

---

# Lac du Bourget. Modèle mathématique de stimulation de l'évolution des nutriments

## *Lac du Bourget : A mathematical model for simulating changes in nutrients*

B. Quetin

Ingénieur au Sce Scientifique  
d'applications de Sogreah

---

Depuis plus de dix ans, Administrations, Collectivités locales, Organismes Scientifiques publics ou privés se penchent sur le sauvetage du Lac du Bourget atteint par la pollution et l'eutrophisation. Ces efforts se sont traduits par la construction d'importants ouvrages, aujourd'hui terminés, et qui assurent la collecte, l'épuration et le rejet direct en aval du lac des principaux effluents urbains et industriels.

Quelle régénération des eaux du lac pouvait-on attendre de ces ouvrages ? Quel intérêt complémentaire apporterait la réalisation d'un siphon des eaux profondes ? Une réponse à ces interrogations a pu être apportée au moyen d'un modèle mathématique simulant l'évolution pluri-annuelle d'un nutriment : l'azote.

Les mesures effectuées dans le lac, comme dans ses affluents, permettaient en effet de mieux cerner les principaux processus biologiques et fournissaient une base de données suffisamment fiable pour envisager un bilan raisonnable. Ce modèle devait tenir compte de l'hétérogénéité verticale des eaux du lac, conséquence de sa stratification thermique saisonnière (thermocline).

Il a permis de montrer qu'il fallait s'attendre à une régénération relativement rapide du lac, du moins si l'on maintient à l'avenir la réduction drastique des apports en matière organique et en phosphore. La vidange préférentielle des eaux profondes par un siphon accélérerait cette régénération. Toutefois, dans le contexte particulier du lac du Bourget, son efficacité serait réduite, car le débit maximal possible est trop faible en comparaison du volume total du lac. Sa réalisation a donc été différée.

Le modèle mathématique utilisé consiste en une équation de la diffusion complétée pour tenir compte : de la production algale, des apports en nutriment par les cours d'eau affluant au lac, du retour aux couches profondes des matières organiques en décomposition. L'intégration est faite par une méthode implicite. Celle-



Lac du Bourget. Modèle Mathématique de simulation de l'évolution des nutriments

ci amène à résoudre un système d'équations linéaires dont la matrice tridiagonale s'inverse par la méthode classique du double balayage. On rappellera au préalable quelques unes des données concernant le lac du Bourget.

### Le lac du Bourget

Le lac du Bourget est le plus grand lac naturel entièrement français. De forme assez allongée, sa plus grande longueur atteint 18 km et sa superficie est de 44.6 km<sup>2</sup>. Sa profondeur, assez exceptionnelle, 80 m en moyenne et 150 m au point le plus profond, lui donne une capacité totale de 3.6 milliards de mètres cubes d'eau. Il est alimenté par deux cours d'eau de faible importance, la Leysse et le Sierroz. Avec un bassin versant total de 519 km<sup>2</sup> seulement, les apports moyens annuels ne sont que de 10 à 15 m<sup>3</sup>/sec, si bien qu'il faut une dizaine

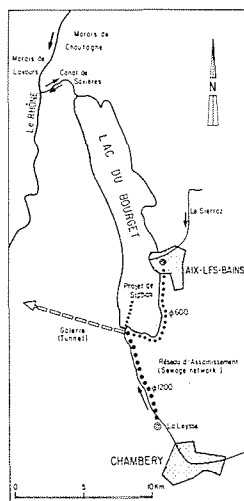


Figure 1 — Le lac du Bourget.

d'années pour renouveler un volume d'eau égal à celui du lac.

A une époque probablement récente, le lac du Bourget était traversé par le Rhône qui en a comblé toute la partie Nord, laissant subsister comme témoins les marais de Chautagne et de Lavours. Aussi est-ce un ouvrage artificiel, le canal de Savières, qui constitue l'exutoire du lac. En période de crue le Rhône trouve toujours sur le lac un important champ d'épandage et les écoulements s'inversent alors dans le canal de Savières, ce qui complique singulièrement les calculs de bilan hydrologique.

