

Calcul des couches limites tridimensionnelles avec des viscosités turbulentes isotropiques et anisotropiques

Calculation of three-dimensional boundary layers with isotropic and anisotropic turbulent viscosities

A. Nakkasyan et I. L. Ryhming

Laboratoire de Mécanique des Fluides
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (Suisse)

Introduction

A l'heure actuelle encore, l'étude théorique des couches limites turbulentes tridimensionnelles reste au stade de recherche. Des modélisations trop simplistes des composantes des tenseurs de Reynolds ou de la production, de la destruction et du transport de la turbulence peuvent conduire à de fausses conclusions.

Par exemple, un calcul trop imprécis de la composante latérale de la vitesse près de la surface étudiée peut complètement fausser les prévisions de décollement de la couche limite.

Historiquement, les équations différentielles de la couche limite turbulente ont pu être résolues grâce au développement des ordinateurs digitaux. Toutefois, le développement des calculs numériques tridimensionnels des couches limites turbulentes est très récent. Lors du colloque de l'Euromech 60 [1] à Trondheim, en Norvège, des comparaisons systématiques des calculs tridimensionnels ont eu lieu pour la première fois.

Il existe dans la littérature une dizaine de cas d'écoulements pour lesquels des mesures très détaillées ont été effectuées, pour déterminer non seulement l'écoulement moyen, mais aussi les six composantes du tenseur de Reynolds dans la couche limite turbulente. L'une de ces expériences, dénommée BEEL 72 [2, 3], convient particulièrement pour vérifier les résultats obtenus par calcul. Il s'agit d'un écoulement sur une aile d'envergure infinie en flèche de 35° . L'aile est soumise à un gradient de pression adverse pour que la couche limite subisse un décollement.

Nous présentons ici un bref résumé de la méthode de calcul utilisée, du modèle des viscosités turbulentes anisotropiques et de nos résultats de calcul de la couche limite tridimensionnelle sur l'aile en question, comparés aux mesures.

Méthode

Mis à part les définitions pour les viscosités turbulentes, notre méthode de calcul est identique à celle présentée dans la réf. [4]. Une présentation détaillée est donnée dans la réf. [5].

La méthode consiste à chercher la solution des équations de la couche limite turbulente pour les composantes de la vitesse moyenne (u, v, w) dans un système de coordonnées curvilignes (x, y, z), en procédant par itérations successives pour résoudre le problème de couplage. Les axes, triple-orthogonaux, sont tels que x , l'axe longitudinal, est tangent à la ligne de courant externe de la couche limite, y est supposé confondu avec la droite normale à l'élément de surface solide et z , l'axe transversal, est perpendiculaire aux deux autres, (voir figure 1).

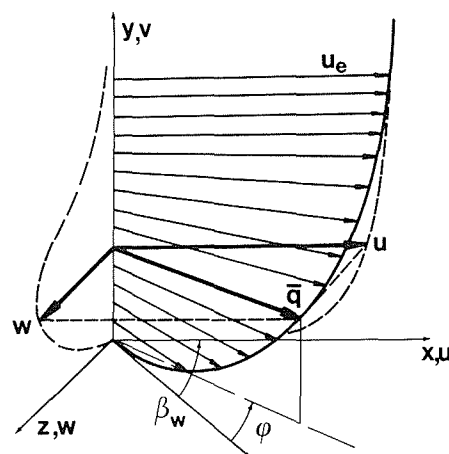


Figure 1 – Coordonnées et composantes de vitesse.

Les calculs effectués sur le cas BEEL 72 commencent avec deux profils (u, w) exprimés sous forme analytique d'après les mesures. Certaines données, telles que les pas d'intégration dans les directions (x, y, z) ou la qualité des courbes analytiques représentant les profils initiaux, peuvent influencer la précision des résultats.

