

---

# The laminar flow velocity profile over close-packed spherical roughness elements

## *Le profil des vitesses en écoulement laminaire sur un fond d'éléments de rugosité sphériques jointifs*

Neil L. Coleman

Geologist, USDA Sedimentation Laboratory,  
Oxford, Mississippi, U.S.A.

---

### Introduction

Laminar bounded shear flows are usually considered only with regard to flow over smooth surfaces, without roughness elements of any kind. To the author's knowledge, little attention has been given to the case of laminar flow over a surface with roughness elements, even though this is a situation that arises fairly often in connection with the movement of very viscous fluids through conduits of different kinds, and specifically in the experimental study of low Reynolds number flow over sediment beds [Shields, 7; Bagnold, 1; Coleman, 4].

The author first became interested in the problem while undertaking a large-scale Reynolds model study of the drag coefficient of a streambed particle [Coleman, 4].

In these experiments, a bed of plastic spheres in a rectangular conduit simulated a segment of an alluvial streambed, and flows over this bed with different Reynolds numbers were achieved primarily through the use of a series of hydroxyethylcellulose solutions with widely varying viscosities.

The apparatus generated flows ranging in type from completely laminar to fully turbulent. Complete data analysis demanded the estimation of a shear velocity for each experiment. This was done using the cross-plot method of velocity profile examination originated for use with flow over smooth surfaces by Clauser [3] and later extended for use with flow over rough surfaces by Perry and Joubert [6]. It was while making these shear velocity estimations that the author became aware that, for velocity profiles in laminar flows over rough surfaces, refinement in the definition of a virtual origin correction and hence in shear velocity estimation was possible.

### Introduction

*Dans les écoulements laminaires limités en milieu visqueux, on ne considère habituellement que les écoulements sur des surfaces lisses, sans aspérité d'aucune sorte. A la connaissance de l'auteur, on n'a jusqu'ici accordé que peu d'attention au cas de l'écoulement laminaire sur une surface comportant des éléments rugueux. C'est pourtant une situation qui se présente assez fréquemment dans le domaine du mouvement de fluides très visqueux dans des conduits divers, et en particulier dans l'étude expérimentale d'écoulements à faible nombre de Reynolds sur des lits de sédiments. [Shields, 7 ; Bagnold, 1 ; Coleman, 4].*

*L'auteur a commencé à s'intéresser à ce problème lorsqu'il a entrepris sur le modèle de Reynolds une étude à grande échelle du coefficient de traînée d'un élément du lit d'une cours d'eau. [Coleman, 4].*

*Dans ces expériences, un lit de sphères en plastique dans un conduit rectangulaire simulait une partie d'un lit alluvial, et des écoulements sur ce lit avec des nombres de Reynolds différents furent tout d'abord réalisés, en utilisant une série de solutions d'hydroxyéthylcellulose de viscosité largement variable.*

*L'appareil produisait des écoulements allant du type entièrement laminaire jusqu'au type intégralement turbulent. Une analyse complète des données imposait l'estimation de la vitesse tangentielle pour chaque expérience. Cette exigence fut satisfaite en utilisant la méthode de tracé de la courbe des profils de vitesse mise au point par Clauser [3] pour les écoulements sur surfaces lisses, et étendue par la suite aux écoulements sur surfaces rugueuses par Perry et Joubert [6]. C'est en faisant ces estimations de vitesses tangentielles que l'auteur prit conscience de la possibilité d'obtenir, pour les écoulements laminaires sur des surfaces rugueuses, une meilleure approche de la correction d'origine virtuelle, et par conséquent de l'estimation de la vitesse tangentielle.*

### Scope of the problem

Perry and Joubert [6] have evolved a graphical data reduction method whereby a plot of a velocity profile in turbulent bounded shear flow over a rough surface may be analyzed to find the virtual origin of the profile, to estimate the shear velocity at the effective boundary at the base of the profile, and to define the wake characteristics [Coles, 5] in the far-wall region of the profile. Their method, following that of Clauser [3] for flow over smooth surfaces, proceeds from the equation for the logarithmic part of the turbulent velocity profile, together with an equation defining the boundary shear velocity in terms of the maximum measured velocity and the local apparent friction coefficient. The procedure proposed here for laminar flow is analogous to that of Perry and Joubert for turbulent flows in that the need for a virtual origin correction because of the presence of roughness is assumed, the validity of an accepted velocity profile equation is assumed—in this case the profile equation for laminar flow over a smooth surface—and the same definition of boundary shear velocity in terms of the local friction coefficient is accepted. However, it is found that in this case, a mathematical expression for the virtual origin correction can be formulated, thus eliminating the need for finding it by trial and error graphical methods, as is done in the case of turbulent flows.

For laminar flow between two smooth parallel plates or conduit walls, the velocity profile equation can be written in the form :

$$\frac{U}{U_*} = \frac{U_* y}{V} \left( 1 - \frac{y}{2\delta} \right) \quad (1)$$

where  $U$  is the local velocity at a distance  $y$  from one boundary,  $U_*$  is the shear velocity at the boundary,  $\delta$  is the distance from the boundary to the point of maximum measured velocity, and  $V$  is the kinematic fluid viscosity. The shear velocity  $U_*$  can be defined in terms of a local friction coefficient  $C_f$  and the maximum velocity  $U_m$  as:

$$U_* = \left( \frac{C_f}{2} \right)^{1/2} U_m \quad (2)$$

Figure 1a is a definition sketch for equation (1). The maximum velocity  $U_m$  and the elevation  $\delta$  are shown in the figure. The dashed lines in the lower part of the figure are the straight, parallel streamlines typical of this flow. Streamlines like this exist, of course, over the entire flow, although only the lower few are included in the figure.