Le niveau du lac varie relativement peu. Sa cote moyenne se situe à 231,36 m NGF pour la période 1965-1972 dont nous avons pu exploiter les mesures disponibles. L'écart-type des fluctuations de niveau pour cette même période est de  $\pm 0,53$  m ce qui représente une variation de volume d'eau du lac de  $\pm 22,3$  millions de mètres cubes, soit seulement 0.6 % du volume total. Certaines grandes crues du Rhône peuvent cependant relever le niveau de 1 à 2 mètres pendant quelques jours.

La latitude et les conditions climatiques entraînent une stratification thermique saisonnière des eaux du lac. Au mois de février, les eaux sont à la température uniforme de 5°C à toutes profondeurs. Au printemps et en été les eaux superficielles s'échauffent progressivement sur 30 à 40 m d'épaisseur et peuvent atteindre à la surface libre 22° à 24°C. C'est le mécanisme bien connu de formation d'une thermocline (Fig. 2a), plutôt appelée métralmnion en limnologie. Les couches liquides respectivement situées au-dessus et au-dessous de cette couche de gradient thermique maximal sont désignées par épilimnion et hypolimnion. Une variation de 5 à 22° de la température de l'eau se traduit par une variation de densité de 1 à 0.9977. Ainsi, 1 m<sup>3</sup> d'eau à 5°C située au niveau de l'hypolimnion pèse 2.3 kg de plus que 1 m<sup>3</sup> d'eau à 22°C située à la surface. Cette différence souligne toute l'importance de cette stratification thermique saisonnière et la quasi impossibilité d'échange convectifs entre hypo- et épilimnion. L'évolution biologique du lac en est fortement marquée.

Du fait de leur température naturelle, les eaux des cours d'eau s'étalent le plus souvent horizontalement dans l'épilimnion à la cote correspondant à leur équi-

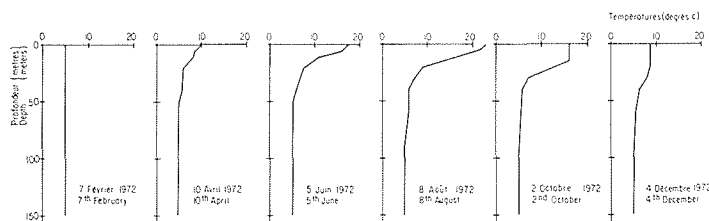


Figure 2a — Evolution saisonnière de la température des eaux du lac du Bourget.

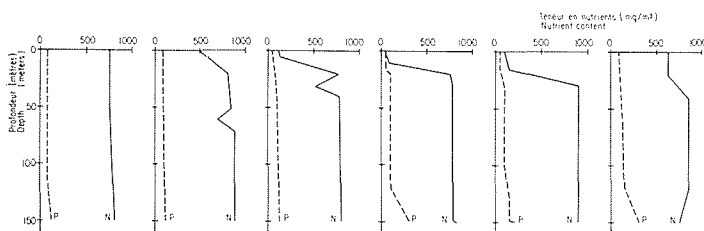


Figure 2b — Variations saisonnières de la teneur en azote (N) et phosphore (P).

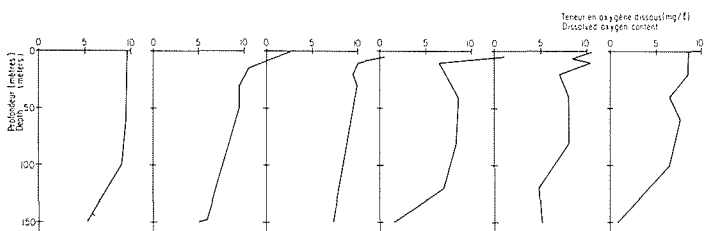


Figure 2c — Variations saisonnières de la teneur en oxygène dissous.

libre densimétrique. Seules, probablement, les eaux de crues fortement chargées de matières en suspension atteignent les couches les plus profondes.