Aussi, l'importance du choix des lois de viscosités turbulentes est primordiale. Dans la réf. [5] les viscosités turbulentes des deux régions complémentaires ϵ_{in} et ϵ_{out} sont prises soit comme isotropiques, soit proportionnelles

$$\epsilon_{in,z} = a \epsilon_{in,x} \text{ avec } a = 1 \text{ ou } 0,4$$

$$\text{et } \epsilon_{out,z} = b \epsilon_{out,x} \text{ ou } b \text{ est fixé par le point d'intersection issu de } \epsilon_{in,x} = \epsilon_{out,x}.$$

L'originalité de la méthode faisant l'objet de ce rapport réside dans le fait qu'en proposant de nouvelles définitions pour ϵ_{in} et ϵ_{out} , compte tenu de la rotation du vecteur vitesse ("skewing") exprimé en fonction de l'angle φ (voir figure 1), on peut calculer des coefficients de viscosités anisotropiques, qui tendent à la limite vers l'isotropie lorsque $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ a une valeur très faible. L'expression de ϵ_{out} , où l'intermittence est en général représentée par la fonction de Klébanoff, est aussi modifiée avantageusement en utilisant la fonction de corrélation selon Sarnecki (voir les explications plus détaillées qui suivent).

Cas expérimental calculé : BEEL 72 du NLR

L'expérience [2, 3], qui était mise au point dans la soufflerie du NLR, avait pour but de fournir une série de "bonnes mesures" aux chercheurs, afin que ces derniers puissent tester les différentes méthodes de calcul tridimensionnel de couches limites turbulentes [4, 5].

L'un des modèles physiques qui présente un grand intérêt pratique est une aile d'avion. Malheureusement,

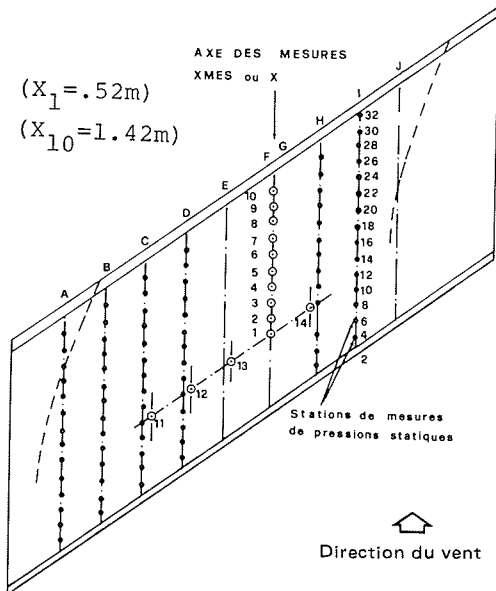


Figure 2 - Positions des 10 stations de mesures de profils de vitesses (sur l'axe x) et des stations de mesures de pressions statiques.

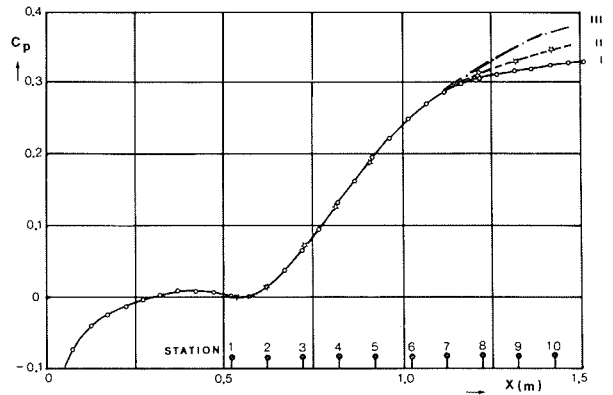


Figure 3 - Distributions des $C_p = \frac{p - p_1}{\frac{\rho}{2} U_1^2}$ le long de l'axe des mesures

- C_p^I : pression près de la paroi (fig. 12 dans réf. [2]).
- C_p^{II} : pression du bord extérieur de la couche
- $C_p^{III} \equiv C_p^{mod} = 1 - \left(\frac{\sin 39^\circ}{\sin 35^\circ + \alpha} \right)^2$ (fig. 12, dans réf. [2]).

sa géométrie est complexe et les courbures de sa surface influencent la structure de la turbulence. Cependant, un écoulement sur une aile d'envergure infinie développe une couche limite qui présente des simplifications mathématiques, tout en gardant l'essentiel des caractéristiques des couches limites turbulentes sur une aile d'avion. L'expérience de BEEL 72 a simulé le cas pratique, en créant artificiellement une distribution de pression équivalente sur une plaque plane. Les profils de vitesses u, w et les profils des six composantes du tenseur de Reynolds $\overline{u'u'}, \overline{v'v'}, \overline{w'w'}, -\overline{u'v'}, -\overline{u'w'}, -\overline{v'w'}$ sont mesurés respectivement en dix et huit stations sur le même axe de mesure, voir figure 2. Aussi, les mesures du coefficient de pression C_p , près de la paroi et près du bord extérieur de la couche sont données dans la figure 3.