For laminar flow between boundaries with spherical roughness, as in Figure 1b, the streamlines in the immediate vicinity of the roughness elements will not be straight and parallel, so that the assumption of parallel flow underlying equation (1) does not hold in some zone adjacent to the rough bed. However, this effect must decrease to insignificance farther out in the flow,

### Etendue du problème

*Perry et Joubert [6] ont mis au point une méthode graphique de réduction des données qui permet d'analyser une courbe de profil de vitesse dans un écoulement visqueux turbulent limité sur une surface rugueuse, pour trouver l'origine virtuelle du profil, estimer la vitesse tangentielle à la base du profil, et définir les caractéristiques du sillage dans la région du profil éloignée des parois [Coles, 5]. Leur méthode, suivant celle de Clauser [3] pour l'écoulement sur les surfaces lisses, découle de l'équation pour la partie logarithmique du profil de vitesse en milieu turbulent, ainsi que d'une équation définissant la vitesse tangentielle à la limite en fonction de la vitesse maximale mesurée et du coefficient de frottement local apparent. La méthode proposée ici pour les écoulements laminaires est analogue à celle de Perry et Joubert pour les écoulements turbulents. Elle suppose en effet la nécessité d'une correction d'origine virtuelle par suite de la présence des rugosités, ainsi que la validité d'une équation du profil de vitesse—dans le cas présent l'équation du profil pour un écoulement laminaire sur une surface lisse—, et elle admet la même définition de la vitesse tangentielle à la limite en fonction du coefficient de frottement local. On trouve cependant que, dans ce cas, on peut formuler une expression mathématique de la correction d'origine virtuelle, ce qui supprime la nécessité de la trouver par tâtonnements à l'aide de méthodes graphiques, comme on le fait dans le cas des écoulements turbulents.*

*Pour un écoulement laminaire entre deux lames ou parois de conduit lisses et parallèles, l'équation du profil de vitesse peut se mettre sous la forme :*

*où  $U$  est la vitesse locale à une distance  $y$  d'une limite.  $U_*$  est la vitesse tangentielle à cette limite,  $\delta$  est la distance de la limite au point de vitesse maximale mesurée, et  $V$  est la viscosité cinématique du fluide. La vitesse tangentielle  $U_*$  peut être définie en fonction d'un coefficient de frottement local  $C_f$  et de la vitesse maximale  $U_m$  par :*

*La figure 1a est un croquis correspondant à l'équation (1), où sont représentées la vitesse maximale  $U_m$  et la cote  $\delta$ . Les lignes pointillées à la partie inférieure de la figure sont les filets liquides rectilignes et parallèles caractéristiques de cet écoulement. Il existe naturellement des filets analogues tout au long de l'écoulement, mais seuls les filets inférieurs sont reproduits sur la figure.*

*Pour un écoulement laminaire entre plaques à rugosités sphériques, comme dans la figure 1b, les filets au voisinage immédiat des éléments rugueux ne seront ni rectilignes, ni parallèles, de sorte que l'hypothèse d'écoulement parallèle qui sert de base à l'équation (1) ne s'applique pas dans une zone voisine du lit rugueux. Cet effet doit cependant décroître jusqu'à devenir*

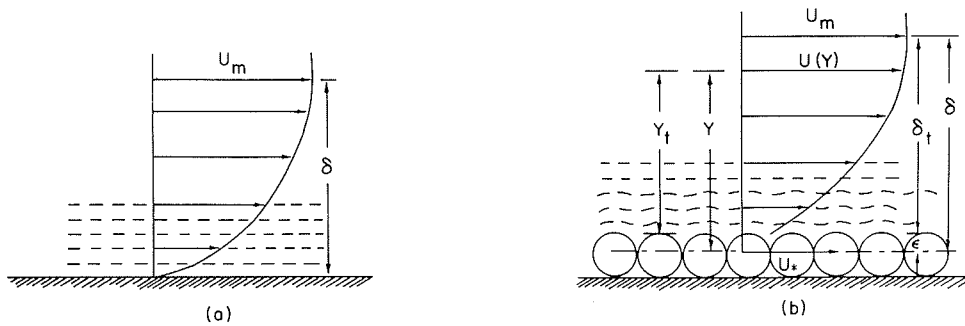


Figure 1 – Definition sketches for (a) the laminar velocity profile over a smooth boundary, and (b) the laminar velocity profile over a rough boundary.

Figure 1 – Croquis : a) profil de vitesses laminaires sur un fond lisse, b) profil de vitesses laminaires sur un fond rugueux.

so that, at some level, equation (1) becomes an appropriate expression for the velocity profile, providing that the origin for  $\delta$  and  $y$  can be adequately defined. Conventionally, in making velocity measurements over rough boundaries, the elevations of measuring points are referenced to the plane containing the tops of the roughness elements [Perry and Joubert, 6; Coleman, 4]. There is nothing to indicate *a priori* that the origin of the profile being measured is actually at this reference level, so true elevations  $\delta$  and  $y$  are:

$$\delta = \delta_t + \epsilon \quad \text{for, pour } U_m \quad (3a)$$

$$y = y_t + \epsilon \quad \text{for, pour } U(y) \quad (3b)$$

where  $\delta_t$  and  $y_t$  are elevations referenced to the tops of the roughness elements, and  $\epsilon$  is an algebraically additive correction. Figure 1b is a definition sketch for the usual relation between  $\delta$ ,  $\delta_t$ , and  $\epsilon$ , and also shows how, for the rough boundary case, the boundary shear velocity has to be imagined as existing at the effective boundary plane located by the determination of  $\epsilon$  in order for equation (1) to be presumed to hold.