Cette conjonction dans les eaux superficielles des apports hydriques, de la lumière, et d'une température suffisamment élevée une partie de l'année entraîne une activité biologique intense, tandis que les eaux de l'hypolimnion peu renouvelées accumulent tous les déchets.

Comparaison des températures des eaux du lac et des affluents					
Date	Leyse	Sierroz	Canal de Savières	Lac du Bourget	
				Surface	- 10 m
Températures en degrés celsius					
3 mars 1970	4,5	3,5	4,5	5,0	4,9
11 mars 1970	5,5	4,0	5,0		
4 avril 1970	5,0	4,0	5,0		
13 avril 1970	6,5	7,5	(6,5)	5,4	5,1
29 avril 1970	9,0	9,0	7,0		
4 mai 1970					7,7
6 mai 1970	10,0	10,5	10,0		
23 mai 1970	12,5	11,5	12,5		
1 <sup>er</sup> juin 1970	11,0	13,0	14,0	17,4	11,3
9 juin 1970	13,5	15,5	18,0		
25 juin 1970	15,0	17,0	19,5		
3 juillet 1970	13,5	14,0	19,5		
6 juillet 1970				22,3	14,6
9 juillet 1970	15,5	16,5	20,5		
20 juillet 1970	15,5	15,0	20		
28 juillet 1970	20,5	22,5	23,5		
3 août 1970				24,0	16,4

La valeur entre parenthèses correspond à un écoulement du canal de Savières vers le lac.

L'hiver, la thermocline disparaît, et avec elle l'écart densimétrique. Le vent peut alors assurer des circulations verticales qui homogénéisent rapidement les eaux du lac. Cette homogénéisation est parfois visible car les eaux du fond sont plus troubles et donnent une coloration très apparente au lac. Ce phénomène porte le nom d'overtum et, dans la région du Lac Léman, est appelée "troubllion".

### Données disponibles relatives au lac

De juillet 1969 à décembre 1972, la station d'Hydrobiologie Lacustre de Thonon les Bains a effectué une série de mesures particulièrement précieuses dans les eaux du lac du Bourget. Une fois par mois, le long de trois verticales et à différentes profondeurs ont été mesurées :

- température de l'eau ;
- teneur en oxygène dissous ;
- teneur en phosphore soluble et en phosphore total ;
- azote sous les trois formes chimiques :  $\text{NO}_3$ ,  $\text{NO}_2$  et  $\text{NH}_4$ .

Leur faible dispersion, leur similitude d'une année à l'autre, en font une base de travail fiable dont il a été possible de déduire un certain nombre d'enseignements sur le fonctionnement biologique du lac. Les figures 2b et 2c donnent une image de ces résultats.

L'analyse de ces données montre immédiatement :

- une parfaite homogénéité des eaux dans chaque couche horizontale, les températures et concentration en azote, oxygène... n'étant fonction que de la profondeur ;
- une chute estivale de la teneur en nutriment dans les eaux superficielles, qui est la conséquence de la prolifération des algues dans l'épilimnion, et du fait que les apports d'eau des affluents et les débits évacués par le canal de Savières n'intéressent que cette seule couche superficielle.

L'essentiel de l'énergie solaire assurant l'échauffement des eaux et contribuant à la formation de la thermocline est transmise par les radiations lumineuses. Celles-ci étant indispensables à la photosynthèse il n'y a rien d'étonnant à ce que l'épilimnion soit le siège préférentiel de la croissance du phytoplancton. La sursaturation en oxygène dissous à proximité de la surface libre confirme cette photosynthèse.

La constance des teneurs en nutriments dans l'hypolimnion confirme par contre l'absence de circulations verticales de masses d'eau. Seuls les phénomènes de diffusion turbulente sont susceptibles d'infléchir les gradients verticaux de concentration, mais on sait bien que les stratifications densimétriques "inhibent" fortement cette diffusion.