Profils de vitesses initiales u et w

Le problème consiste à calculer les profils de vitesse initiales u et w pour le démarrage du programme. Dans cette zone, où le gradient de vitesse est presque nul, les profils mesurés sont à disposition, y compris les valeurs de Re_θ et C_F (nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de quantité de mouvement θ , et le coefficient de frottement). Le problème de la détermination de u a été résolu par Thomson [6] en écrivant

$$u = u_t \gamma_s + U_e (1 - \gamma_s)$$

où u_t représente la vitesse selon la loi de la paroi modifiée d'après van Driest [7], et γ_s la fonction de corrélation selon Sarnecki [8] ($\gamma_s = 1, y = 0$ et $\gamma_s = 0, y = \delta_s$). Thomson a trouvé que δ_s évalué à partir de la loi de la paroi est trop large dans la plupart des couches limites et il a tenu compte de ce fait dans ses diagrammes. Nous avons choisi de faire ceci d'une manière simple ; nous remplaçons δ_s par $f \cdot \delta_o$ où le paramètre f a la valeur 1 au début, et δ_o est la valeur de δ_s correspondant à C_F , et $u = U_e$. La région de sillage est, par conséquent, per-

mise de s'adapter le long de la courbe logarithmique jusqu'à ce que Re_θ coïncide avec sa valeur expérimentale [9].

Le problème de la détermination de w est moins critique, étant donné que $w/U_e \ll 1$. Cependant, nous avons modifié la formule selon Mager [10].

$$\frac{w}{u} = \tan \beta_w \left(1 - \frac{y}{\delta} \right)$$

où β_w est l'angle du vecteur vitesse près de la paroi par rapport à la direction de U_e , et δ l'épaisseur de la couche limite. En utilisant une simple forme quadratique pour $\delta = \delta(y)$ au lieu de prendre δ constant, un meilleur ajustement aux valeurs expérimentales est possible.

Nouvelle hypothèse : viscosités turbulentes dérivées de la notion de rotation de vecteur vitesse ("skewing")

Le but est de rendre le modèle de la viscosité turbulente compatible avec la notion de rotation des vecteurs vitesse, parce que le transfert de la quantité de mouvement dans la direction normale à la surface est influencé non seulement par le changement de vitesse, mais également par son changement de direction.

Smith *et al.* [11] avaient été les premiers à calculer une couche limite turbulente bidimensionnelle par la méthode des différences finies en utilisant deux viscosités turbulentes. Par une procédure similaire nous avons défini la viscosité de la région inférieure de la couche ϵ_{in} en fonction de la longueur de mélange de van Driest [7]. Ainsi, nous avons défini une deuxième viscosité,

$$\epsilon_{out} = 0,0168\rho U_e \delta^* \gamma$$

(où ρ est la densité de l'air et δ^* l'épaisseur de déplacement) pour exprimer le phénomène de l'intermittance en employant la fonction de corrélation $\gamma = \gamma_s$ de Sarnecki [8], déjà utilisé pour le calcul du profil initial de u . Rappelons que le processus habituel consiste à utiliser à la place de γ_s la fonction d'intermittance γ_K mesurée par Klébanoff [5, 11].

