arêtes soient intégrées dans l'arborescence. Si le graphe n'est pas connexe, ses composantes sont traitées successivement.

Sur la figure 4, qui est à rapprocher de la figure 3, on distingue le chemin 1-20-9-3, le chemin 9-16-6, le chemin 20-16, le chemin 20-7. Au fur et à mesure de l'avancement, un tableau à une dimension, le vecteur de l'arborescence, est constitué. Son contenu dépend de l'organisation du programme, par exemple (figure 2) pour le début du premier chemin, 1-3-14-8-5-7-20 si toutes les informations, alternativement nœuds et tronçons, figurent dans le vecteur.

Les débits initiaux sont déterminés en remontant le vecteur de l'arborescence, dans le sens contraire à son orientation. Les consommations sont cumulées de proche en proche dans les tronçons, jusqu'à la racine. Le calcul des niveaux piézométriques finals sera pratiqué dans l'autre sens, lorsque le réseau sera équilibré. Mais, auparavant, le maillage est déduit de ce même vecteur.

Maillage

L'examen des caractéristiques de chaque chemin permet de savoir s'il génère une maille et, dans l'affirmative, si elle est ouverte ou fermée. Comme les nœuds 1, 3 et 6 ont leurs niveaux piézométriques déterminés, le premier chemin de la figure 4 génère la maille ouverte 1-20-9-3. Simultanément, le programme laisse une trace aux nœuds 20 et 9.

Le deuxième chemin (9-16-6) est l'amorce d'une maille ouverte qui, outre le chemin lui-même, peut comprendre 9-3 ou 9-20-1. C'est grâce à la trace laissée par la première maille que le bouclage s'effectue sur le nœud de niveau piézométrique déterminé d'écart minimal, tel que le cumul des résistances à partir du nœud confluent (le nœud 9) soit minimal. D'où la nature de la trace : lors de l'examen de la première maille ouverte, le programme a noté que, par exemple, la distance 20-1 est moindre que la distance 20-9-3, et la distance 9-3 moindre que la distance 9-20-1. Les distances sont mesurées en résistances cumulées. Lors de l'examen du deuxième chemin, la trace laissée en 9 indique que la maille ouverte doit être complétée par 9-3, c'est-à-dire en prenant la direction de 3, et non en prenant celle de 1. Il est évident que le problème posé par le réseau de la figure 1 est ainsi radicalement réglé, mais le procédé va bien au-delà de ce cas simple.

La formation des mailles fermées est immédiate : au troisième chemin (20-16), il suffit d'ajouter 20-9-16, en remontant vers la racine.

Enfin, le dernier chemin (20-7) est une antenne qui ne génère pas de maille. Lors de la formation de l'arborescence, les arêtes les moins résistantes ont constamment été sélectionnées de façon préférentielle. Les arêtes de forte résistance n'ont été intégrées que lorsqu'il ne pouvait plus en être autrement. Il est maintenant clair qu'il s'agissait, autant que possible pour un algorithme d'exécution rapide, de parcourir préférentiellement les arêtes susceptibles d'appartenir à des parties communes, et au contraire de rejeter en parties propres les arêtes de résistances relativement élevées. Ainsi, il est facile de vérifier que la maille fermée 20-9-16-20 a pour partie propre l'arête 20-16 dont la résistance est supérieure à celles des arêtes 20-9 et 9-16. Il est également devenu évident qu'il est indispensable de former les arêtes car la considération des seuls tronçons pourrait conduire à de graves mécomptes.

Comme pour l'arborescence, l'organisation du vecteur du maillage est fonction du programme. Beaucoup de temps sera gagné si toutes les informations relatives à chaque maille sont directement accessibles au cours du processus itératif : identification des tronçons, des pompes de refoulement ou de suppression, des clapets, des stabilisateurs de pression, etc.

Le maillage issu de l'arborescence est toujours bon. Toutefois, il a été exposé qu'il peut ne pas être optimal et que la surveillance du déroulement des itérations est partie intégrante de la méthode, afin de repérer les mailles qui ont tendance à s'attarder. Il ne peut s'agir que d'un nombre restreint de mailles, d'où un remaniement limité du maillage. Supposons, figure 4, que soient en cause les mailles 3-9-16-6 et 20-9-16-20. Conformément aux équations 32 et 33, la maille nou-

velle, 3-9-20-16-6, est formée par union après élimination de la partie commune. Elle pourrait être substituée à l'une ou l'autre des mailles génératrices mais il est beaucoup plus simple et tout aussi efficace de l'ajouter en surnombre aux mailles existantes, ce qui se traduit par une simple extension du vecteur du maillage.