A partir du mois de juillet on observe un accroissement de la teneur en nutriments et un déficit progressif en oxygène dissous au voisinage du fond. Ceci provient de la décantation et de la dégradation du matériel végétal ou animal, phyto- ou zooplancton.

Il est intéressant de souligner également un important déficit en oxygène dissous au niveau de la thermocline. Deux explications sont possibles :

- ou bien il s'agit de l'extension des eaux provenant des affluents qui apportent une pollution organique non totalement oxydée ;
- ou bien une partie du matériel végétal issu du plancton a une densité telle qu'il flotte sur la thermocline et se dégrade progressivement à ce niveau.

### Bilan global du lac

Les cellules de la plupart des végétaux et des organismes vivants sont constituées pour l'essentiel de carbone d'azote et de phosphore en proportion assez constante :

$$\text{C/N/P} = 40/7/1$$

Les concentrations mesurées dans les eaux du lac du Bourget sont précisément proches de ces rapports et expliquent l'état "eutrophe" de ce lac.

Les mesures de ces concentrations sur la période 1969-1972 permettent de calculer mois par mois les quantités totales d'azote de phosphore ou d'oxygène dissous contenues dans le lac. Un calcul classique de régression linéaire permet d'évaluer les tendances.

Ainsi avons-nous obtenu les formules :

$$\text{P} = 327 - 0.56 \text{ t}$$

$$\text{N} = 1829 + 204.4 \text{ t}$$

$$\text{O}_2 = 31700 - 404 \text{ t}$$

$$\text{E} = 26910 + 226.3 \text{ t}$$

expressions dans lesquelles :

- t : temps exprimé en année avec origine le 1<sup>er</sup> janvier 1969  
 P : quantité totale de phosphore contenue dans le lac en tonnes  
 N : quantité totale d'azote contenue dans le lac en tonnes  
 O<sub>2</sub> : quantité totale d'oxygène dissous dans le lac en tonnes  
 E : énergie calorifique totale emmagasinée dans le lac en gigawatts/heure (l'énergie étant supposée nulle si la température est égale à 0°C).

Ces expressions montrent un accroissement rapide de la teneur en azote (204 tonnes par an), une réduction de la teneur en oxygène dissous en partie explicable par la variation de la température moyenne (accroissement de l'énergie totale E). Une incertitude apparaît à propos du phosphore qui semblerait accuser une très lente diminution.

On évitera toute conclusion trop hâtive compte tenu du faible taux de variation annuelle obtenu, de la complexité du cycle du phosphore et du caractère global du calcul effectué alors que les phénomènes biologiques sont assez complexes.

#### Données concernant les affluents du lac

Apprécier l'importance des charges polluantes parvenant au lac par la Leyse et le Sierroz était nécessaire mais une entreprise difficile. Deux études ont été effectuées, la première par la SETUDE à la demande de la Direction Départementale de l'Équipement [3], la seconde par le CTGREF [5]. La première a couvert la période juillet 1969-juillet 1970, la seconde juillet 1973-décembre 1974. Outre des jaugeages périodiques de débit et des mesures de températures, de nombreuses analyses chimiques des eaux ont été réalisées au cours des deux études. Les résultats sont assez concordants compte tenu de la nature des phénomènes mesurés. Toutes deux rencontrent quelques difficultés inhérentes aux changements du sens de l'écoulement dans le canal de Savières avec les crues du Rhône et à l'impossibilité d'établir un tarage des échelles de mesure du niveau. Elles fournissent, exprimées en tonnes/an, les valeurs suivantes :

Périodes	Apports au lac		Exportation	
	Azote	Phosphore	Azote	Phosphore
Juillet 1969 - juillet 1970	1 400	290	1 640	125
Juillet 1973 - déc. 1974	1 500	250	180	30

Indépendamment du fait que les exportations d'azote pendant la première période de mesure paraissent trop élevées, ces résultats sont sans commune mesure avec les bilans obtenus à partir des teneurs du lac lui-même. Ceci provient du fait que l'azote et le phosphore transitent par la matière organique vivante et dès lors :

- échappent à l'analyse de l'eau ;
- sont exportés par le canal de Savières sous forme

d'algues ou autre (la pêche, relativement modeste, représente une centaine de tonnes par an) ;  
 — sont également fixés dans les zones marécageuses en bordure du lac ;  
 — peuvent être en partie piégés dans les vases de fond.