Une tridimensionnalisation simple a été effectuée en incluant uniquement les composantes τ_z et $\partial w/\partial y$, respectivement dans les définitions de la contrainte de cisaillement τ et des viscosités [5]. On obtient alors les viscosités isotropiques :

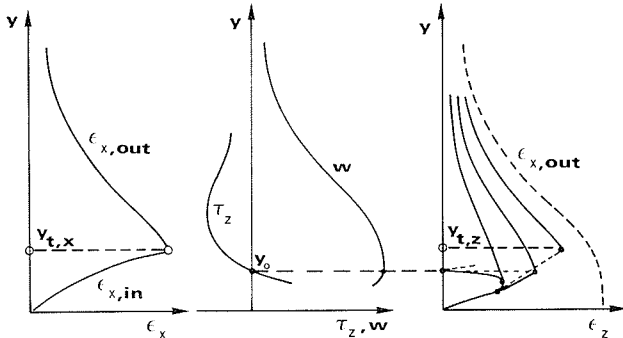


Figure 4 – Principes de construction de ϵ_x et ϵ_z pour solutions anisotropiques (voir texte).

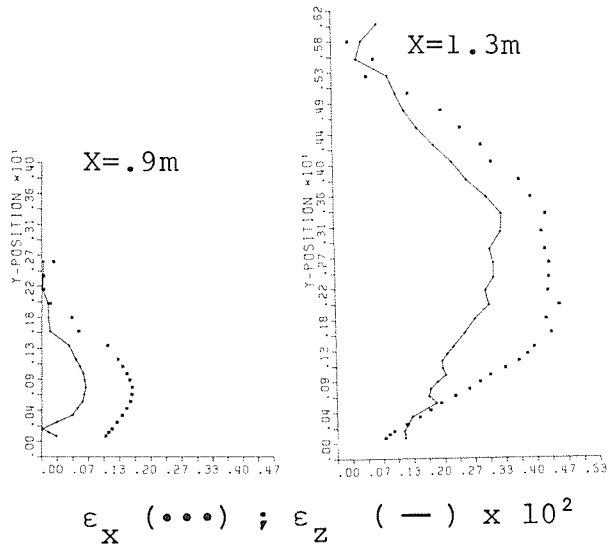


Figure 5 – ϵ_x et ϵ_z évaluées selon les mesures de BEEL 72.

$$\epsilon_{in,x} = \epsilon_{in,z} = \rho l^2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2} \equiv \epsilon_{in}$$

Pour un profil donné (ϵ_x ou ϵ_z), la transition de la zone "in" à la zone "out" a lieu à la profondeur $y = y_t$ et correspond au maximum du profil. Aussi, pour le cas particulier isotropique, la condition $y_{t,x} = y_{t,z}$ sera satisfaite (voir fig. 4).

Cependant, les mesures [2, 3, 12, 13, 14] suggèrent que le rapport ϵ_z/ϵ_x soit plus petit que 1. En particulier, l'analyse des données de BEEL 72 montre que :

- (a) en un point X donné, ϵ_z/ϵ_x est presque constant dans une profondeur centrale de la couche limite ;
- (b) ce rapport augmente régulièrement de 0,3 à 0,8 lorsque X varie entre 0,5 m et 1,4 m ;
- (c) au début $y_{t,x} = y_{t,z}$, mais dans la région du décollement de la couche, les profils des viscosités passent par des maxima en différentes profondeurs (voir fig. 5).

En tenant compte de la rotation du vecteur vitesse, les relations anisotropiques avec "skewing" pour $\epsilon_{in,x}$ et $\epsilon_{in,z}$ deviennent [15] :

$$\epsilon_{in,x} = \rho l^2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2} \left[\left(C_x \frac{\partial u}{\partial y} + C_z \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]^{-1/2} C_x$$

$$\epsilon_{in,z} = \rho l^2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2} \left[\left(C_x \frac{\partial u}{\partial y} + C_z \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]^{-1/2} C_z$$

où

$$C_x = \left[\frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_\varphi \right)^{-1} \right] = \left[\frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - w \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^{-1} \right]$$

$$C_z = \left[\frac{\partial w}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \Big|_\varphi \right)^{-1} \right] = \left[\frac{\partial w}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + u \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^{-1} \right]$$