Application

PROGRES, qui est un programme basé sur la méthode présentée, a déjà permis la réalisation de plusieurs milliers de calculs dans d'excellentes conditions, aussi bien sur de gros ordinateurs que sur des minis. Quel que soit le réseau et quelle que soit la version du programme, la méthode n'a jamais été mise en défaut.

Afin de produire quelques résultats tout en évitant de longs développements, des exemples ont été recherchés dans les références bibliographiques. Parmi les huit réseaux que l'on y trouve, quatre n'ont pas pu être exploités soit parce que les courbes de pompage ne sont pas fournies [1, 2, 4, 8] soit parce que les débits aux nœuds ne paraissent pas cohérents [exemple 2 de 17]. Les résultats obtenus avec les quatre autres réseaux sont reportés dans le tableau 4.

Les nombres d'itérations des calculs effectués en maillage statique sont aisément vérifiables puisqu'il suffit d'appliquer ce qui a été dit sur l'arborescence et le maillage. La précision de 1 l/s est une précision courante. Le calcul cesse lorsque toutes les corrections de débit des mailles sont, en valeurs absolues, inférieures à 1 l/s. La grande précision, qui est la précision souhaitable, n'est atteinte que lorsque toutes les valeurs absolues des corrections de débit sont inférieures à 0,05 l/s et toutes les valeurs absolues des fermetures en cote inférieures à 0,5 mm. La deuxième contrainte est habituellement la plus sévère et il n'est pas exceptionnel que le millième de l/s soit nécessaire pour la satisfaire.

Aucune comparaison n'est possible avec les nombres d'itérations cités dans les articles référencés car les précisions y sont omises ou ne sont pas transposables. Il est naturel de choisir la grande précision quand le programme permet de l'atteindre aisément pour une légère augmentation de la durée du calcul. Mais une bonne précision est toujours souhaitable parce que les enseignements tirés des calculs sont souvent de

caractère différentiel, en performances hydrauliques et en coûts. Les différences de performances hydrauliques risquent d'être gravement altérées si les résultats de chaque calcul sont approximatifs.

La dernière colonne du tableau 4 est produite à simple titre d'information. Si le principe de la dynamisation repose sur une base solide, son application est encore empirique et peut vraisemblablement être améliorée. Le thème est soumis aux chercheurs et aux praticiens. Il convient de remarquer que la minimisation de la durée du calcul doit normalement avoir la priorité sur la minimisation du nombre d'itérations et que le point d'équilibre dépend, au moins partiellement, de l'ordinateur utilisé. Comme l'auteur n'a pas de contribution fondamentale à présenter en la matière, on voudra bien l'excuser de conserver durant quelque temps l'avantage de l'expérience.

Pour les réseaux d'essai de 10 à 20 mailles du tableau 4, le nombre d'itérations en maillage dynamique et haute précision est de 10 à 20. Dans les mêmes conditions, des réseaux réels de 50 à 150 mailles demandent 15 à 40 itérations, selon les données particulières du calcul. Un réseau de 1 000 tronçons et 250 mailles environ (selon le calcul) est couramment équilibré en 25 à 45 itérations. Le même gros réseau a été traité en maillage statique, afin de pouvoir citer les résultats ici : il a fallu 9 itérations pour la précision courante (1 l/s), 36 itérations pour 0,05 l/s, 73 itérations pour la grande précision, 0,05 l/s et 0,5 mm, en réalité $8 \cdot 10^{-4}$ l/s et 0,5 mm.

Conclusion

Le maillage optimal serait celui qui rendrait les éléments non diagonaux de la matrice jacobienne constamment négligeables. L'objectif ne peut pas être atteint à coup sûr car le poids relatif des éléments évolue au cours du calcul. D'où la double nécessité de soigneusement sélectionner les mailles initiales puis de dynamiser le maillage.

La méthode présentée est un tout dont les mots-clés sont arborescence, maillage, retouches strictement indispensables. Le mode de formation de l'arborescence et le concept du nœud de niveau piézométrique déterminé de moindre écart conduisent à un maillage pour le moins satisfaisant. Les imperfections éven-

Référence	Nombre de mailles	Maillage statique		Maillage dynamique 0,05 l/s - 0,5 mm
		1 l/s	0,05 l/s - 0,5 mm	
[9] - [13]	16	15	29	19
[11] - [14]	20	3	36	16
[12]	14	10	27	17
[17]	8	5	28	11

Tableau 4 — Nombres d'itérations obtenus avec PROGRES.

tuelles sont éliminées au cours du processus itératif en prenant en considération un nombre restreint de mailles supplémentaires.