#### Modèle mathématique de simulation du lac

Ce modèle se propose d'établir une simulation pluri-annuelle du bilan d'azote. Nous avons retenu ce nutriment plutôt que le phosphore, parce que les données correspondantes paraissent plus sûres ; le modèle est de toute manière transposable immédiatement au phosphore. Il repose sur quelques hypothèses de base :

- homogénéité des eaux par couches horizontales, bien confirmée par les mesures de la station d'Hydrobiologie Lacustre de Thonon les Bains ;
- niveau constant du lac ;
- vitesses verticales d'écoulement négligeables et de toute manière compensées par les incertitudes sur les paramètres de diffusion turbulente verticale ;
- thermocline établie à une profondeur constante de 15 à 20 m ;
- apports d'eau des affluents entre 0 et - 15 m, à la cote de leur équilibre densimétrique ;
- exportations par le canal de Savières à la concentration des eaux superficielles.

Le but poursuivi étant une simulation à long terme, il n'a pas paru nécessaire de tenir compte dans le modèle du cycle biologique de l'azote qui aurait introduit une complexité illusoire.

L'équation différentielle de la diffusion verticale utilisée dans le modèle s'écrit :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial z} \left( SK \frac{\partial c}{\partial z} \right) - \lambda c + \text{flux entrant} - \text{flux sortant}$$

dans laquelle on désigne par :

- c : la concentration dans les eaux du lac à la profondeur considérée,  
 S : la surface de la section horizontale du lac, fonction de la profondeur,  
 K : le paramètre de diffusion turbulente variable avec la profondeur et avec l'état de stratification thermique du lac,  
 z : la cote verticale  
 t : le temps

$\lambda$  : coefficient d'une loi du 1<sup>er</sup> ordre décrivant la production organique et fonction de la température de l'eau.

Les termes de flux entrant et sortant n'interviennent qu'à certaines profondeurs.

L'équation est discrétisée selon un schéma implicite classique :

$$c_i^{t+1} - c_i^t = \frac{\Delta t}{\Delta z^2} \left[ \frac{1}{1 + \theta} \frac{2}{S_{i+1} K_{i+1} (c_{i+1} - c_i) - S_i K_i (c_i - c_{i-1})} \right]^{t+1} + \theta [S_{i+1} K_{i+1} (c_{i+1} - c_i) - S_i K_i (c_i - c_{i-1})]^t$$

qui permet d'écrire un système de  $n$  équations linéaires

à  $n$  inconnues de la forme :

$$A_i c_{i-1}^{t+1} + B_i c_i^{t+1} + C_i c_{i+1}^{t+1} = D_i$$

le terme  $D_i$  dépendant des seules concentrations au temps  $t$ . On est ainsi amenés à résoudre un système linéaire dont la matrice tridiagonale s'inverse par la méthode classique de double balayage. Les conditions aux limites expriment que le flux de matière est évidemment nul à travers la surface libre et le fond du lac.

Le lac a été découpé en trente couches de 5 m d'épaisseur et le pas de temps adopté était de cinq jours. Compte tenu de la variabilité des paramètres de diffusion turbulente en fonction du degré de stratification du lac, seul un schéma implicite pouvait assurer un calcul inconditionnellement stable quelle que soit la valeur de la quantité  $K\Delta t/\Delta z^2$ .