Introducing equations (3a) and (3b), the rough boundary form of equation (1) becomes:

$$\frac{U}{U_*} = \left( \frac{U_* \delta_t}{2} + \frac{U_* \epsilon}{2} \right) \left[ 1 - \frac{y_t + \epsilon}{2(\delta_t + \epsilon)} \right] \quad (4)$$

Testing this equation for validity requires finding values of  $\epsilon$  and  $U_*$ . As in the Clauser [3] cross-plot procedure, it is necessary in this case to rewrite equation (4) to include  $U_m$  and  $C_f$  and to eliminate  $U_*$ . On substitution of equation (2), equation (4) becomes:

$$\frac{U}{U_m} = \left( \frac{C_f}{2} \frac{U_m y_t}{2} + \frac{C_f}{2} \frac{U_m \epsilon}{2} \right) \left[ 1 - \frac{y_t + \epsilon}{2(\delta_t + \epsilon)} \right] \quad (5)$$

At  $y_t$  equal to  $\delta_t$  equation (5) reduces to:

$$\frac{C_f}{4} \frac{U_m \delta_t}{V} + \frac{C_f}{4} \frac{U_m \epsilon}{V} = 1 \quad (6)$$

from which:

$$\epsilon = \frac{4V}{C_f U_m} - \delta_t \quad (7)$$

*négligeable au sein de l'écoulement, de sorte que, à un certain niveau, l'équation (1) devienne une expression correcte du profil de vitesse, sous réserve que les origines de  $\delta$  et  $y$  puissent être convenablement définies. Conventionnellement, lorsqu'on effectue des mesures de vitesses sur des plaques rugueuses, les cotes des points de mesure sont exprimées par rapport au plan contenant le sommet des rugosités [Perry et Joubert, 6 ; Coleman, 4]. Rien n'indique a priori que l'origine du profil en cours de mesure soit réellement à ce niveau de référence, de sorte que les cotes vraies  $\delta$  et  $y$  sont :*

*où  $\delta_t$  et  $y_t$  sont les côtes par rapport au sommet des rugosités, et  $\epsilon$  une correction algébriquement additive. La figure 1b représente la relation habituelle entre  $\delta$ ,  $\delta_t$ , et  $\epsilon$ , et montre également comment, dans le cas d'une lame rugueuse, la vitesse tangentielle à la limite doit, pour que l'équation (1) puisse être considérée comme valable, être imaginée comme existant dans le plan de la limite effective définie par la détermination d' $\epsilon$ .*

*En tenant compte des équations (3a) et (3b), la forme de l'équation (1) devient, pour les lames rugueuses :*

*Pour vérifier la validité de cette équation, il faut trouver les valeurs d' $\epsilon$  et de  $U_*$ . Comme dans la méthode de traçage de courbe de Clauser [3], il est nécessaire dans ce cas de récrire l'équation (4) pour  $y$  introduire  $U_m$  et  $C_f$  et en éliminer  $U_*$ . A la substitution de l'équation (2), l'équation (4) devient :*

*Pour  $y_t$  égal à  $\delta_t$ , l'équation (5) se réduit à :*

Equation (7) is an expression for  $\epsilon$  in terms of the measurable quantities  $U_m$  and  $\delta_t$ . However, it is useless without an independent expression for the friction coefficient  $C_f$ . Equation (5) can be made to produce the needed expression by evaluating it at  $y_t$  equal to  $\delta_t/10$ , substituting equation (7) back into the result, and solving for  $C_f$  to obtain:

$$C_f = \left( \frac{1600}{81R^2} - \frac{1600N}{81R^2} \right)^{1/2} \quad (8)$$

where  $R$  is the Reynolds number:

$$R = \frac{U_m \delta_t}{V} \quad (9)$$

and  $N$  is the value of  $U/U_m$  found at  $\delta_t/10$  by interpolation in a graph of a measured velocity profile. The re-substitution of equation (7) in the procedure above is permissible because  $\epsilon$  is a constant for a given profile.

With equations (7) and (8) as expressions for  $\epsilon$  and  $C_f$  in terms of experimental quantities, a measured laminar velocity profile plotted as  $U(y_t)$  may be examined by finding  $U_m$ ,  $\delta_t$ , and  $N$  from the plot, and then calculating  $C_f$  from equation (8),  $\epsilon$  from equation (7), and  $U_*$  from equation (2).

At this point, it might be reasoned that  $\epsilon$  must be small relative to  $\delta_t$  and to most values of  $y_t$ , so that the error introduced by ignoring the virtual origin correction might be insignificant. If  $\epsilon$  is assumed to be zero, then evaluating equation (5) at  $\delta_t/10$  gives:

$$N = \frac{19}{400} C_{f0} \frac{U_m \delta_t}{V} \quad (10)$$

so that:

$$C_{f0} = \frac{400 N}{19 R} \quad (11)$$

where  $C_{f0}$  denotes a value of  $C_f$  calculated under the assumption that  $\epsilon$  is zero. Under the same assumption,  $U_{*0}$  becomes:

$$U_{*0} = \left( \frac{C_{f0}}{2} \right)^{1/2} U_m \quad (12)$$

In what follows, velocity profiles will be treated using both  $U_*$  and  $U_{*0}$  to show the effect of neglecting  $\epsilon$ .