L'ensemble est efficace, performant, et permet de traiter sans difficulté aussi bien tous les ouvrages

– stations de pompage, clapets, stabilisateurs de pression – que les singularités de calcul. L'aspect essentiel de la méthode est probablement d'être à l'écoute d'une matrice jacobienne qui reste parfaitement implicite.

Liste des principaux symboles

H_i	=	niveau piézométrique du nœud i .	R_t	=	résistance hydraulique du tronçon t .
h_t	=	perte de charge dans le tronçon t .	T	=	nombre de tronçons du réseau.
J	=	matrice jacobienne.	Z	=	nombre de nœuds de niveau piézométrique déterminé du réseau.
M	=	nombre de mailles fermées du réseau.	α	=	exposant du débit dans la loi de perte de charge.
\bar{M}	=	nombre total de mailles du réseau.	δQ_m	=	correction de débit appliquée aux éléments de la maille m .
M_i	=	ensemble des éléments appartenant à la maille i .	φ_c	=	dérivée partielle de premier ordre de P_c .
N	=	nombre de nœuds du réseau.	φ_i	=	dérivée partielle de premier ordre de P_i .
P_c	=	partie commune de deux mailles.			
P_i	=	partie propre de la maille i .			
Q_t	=	débit du tronçon t .			

Liste bibliographique

- [1] CHANDRASHEKAR M. – Extended set of components in pipe networks, *Journal of the Hydraulics Division, ASCE*, janvier 1980, p. 133-149.
- [2] CHANDRASHEKAR M. and STEWART K.H. – Sparsity oriented analysis of large pipe networks, *Journal of the Hydraulics Division, ASCE*, avril 1975, p. 341-355.
- [3] CROSS H. – Analysis of flow in networks of conduits or conductors, *University of Illinois Engineering Experiment Station, Bulletin n° 286*, 1936.
- [4] DONACHIE R.P. – Digital program for water network analysis, *Journal of the Hydraulics Division, ASCE*, mars 1974, p. 393-403.
- [5] DUBIN C. – Le calcul des réseaux maillés, *La Houille Blanche*, n° 3, 1947, p. 213-227.
- [6] EPP R. and FOWLER A.G. – Efficient code for steady-state flows in networks, *Journal of the Hydraulics Division, ASCE*, janvier 1970, p. 43-56.
- [7] JEPPSON R.W. and DAVIS A.L. – Pressure reducing valves in pipe network analyses, *Journal of the Hydraulics Division, ASCE*, juillet 1976, p. 987-1001.
- [8] JEPPSON R.W. and TAVALLAEE A. – Pumps and reservoirs in networks by linear theory, *Journal of the Hydraulics Division, ASCE*, mars 1975, p. 576-580.
- [9] KESAVAN H.K. and CHANDRASHEKAR M. – Graph-theoretic models for pipe network analysis, *Journal of the Hydraulics Division, ASCE*, février 1972, p. 345-364.
- [10] LAM C.F. and WOLLA M.L. – Computer analysis of water distribution systems : Part I – Formulation of equations, *Journal of the Hydraulics Division, ASCE*, février 1972, p. 335-344.
- [11] LAM C.F. and WOLLA M.L. – Computer analysis of water distribution systems : Part II – Numerical solution, *Journal of the Hydraulics Division, ASCE*, mars 1972, p. 447-460.
- [12] LEMIEUX P.F. – Efficient algorithm for distribution networks, *Journal of the Hydraulics Division, ASCE*, novembre 1972, p. 1911-1920.
- [13] LIU K.T.H. – The numerical analysis of water supply networks by digital computer, *Proceedings, 13th Congress of the International Association for Hydraulic Research*, Kyoto, Japan, Vol. 1, Subject A, septembre 1969, p. 35-42.
- [14] MARTIN D.W. and PETERS G. – The application of Newton's method to network analysis by digital computer, *Journal of the Institution of Water Engineers*, Vol. 17, 1963, p. 115-129.
- [15] SHAMIR U. and HOWARD C.D.D. – Water distribution systems analysis, *Journal of the Hydraulics Division, ASCE*, janvier 1968, p. 219-234.
- [16] VOYLES C.F. and WILKE H.R. – Selection of circuit arrangements for distribution network analysis by the Hardy Cross method, *Journal of the American Water Works Association*, mars 1962, p. 285-290.
- [17] WOOD D.J. and CHARLES C.O.A. – Hydraulic network analysis using linear theory, *Journal of the Hydraulics Division, ASCE*, juillet 1972, p. 1157-1170.