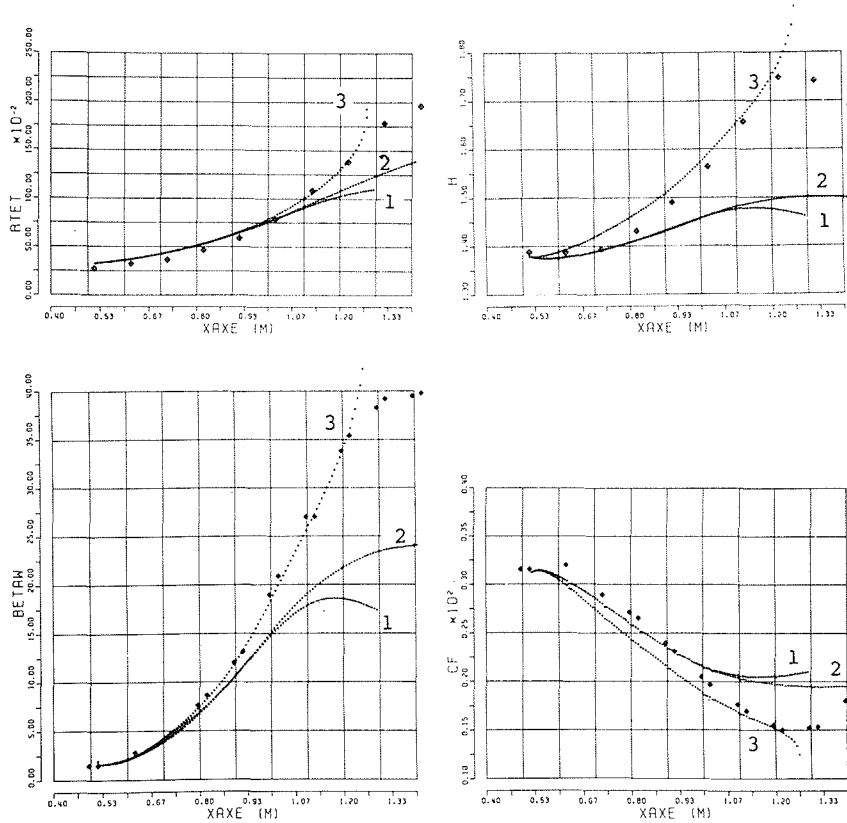


Figure 6a – Mesures et calculs isotropiques de R_θ , H , β_w , C_F (mesures***; calculs...).