### Experimental data collection

The 16 velocity profiles used in this study have been selected from a more extensive series of 123 profiles measured by Coleman [4]. For the present purpose, only profiles in totally laminar flows have been considered.

These profiles were taken in a water tunnel with a rectangular conduit 9.45 m long, 280 mm wide, and 180 mm high. A bed composed of closed-packed plastic spheres, 13 mm in diameter, was fixed to the bottom of

L'équation (7) donne la valeur de  $\epsilon$  en fonction des quantités mesurables  $U_m$  et  $\delta_t$ . Elle ne sert cependant à rien en l'absence d'une expression indépendante donnant le coefficient de frottement  $C_f$ . On peut tirer l'expression voulue de l'équation (5) en prenant  $y_t$  égal à  $\delta_t/10$ , en reportant l'équation (7) dans le résultat, et en résolvant par rapport à  $C_f$ , ce qui donne :

où  $R$  est le nombre de Reynolds :

et  $N$  la valeur de  $U/U_m$  relevée en  $\delta_t/10$  par interpolation sur la courbe du profil des vitesses mesurées. La re-substitution de l'équation (7) dans le développement ci-dessus est admissible du fait que, pour un profil donné,  $\epsilon$  est une constante.

Avec les équations (7) et (8) donnant les valeurs de  $\epsilon$  et de  $C_f$  en fonction de quantités expérimentales, on peut examiner un profil des vitesses laminaires mesurées représenté sous la forme  $U = f(y_t)$  en prenant  $U_m$ ,  $\delta_t$ , et  $N$  sur la courbe, et en calculant ensuite  $C_f$  au moyen de l'équation (8),  $\epsilon$  de l'équation (7), et  $U_*$  de l'équation (2).

A ce point du raisonnement, on pourrait considérer qu' $\epsilon$  doit être faible par rapport à  $\delta_t$  et à la plupart des valeurs de  $y_t$ , de sorte que l'erreur introduite en ignorant la correction d'origine virtuelle pourrait être négligeable. Si l'on prend  $\epsilon$  égal à zéro, on tire de l'équation (5) pour  $\delta_t/10$  :

de sorte que

où  $C_{f0}$  représente la valeur de  $C_f$  calculée en supposant  $\epsilon$  égal à zéro. Dans la même hypothèse,  $U_{*0}$  devient :

Dans ce qui suit, les profils de vitesse sont traités en utilisant à la fois  $U_*$  et  $U_{*0}$  de façon à faire ressortir l'incidence de l'omission d' $\epsilon$ .

### Relevé des données expérimentales

Les 16 profils de vitesse utilisés dans cette étude ont été sélectionnés dans une série plus extensive de 123 profils mesurés par Coleman [4]. Dans le cas présent, seuls ont été pris en compte les profils relatifs aux écoulements totalement laminaires.

Ces profils ont été relevés dans un tunnel hydraulique dont le conduit rectangulaire avait 9,45 m de long, 280 mm de large, et 180 mm de haut. Un lit composé de sphères plastiques jointives de 13 mm de diamètre

the conduit. This bed was 1.4 m long, and its leading edge was 6.86 m below the upstream end of the water tunnel conduit. Profile measurements were made with a total head tube at a point on the centerline of the rough bed, 1 m away from the leading edge. The total head tube was attached to a differential pressure transducer, which was in turn referenced to a piezometer tap in the water tunnel sidewall. The electrical output of the pressure transducer was connected to an appropriate recording system for data storage. The total head tube was of the cylindrical, square-ended type, with an inside-to-outside diameter ratio of 0.6. In making the measurements, the tube was calibrated for velocity measurement in highly viscous fluids, and the usual pressure coefficient corrections were applied. The reader is referred to the original paper [Coleman, 4] for more detail on measurement procedures. Initial measurable gross properties of the velocity profiles are given in Table I.

*était fixé sur le fond du conduit. Ce lit avait 1,4 m de long, et son bord d'attaque était à 6,86 m de l'extrémité amont du conduit. Les mesures de profil ont été faites à l'aide d'un tube manométrique à pression totale en un point de l'axe du lit rugueux situé à 1 m du bord d'attaque. Le tube à pression totale était fixé à un transducteur de pression différentiel, lui-même relié à une prise piézométrique dans la paroi latérale du tunnel. Le signal de sortie du transducteur de pression était, pour permettre la conservation des données, dirigé sur un enregistreur approprié. Le tube à pression totale était du type cylindrique à bout carré ; le rapport entre son diamètre intérieur et son diamètre extérieur était de 0,6. Au moment des mesures, le tube a été calibré pour des mesures de vitesses dans des fluides à haute viscosité, et les corrections habituelles de coefficient de pression ont été appliquées. Pour de plus amples détails sur les méthodes de mesures, le lecteur se reportera à l'article original [Coleman, 4]. Les grandeurs initiales mesurables brutes sont données par le tableau I.*