Les paramètres de diffusion turbulente verticale varient avec la profondeur et avec le degré de stratification thermique du lac. Plusieurs voies ont permis d'approcher les ordres de grandeur. D'une part la mise en œuvre d'un modèle mathématique de simulation de la turbulence pour les écoulements induits par le vent [8] a permis, compte tenu des valeurs moyennes du vent d'évaluer ces paramètres en milieu homogène, c'est-à-dire dans tout le lac en hiver, et dans l'épilimnion en été. D'autre part, la répartition verticale des teneurs en oxygène dissous dans les eaux du lac et son évolution dans le temps a permis d'évaluer la diffusivité moyenne dans l'hypolimnion. Le tableau qui suit donne les valeurs obtenues au-dessous de la cote 130 m NGF.

On en déduit une valeur moyenne de  $0.405 \text{ cm}^2/\text{sec}$  avec toutefois une variabilité caractérisée par un écart-type de  $0.33 \text{ m}^2/\text{sec}$ . Cette valeur a dû, toutefois, être modifiée légèrement pour obtenir un réglage correct du modèle mathématique. Les paramètres de diffusion turbulente adoptés dans le modèle étaient variables avec la profondeur et avec le temps. Ils étaient modulés en fonction des vents moyens relevés à la station météorologique de Challes-les-Eaux. Le tableau suivant donne les principales valeurs utilisées.

Diffusion turbulente au fond du lac du Bourget (en dessous de la cote 130 m NGF)	
Période considérée	$K_z$ ( $\text{cm}^2/\text{s}$ )
Août-septembre 1969	1,106
Septembre-octobre 1969	0,6255
Juin-juillet 1970	0,5148
Octobre-novembre 1970	0,8971
Mai-juin 1971	0,3965
Juin-juillet 1971	0,0061
Juillet-août 1971	0,2212
Août-septembre 1971	0,5297
Septembre-octobre 1971	0,4371
Octobre-novembre 1971	0,0953
Juin-juillet 1972	0,155
Juillet-août 1972	0,0938
Août-septembre 1972	0,189

Le réglage du modèle a été établi en essayant de reproduire l'évolution du lac pour la période connue 1969-1972. Outre la répartition verticale des concentrations, on s'est attaché à bien reproduire l'évolution annuelle de la teneur en nutriment dans les 20 m superficiels du lac qui correspondent à l'épilimnion. Deux paramètres complémentaires ont posé à ce stade quelques difficultés. Il a fallu d'une part moduler le paramètre de production algale  $\lambda$  en fonction de la température moyenne de l'air et d'autre part introduire un

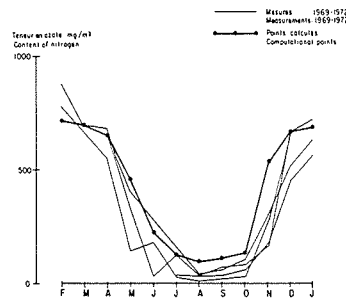


Figure 3 — Evolution saisonnière de la teneur en azote dans l'épilimnion.

Profondeur (mètres)	Paramètre de diffusion turbulente verticale ( $\text{m}^2/\text{jour}$ )					
	1 <sup>er</sup> Février	1 <sup>er</sup> Avril	1 <sup>er</sup> Juin	1 <sup>er</sup> Août	1 <sup>er</sup> Octobre	1 <sup>er</sup> décembre
0	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06
5	53	80	27	27	17	54
10	100	152	0.06	0.06	0.06	99
15	142	215	0.06	0.06	0.06	140
20	178	270	0.06	0.06	0.06	176
25	209	316	2.3	2.3	2.3	206
30	234	354	2.3	2.3	2.3	231
50	279	421	2.3	2.3	2.3	275
100	209	316	2.3	2.3	2.3	206
145	27	41	2.3	2.3	2.3	27

Coefficient de productivité algale (1/jour)											
Fev.	Mars	Avril	Mai	Juin	Juil.	Août	Sept.	Oct.	Nov.	Déc.	Janv.
0.0296	0.0366	0.0545	0.0777	0.1114	0.1488	0.1729	0.1622	0.1230	0.0740	0.0450	0.0322

flux de matière organique de la couche supérieure vers les couches profondes pour simuler la décantation des matières détritiques d'origine végétale ou animale. Ce flux a été réglé à 42 % de la production. La figure 3 montre l'état du réglage du modèle.