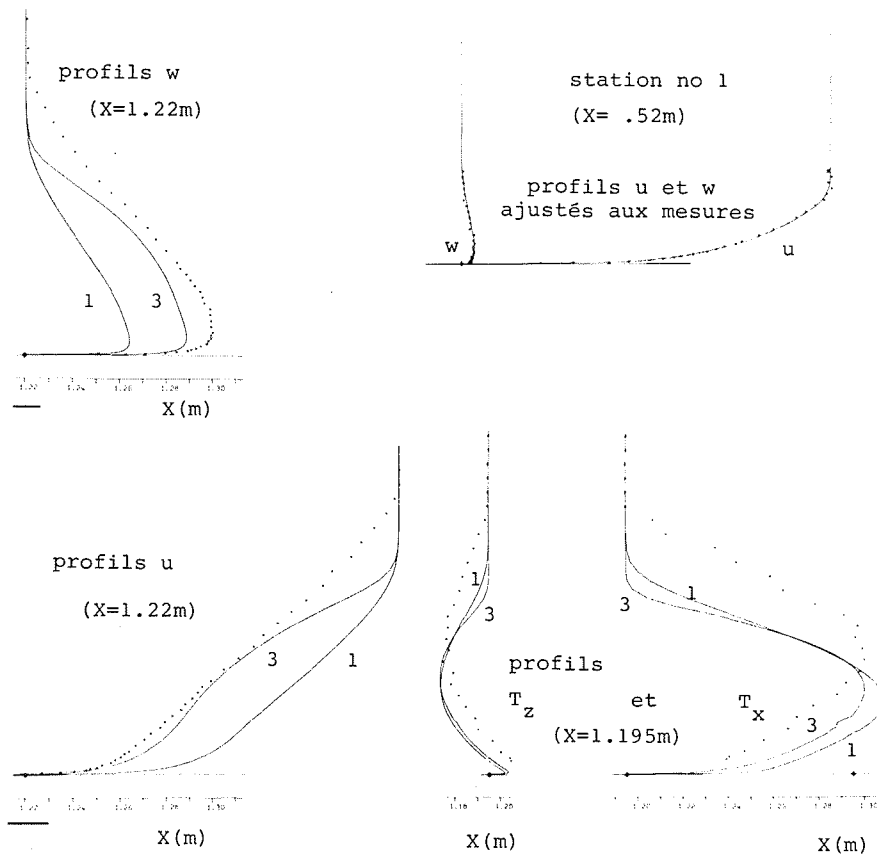


Figure 6b – Mesures et calculs isotropiques de u , w , T_x , T_z où $T_x = \frac{-\rho u'v'}{\frac{1}{2} \rho U_e^2}$ etc...

(mesures***; calculs...)
 courbe 1 : C_p (réf. [2]) et $\gamma = \gamma_K$ (réf. [15])
 courbe 2 : C_p^{mod} (fig. 3) et $\gamma = \gamma_K$
 courbe 3 : C_p^{mod} et $\gamma = \gamma_s$ (réf. [8]).

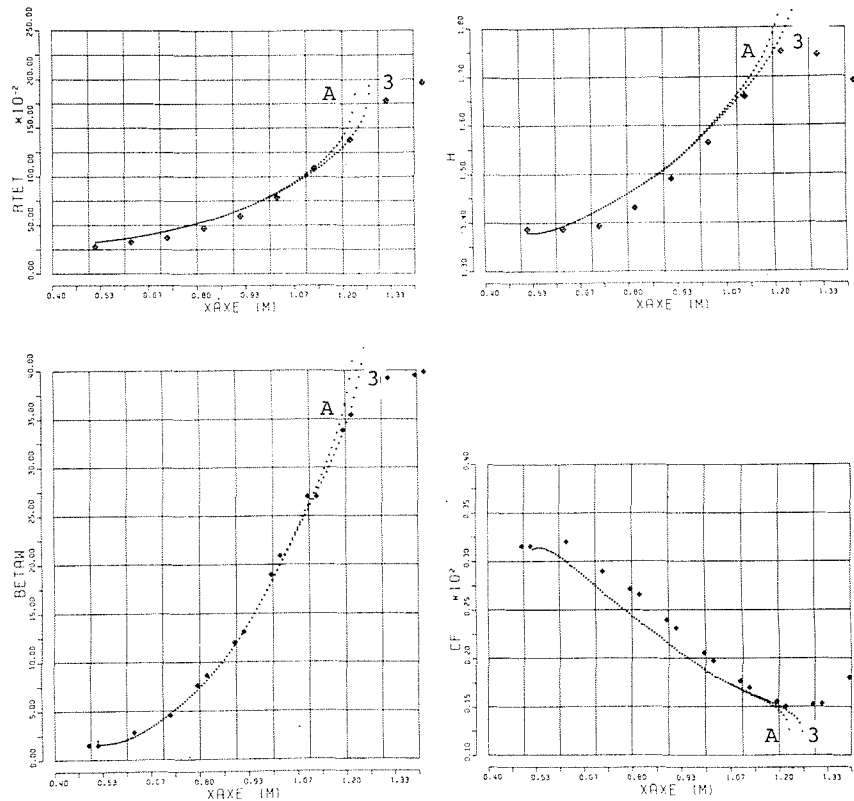


Figure 7a – Mesures et calculs de R_θ , H , B_w , C_F (mesures *** ; calculs ...).