Table 1. — Viscous flow velocity profile properties <i>Tableau I. — Caractéristiques des profils de vitesse en écoulement visqueux</i>				
Run No.	$V, m^2/s$	$U_m, m/s$	$\delta_t, mm$	$N_{10}$
1	$1.19 \times 10^{-3}$	0.24	76	0.32
2	$1.18 \times 10^{-3}$	0.34	82	0.31
3	$1.16 \times 10^{-3}$	0.53	76	0.34
4	$1.16 \times 10^{-3}$	0.74	79	0.36
5	$1.16 \times 10^{-3}$	1.04	82	0.35
6	$1.16 \times 10^{-3}$	1.42	82	0.33
7	$7.48 \times 10^{-4}$	0.31	74	0.34
8	$7.24 \times 10^{-4}$	0.47	85	0.34
9	$7.48 \times 10^{-4}$	0.64	82	0.32
10	$7.69 \times 10^{-4}$	0.96	82	0.33
11	$7.48 \times 10^{-4}$	1.42	82	0.30
12	$7.27 \times 10^{-4}$	1.87	82	0.28
13	$6.13 \times 10^{-4}$	0.41	82	0.33
14	$5.79 \times 10^{-4}$	0.49	85	0.32
15	$6.16 \times 10^{-4}$	0.75	87	0.34
16	$6.13 \times 10^{-4}$	1.14	81	0.28

Figure 2 is a plot of the first six profiles, in  $U(y_t)$  coordinates, showing how  $U_m$ ,  $\delta_t$ , and  $U$  at  $\delta_t/10$  can be determined. A semilogarithmic plot like this, with  $y_t$  on the logarithmic axis, is particularly useful for this purpose, since curves are more easily fitted to the data, the location of  $U_m$ , and hence  $\delta_t$ , is emphasized, and the interpolation of  $U$  at  $\delta_t/10$  is facilitated. Plots of this kind were made for all 16 profiles, and were used to determine the profile characteristics included in Table I. The kinematic viscosities  $V$  in Table I were determined by sampling the hydroxyethylcellulose solution used in each experiment, measuring the dynamic viscosity with a falling-ball viscosimeter, and weighing a known volume of the fluid to find the density.

*La figure 2 donne la courbe  $U = f(y_t)$  des six premiers profils, et montre comment peuvent être déterminés  $U_m$ ,  $\delta_t$ , et  $U$  pour  $\delta_t/10$ . Un tracé semi-logarithmique, dont l'axe  $y_t$  coïncide avec l'axe logarithmique, est particulièrement utile dans ce but, puisque les courbes s'adaptent mieux aux données, que l'emplacement de  $U_m$ , et par conséquent de  $\delta_t$ , est mis en valeur, et que l'interpolation de  $U$  pour  $\delta_t/10$  est facilitée. Des courbes analogues ont été tracées pour la totalité des 16 profils, et utilisées pour déterminer les caractéristiques des profils figurant au tableau I.*

*Les viscosités cinématiques  $V$  du tableau I ont été déterminées en échantillonnant la solution d'hydroxyethylcellulose utilisée dans chaque expérience, en mesurant la viscosité dynamique à l'aide d'un viscosimètre à bille, et en pesant un volume connu du fluide pour en connaître la densité.*

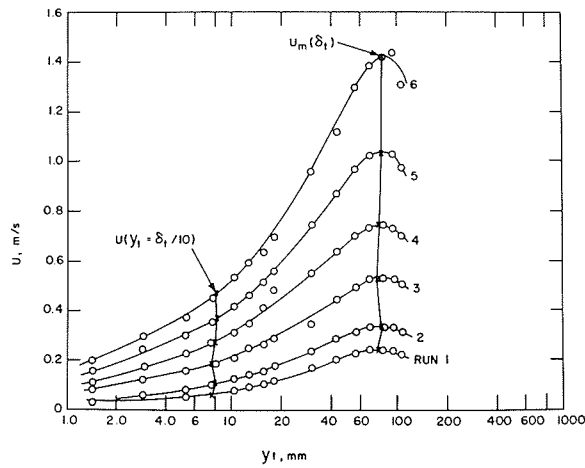


Figure 2 – The method of plotting the velocity profile  $U(y_1)$  for interpolation of  $U_{max}$  and  $U$  at  $\delta_t/10$ .

Figure 2 – Méthode de tracé de la courbe du profil de vitesse  $U = f(y_1)$  pour l'interpolation de  $U_{max}$  et  $U$  à  $\delta_t/10$ .

**Demonstration of profile analysis**

The 16 selected profiles were plotted as in Figure 2, and  $U_m$ ,  $\delta_t$ , and  $N_{10}$  were determined. The local friction coefficient  $C_f$  was then calculated from Equation (2), and the virtual origin correction  $\epsilon$  was found from Equation (7). Although a laminar flow is not influenced by boundary roughness in the same way that turbulent flow is, it is reasonable to suppose, at least as a first guess, that the relative virtual origin correction  $\epsilon/D$  should depend on the conventional roughness Reynolds number:

**Démonstration de l'analyse des profils**

Les 16 profils choisis furent tracés comme sur la figure 2, et  $U_m$ ,  $\delta_t$ , et  $N_{10}$  furent déterminés. Le coefficient de frottement local  $C_f$  fut alors calculé à partir de l'équation (2), et la correction d'origine virtuelle  $\epsilon$  trouvée à partir de l'équation (7). Bien qu'un écoulement laminaire ne soit pas influencé par la rugosité des parois de la même façon qu'un écoulement turbulent, il est raisonnable de supposer, au moins en première approximation, que la correction relative d'origine virtuelle  $\epsilon/D$  dépende du nombre de Reynolds conventionnel de la rugosité :

$$R_* = \frac{U_* D}{\nu} \tag{13}$$

where  $D$  is the roughness height—in this case, the sphere diameter. A plot of  $\epsilon/D$  against  $R_*$  is given in Figure 3. This plot indicates that  $\epsilon/D$  is at a maximum near  $R_*$

où  $D$  est la hauteur de l'aspérité, —dans le cas présent le diamètre de la sphère. La figure 3 donne la courbe de  $\epsilon/D$  en fonction de  $R_*$ . Cette courbe montre que