Le modèle a alors permis de simuler l'évolution du lac pendant dix années en tenant compte de la réduction des apports en nutriments consécutifs au détournements des effluents urbains d'une part et à l'éventuelle construction d'une canalisation assurant la vidange préférentielle des eaux de l'hypolimnion. La figure 4 montre le résultat de cette simulation. La réduction drastique des apports telle qu'elle est prévue, et si elle peut être maintenue dans l'avenir, montre une régénération relativement rapide du lac.

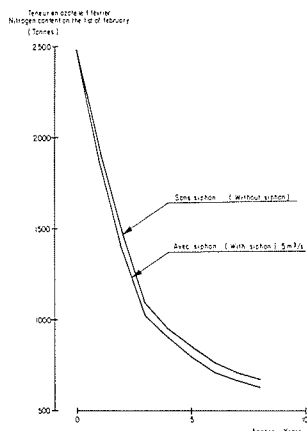


Figure 4 – Simulation du lac : apports en nutriments réduits à 320 tonnes/an.

Le rôle d'un siphon prélevant les eaux profondes s'avère peu efficace. Ceci est la conséquence de deux contraintes particulières qui en limitent le débit à 5 m<sup>3</sup>/sec., valeur faible eu égard à la capacité du lac. Le projet du siphon prévoit en effet l'évacuation des eaux par la même galerie que les eaux issues des stations d'épuration, en mettant à profit la capacité de cette galerie à évacuer le débit d'orage décennal réglementaire en assainissement. Ce débit est fixé à 5 m<sup>3</sup>/

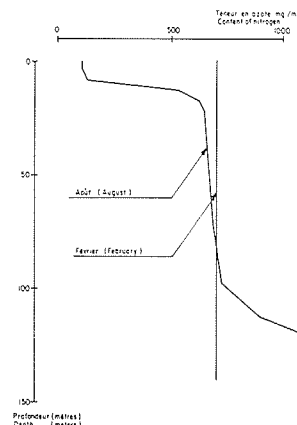


Figure 5 – Simulation du lac : profils de concentration calculés.

sec. Mais une seconde contrainte apparaît : celle de ne pas prélever plus que les apports naturels au lac en période d'étiage. Une simulation a toutefois été faite avec un débit de 7.5 m<sup>3</sup>/sec. ; l'efficacité du système est alors supérieure.

## Bibliographie

- [1] DUSSART. – *Limnologie* (Gauthier-Villars), 1966.
- [2] BALVAY. – Aperçu sur l'état des trois grands lacs savoysards. *Revue de l'Institut Pasteur de Lyon*, T. 1, n° 3, 1967.
- [3] GONELLA. – Tentative de détermination du bilan des apports polluants dans un lac alpin. *La Houille Blanche*, n° 8, 1971.
- [4] POWELL. – Estimation of vertical Eddy Diffusivities below the Thermocline in Lakes. *Water Resources Research*, Vol. 10, n° 2, 1974.
- [5] CTGREF. – Charge en fertilisants des principaux tributaires du lac du Bourget. *Rapport CTGREF. déc. 1975, 1975.*
- [6] GOLTERMAN. – *Physiological Limnology* (Elsevier), 1975.
- [7] SOGREAH. – Renouvellement des eaux du lac du Bourget : prise d'eau profonde. *Rapport R12424*. Syndicat Intercommunal du lac du Bourget, 1976.
- [8] GAUTHIER-QUETIN. – Modèles mathématiques des écoulements induits par le vent. *17<sup>e</sup> Congrès de l'AIIRH Baden-Baden*, 1977.
- [9] KOENIG. – La dépollution du lac du Bourget. *Moniteur des Travaux Publics* du 11.2.80, 1980.