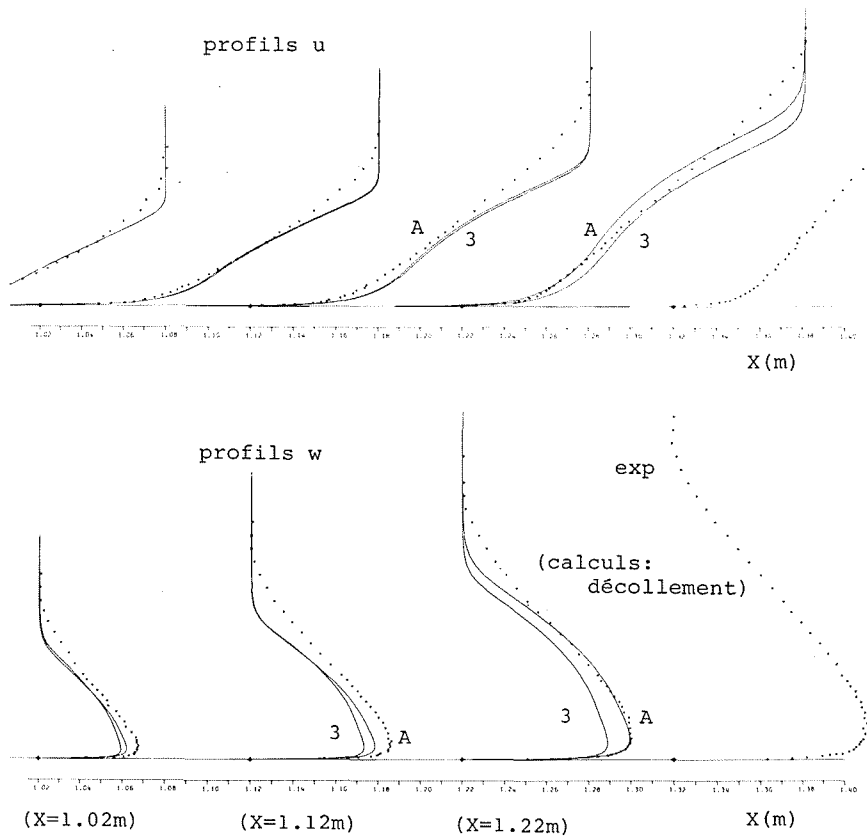


Figure 7b – Mesures et calculs de u et w (mesures *** ; calculs ...).

Figures 7a et 7b – Comparaisons des meilleurs calculs isotropiques (courbe 3) et anisotropiques avec correction de φ (voir solution A dans texte et réf. [15]).

Ces relations sont en accord avec la condition expérimentale ($\epsilon_z/\epsilon_x \leq 1$, puisque $C_x \geq 1$ et $C_z \leq 1$; l'isotropie ayant lieu pour $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$). Cependant, lorsque w atteint sa valeur maximale en $y = y_o$, la formule pour ϵ_z n'est plus valable ($\epsilon_z \rightarrow 0$).

Nous sommes donc obligés de faire des hypothèses supplémentaires sur la forme de ϵ_z dans une couche intermédiaire autour de $y = y_o$.

Plusieurs possibilités ont été envisagées (voir fig. 4). Nous en discuterons brièvement trois.

Une première solution, a priori prometteuse, a conduit aux instabilités de calculs numériques et a été abandonnée momentanément. L'idée est basée sur le fait qu'expérimentalement le zéro de τ_z a lieu tout près de y_o . On peut donc utiliser la règle de l'Hopital et évaluer

$$\epsilon_z(y_o) = \frac{\partial \tau_z}{\partial y} \Big|_{y_o} \cdot \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y_o} \right]^{-1}$$

Dans la région externe de la couche ($y > y_t$), le degré d'anisotropie est supposé donné par un rapport constant

$$\epsilon_{out,z} = \frac{C_z}{C_x}(y_{t,x}) \cdot \epsilon_{out,x}$$

$$\text{pour } y \geq y_{t,x} \quad \text{avec } y_{t,x} = y_o$$

Une deuxième solution consiste à introduire $\epsilon_{out,z}$ dès que $\epsilon_{in,z}$ atteint sa valeur maximale. On a donc $y_{t,x} \leq y_o$ et un degré plus important d'anisotropie. Enfin, une troisième solution, dénommée A, consiste à imposer la condition $y_{t,z} = y_{t,x}$. La valeur de ϵ_z dans la zone intermédiaire est ajustée de façon linéaire.

Présentation des résultats

Les résultats des calculs de couches limites comprennent les différents profils pour des stations de mesures et les caractéristiques de la couche limite en fonction de la distance parcourue sur la plaque, par exemple β_w, θ , etc. Quatre groupes de profils, mesurés (x) ou calculés (-) sont directement comparables : u, w, τ_x et τ_z .