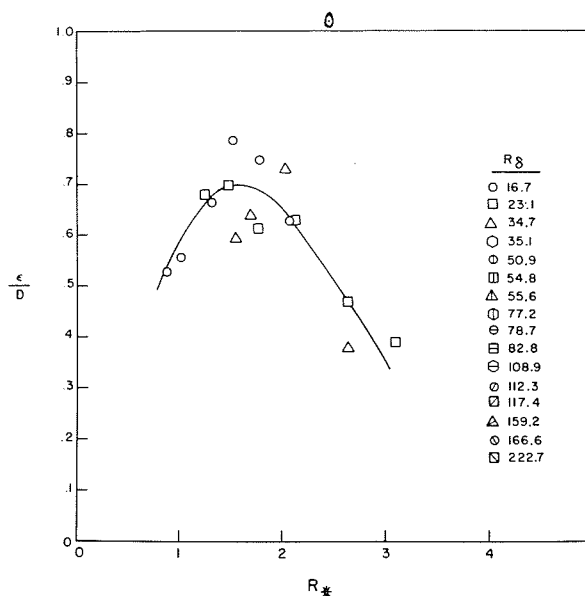


Figure 3 – The relation between the relative roughness correction ( $\epsilon/D$ ) and the roughness Reynolds number  $R_*$ .

Figure 3 – Relation entre la correction relative de rugosité ( $\epsilon/D$ ) et le nombre de Reynolds  $R_*$ .

equal to 1.5, and decreases rapidly as  $R_*$  approaches the value 3.5, which is the beginning of the transition from viscous to turbulent flow. The maximum value of  $\epsilon/D$  is on the order of 0.7.

After correcting all  $y_t$  values to  $y$  values for each profile, using the respective  $\epsilon$  corrections found, the profiles were plotted according to Equation (1). This is shown in Figure 4.

$\epsilon/D$  passe un maximum vers  $R_*$  égal à 1,5 et décroît rapidement quand  $R_*$  approche de la valeur 3,5, qui correspond au début du passage de l'écoulement visqueux à l'écoulement turbulent. La valeur maximale de  $\epsilon/D$  est de l'ordre de 0,7.

Après avoir ramené pour chaque profil toutes les valeurs de  $y_t$  à celle de  $y$ , en utilisant les corrections respectives  $\epsilon$  trouvées, la courbe des profils a été tracée d'après l'équation (1), ce qui apparaît dans la figure 4.

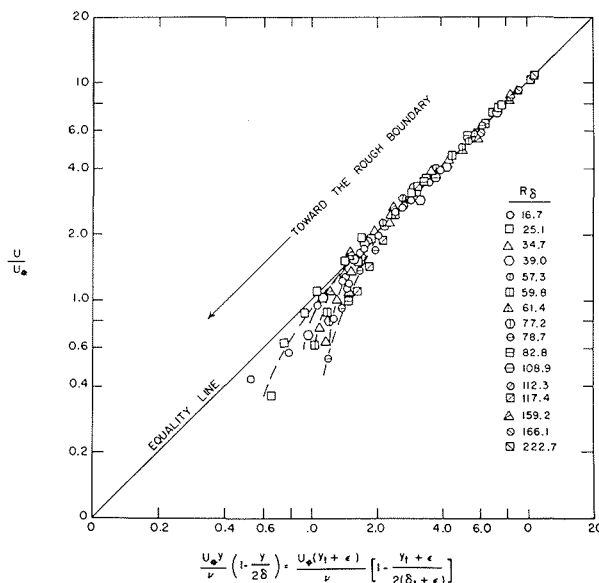


Figure 4 – Velocity profiles plotted according to Equation (1).

Figure 4 – Courbes des profils de vitesse d'après l'équation (1).

The  $R_\delta$  values in the legend of this and succeeding figures are values of  $R$  recomputed from equation (9) after correcting  $\delta_t$  to  $\delta$ . Each individual profile has excellent fit to the equality line in the outer part of the flow, while displaying a greater or lesser region of deviation near the rough boundary. These regions of deviation are interpreted to be the zones in proximity to the roughness elements where the streamlines are significantly neither straight nor parallel, as indicated in Figure 1b. If this interpretation is correct, then the thickness of the deviation region for a given profile, as indicated by the level at which that profile departs from the equality line, should be related to the displacement thickness:

Les valeurs de  $R_\delta$  dans la légende de cette figure et des suivantes sont les valeurs de  $R$  recalculées d'après l'équation (9) après correction de  $\delta_t$  en  $\delta$ . Chaque profil individuel concorde de façon excellente avec la ligne d'égalité dans la partie extérieure de l'écoulement, mais fait ressortir une plus ou moins grande région de déviation au voisinage de la lame rugueuse. Ces régions de déviation sont interprétées comme étant celles des zones proches des éléments rugueux, où les filets sont loin d'être rectilignes ou parallèles, comme l'indique la figure 1b. Si cette interprétation est correcte, l'épaisseur de la région de déviation pour un profil donné, telle qu'elle découle du niveau où le profil diverge de la ligne d'égalité, doit être liée à l'épaisseur du déplacement

$$\delta_D = \int_0^\delta \left(1 - \frac{U}{U_m}\right) dy \tag{14}$$

by a function of the form:

par une fonction de la forme

$$\left[\frac{U_* y}{V} \left(1 - \frac{y}{2\delta}\right)\right]_{\text{dev.}} = \text{funct.} \left[\frac{U_* \delta_D}{V} \left(1 - \frac{\delta_D}{2\delta}\right)\right] \tag{15}$$

Such a relation is verified by Figure 5.

Cette relation est vérifiée sur la figure 5.

The foregoing demonstrates the validity of the method of determining  $C_f$ ,  $U_*$ , and  $\epsilon$ , and gives at least a tentative interpretation of the occurrence of deviations from the expected function for the plotted profiles in the region very near the roughness elements.

Ce qui précède démontre la validité de la méthode de détermination de  $C_f$ ,  $U_*$ , et  $\epsilon$ , et fournit au moins un essai d'interprétation de l'existence de divergences entre la fonction prévue et les courbes de profils dans la région très proche des aspérités.

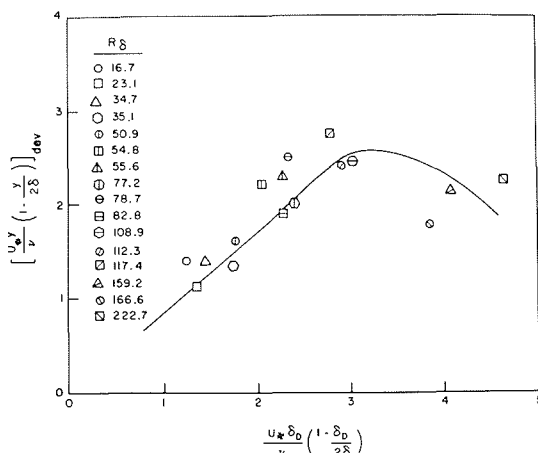


Figure 5 – The relation between the normalized thickness of the deviation region and the normalized displacement thickness.

Figure 5 – Relation entre l'épaisseur normalisée de la région de déviation et l'épaisseur normalisée de déplacement.

**The error induced by neglecting  $\epsilon$**

In Figure 4, the velocity profiles have been plotted using values of  $U_*$  calculated with values of  $C_f$  from equation (8), under the assumption that  $\epsilon$  was not zero. In Figure 6, the velocity profiles from Runs 1, 8, and 16 in Table 1 are plotted again, using values of  $U_{*0}$  calculated with  $C_{f0}$  from equation (11), under the assumption that  $\epsilon$  was zero. The results of neglecting  $\epsilon$  are evident. The individual profiles are displaced from the equality line. The excellent similitude displayed in Figure 4 for the region not adjacent to the roughness has been lost. Neglect of  $\epsilon$  has a significant effect in that it introduces errors in the calculation of  $C_f$  and  $U_*$ .

**Erreur introduite par l'omission d' $\epsilon$**

Dans la figure 4, les courbes des profils de vitesse ont été tracées en prenant les valeurs de  $U_*$  calculées avec les valeurs de  $C_f$  tirées de l'équation (8), en supposant  $\epsilon$  différent de zéro.

Dans la figure 6, les courbes des profils de vitesse obtenus dans les essais 1, 8, et 16 du tableau I, ont été retracées en prenant les valeurs de  $U_{*0}$  calculées avec  $C_{f0}$  tiré de l'équation (11), en supposant qu' $\epsilon$  était nul. Les résultats de l'omission d' $\epsilon$  sont évidents. Les profils individuels ne coïncident plus avec la ligne d'égalité. L'excellente similitude révélée par la Figure 4 pour la région non adjacente aux rugosités a disparu. L'omission d' $\epsilon$  a une conséquence importante, en ce sens qu'elle introduit des erreurs dans le calcul de  $C_f$  et de  $U_*$ .

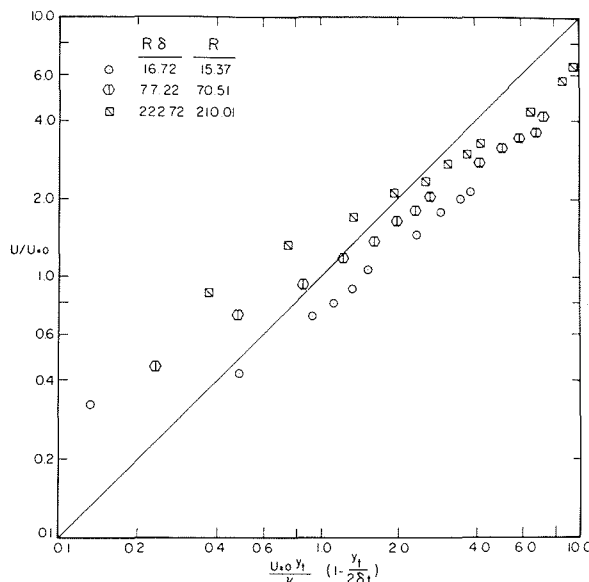


Figure 6 – The effect of neglecting the roughness correction  $\epsilon$ .

Figure 6 – Conséquences de l'omission de la correction de rugosité  $\epsilon$ .

**Conclusions**

It has been assumed that equation (1), the equation for the velocity distribution in laminar flow between

**Conclusions**

Il a été supposé que l'équation (1), équation donnant la répartition des vitesses dans un écoulement



parallel smooth boundaries, can be adapted to represent the velocity distribution in laminar flow over a rough boundary by introducing a virtual origin correction. Equation have been produced for calculating the virtual origin correction, and also the local friction coefficient and hence the boundary-shear velocity, from experimentally determined characteristics of velocity profiles.

The assumption that equation (1) can be applied to laminar flows over rough boundaries has been tested using some data from laminar flow over a boundary composed of close-packed spheres. Virtual origin corrections have been found by the method described here, and the relative correction  $\epsilon/D$  has been shown to be capable of being represented as a function of the conventional roughness Reynolds number  $R_*$ . This possibly reflects the action of the roughness elements in deflecting the streamlines near the boundary from parallelism. Equation (1) has been found to be valid over most of the laminar flow; however, for a given profile, a region of deviation exists near the boundary which is, again, probably the region of deflected streamlines. The thickness of this deviation region has been shown to be related to the displacement thickness for a given profile.

The effect of neglecting the virtual origin correction  $\epsilon$  has been investigated, and it has been shown that this results in significant error when  $U_*$  is estimated from measured profiles.

## Notations

$U$	local velocity;
$y$	distance from the profile origin to the point of measurement of local velocity;
$U_*$	boundary shear velocity;
$\delta$	distance from the boundary to the point of measured maximum velocity;
$V$	kinematic fluid viscosity;
$C_f$	local friction coefficient;
$U_m$	maximum velocity
$\delta_t$	the distance $\delta$ measured from the tops of roughness elements;
$y_t$	the distance $y$ measured from the tops of roughness elements;
$\epsilon$	the virtual origin correction;
$R$	gross flow Reynolds number;
$C_{f0}$	local friction coefficient calculated assuming that the virtual origin correction is zero;
$U_{*0}$	boundary shear velocity calculated assuming that the virtual origin correction is zero;
$N$	a ratio of a specified local velocity to the maximum velocity.
$R_*$	roughness Reynolds number;
$\delta_D$	displacement boundary layer thickness;
$D$	roughness height;
$R_\delta$	corrected gross flow Reynolds number.

*laminaire entre lames parallèles lisses, peut, en introduisant une correction d'origine virtuelle, être adaptée pour représenter la répartition des vitesses dans un écoulement laminaire sur une lame rugueuse. Des équations ont été établies pour calculer, à partir des caractéristiques des profils de vitesse déterminés expérimentalement, la correction d'origine virtuelle, ainsi que le coefficient de frottement local et par suite la vitesse tangentielle à la limite.*

*L'hypothèse que l'équation (1) peut s'appliquer à des écoulements sur des lames rugueuses a été vérifiée expérimentalement en utilisant certaines données fournies par un écoulement laminaire sur une lame composée de sphères jointives. Les corrections d'origine virtuelle ont été trouvées par la méthode décrite ici, et il a été montré que la correction relative  $\epsilon/D$  était susceptible d'être représentée par une fonction du nombre de Reynolds. Il se peut que ceci reflète l'action des éléments rugueux, qui dévient du parallélisme les filets proches de la lame. On a trouvé que l'équation (1) pouvait s'appliquer à la majeure partie de l'écoulement laminaire; il existe toutefois, pour un profil donné, une région de déviation voisine de la lame qui est probablement, de nouveau, la région des filets déviés. Il a été démontré que, pour un profil donné, l'épaisseur de cette région de déviation est liée à l'épaisseur du déplacement.*

## Notations

$U$	vitesse locale ;
$y$	distance entre l'origine du profil et le point de mesure de la vitesse locale ;
$U_*$	vitesse tangentielle à la limite ;
$\delta$	distance entre la lame et le point de vitesse maximale mesurée ;
$V$	viscosité cinématique du fluide ;
$C_f$	coefficient de frottement local ;
$U_m$	vitesse maximale ;
$\delta_t$	distance $\delta$ mesurée à partir du sommet des éléments rugueux ;
$y_t$	distance $y$ mesurée à partir du sommet des éléments rugueux ;
$\epsilon$	correction d'origine virtuelle ;
$R$	nombre de Reynolds de l'ensemble de l'écoulement ;
$C_{f0}$	coefficient de frottement local calculé en supposant que la correction d'origine virtuelle est nulle ;
$U_{*0}$	vitesse tangentielle à la limite, calculée en supposant que la correction d'origine virtuelle est nulle ;
$N$	rapport entre une vitesse locale donnée et la vitesse maximale ;
$R_*$	nombre de Reynolds de la rugosité ;
$\delta_D$	épaisseur de la couche limite de déplacement ;
$D$	hauteur de la rugosité
$R_\delta$	nombre de Reynolds corrigé de l'ensemble de l'écoulement.

## References

- [1] BAGNOLD R.A., 1941. – *Physics of Windblown Sand and Desert Dunes*. London: Methuen and Co., 265 pp.
- [2] BLINCO P.H. and PARTHENIADES E., 1971. – Turbulence characteristics in free surface flows over smooth and rough boundaries. *J. Hydraul. Res.*, 9 (1) : 43-71.
- [3] CLAUSER F.H., 1954. – Turbulent boundary layers in adverse pressure gradients. *J. Aeronautical Sci.*, 21 : 91-108.
- [4] COLEMAN N.L., 1979. – Bed particle Reynolds modeling for fluid drag. *J. Hydraul. Res.*, 17 (2) : 91-105.
- [5] COLES D., 1956. – The law of the wake in the turbulent boundary layer. *J. Fluid Mechanics*, 1 : 191-226.
- [6] PERRY A.E. and JOUBERT P.N., 1963. – Rough-wall boundary layers in adverse pressure gradients. *J. Fluid Mechanics*, 17 : 193-211.
- [7] SHIELDS A., 1936. – Anwendung der Aehnlichkeitsmechanik und der Turbulenzforschung auf die Geschiebebewegung. *Mitteilungen der Preussischen Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau*, Heft 26, ss. 375-532.