En outre, on peut comparer les viscosités calculées avec les rapports expérimentaux $\left| \tau_x / \frac{\partial u}{\partial y} \right|$ et $\left| \tau_z / \frac{\partial w}{\partial y} \right|$. Ces "viscosités expérimentales" sont précieuses, car malgré leurs grandes fluctuations, elles indiquent clairement que l'anisotropie est présente dans presque toute l'épaisseur de la couche limite, à l'exception du voisinage immédiat de l'écoulement libre (voir fig. 5).

Cependant, nos derniers calculs montrent que même dans l'hypothèse d'isotropie parfaite, les résultats peuvent être relativement bons, à condition d'utiliser

a) le gradient de pression $C_p^{\text{mod}} = 1 - \left(\frac{\sin 39^\circ}{\sin(35^\circ + \alpha)} \right)^2$ correspondant à l'angle α au bord de la couche limite (fig. 12 dans réf. [2]).

b) la fonction de corrélation γ_s de Sarnecki (réf. [8])

La figure 6 résume les améliorations successives obtenues dans trois cas différents, tous dans l'hypothèse d'isotropie parfaite :

1 : C_p (tableau 2 dans réf. [2]),

$$\text{et } \gamma = \gamma_k = \left[1 + 5.5 \left(\frac{y}{\delta} \right)^6 \right]^{-1}$$

2 : C_p^{mod} (fig. 3) , et $\gamma = \text{idem}$ (réf. [5] [11])

3 : C_p^{mod} , et $\gamma = \gamma_s \left(\frac{y}{\delta_s} \right)$ (réf. [8])

Nos calculs avec viscosités anisotropiques sont encore au stade préliminaire. Toutefois, la figure 7, où la solution dénommée A est représentée, donne une idée générale actuelle de ces calculs. Les comparaisons montrent que les profils des vitesses anisotropiques sont légèrement meilleurs. Quant aux caractéristiques intégrales de la couche, les différences entre calculs restent minimes en général. Pour résumer, les calculs de la couche tridimensionnelle appliquée au cas précis de BEEL 72 semblent satisfaisants, sauf dans la région de décollement.

Références

- [1] EAST L.F. - *Computation of the three-dimensional turbulent boundary layers*. Euromech 60, Trondheim 75, FFA TN AE-1 211, 1975.
- [2] VAN DEN BERG B., ELSENAAR A. - *Measurements in a three-dimensional incompressible turbulent boundary layer in an adverse pressure gradient under infinite swept wing conditions*. NLR TR 72092 U (1972).
- [3] ELSENAAR A., BOELSMA S.H. - *Measurements of the Reynold stress tensor in a three-dimensional turbulent boundary layer under infinite swept wing conditions*. NLR TR 74095 U (1974).
- [4] FANNELOP T.K., HUMPHREYS D.A. - *The solution of the laminar and turbulent three-dimensional boundary layer equations with a simple finite difference technique*. FFA 126, 1974.
- [5] NAKKASYAN A. et RYHMING I.L. - *Calcul de couches limites tridimensionnelles avec des viscosités turbulentes anisotropiques*. Rapport L.M.F. - R-7 82, EPFL.
- [6] THOMPSON B.G.J. - *A new two-parameter family of mean velocity profiles for incompressible turbulent boundary layers on smooth walls*. Aeronautical Research Council Reports and Memoranda No 3463 (1967).
- [7] VAN DRIEST E.R. - *On turbulent flow near a wall* - *J. Ae. Sci.*, Vol. 23, No. 11 (November 1956) pp. 1007-1011, 1036.
- [8] SARNECKI A.J. - *Ph. D. Dissertation*, Cambridge University, 1959, (voir aussi réf. [6]).
- [9] BERTELROD A., TRUONG T.V. et AVELLAN F. - *Drag reduction in turbulent boundary layers using ribbons* AIAA-82-1370, 1982.
- [10] MAGER A. - *Three-dimensional laminar boundary layers. Theory of laminar flows*. Ed. F.K. Moore, Princeton, 1964.
- [11] SMITH A.M.O., JAFFE M.A., LIND R.C. - *Study of the general method of solution of the incompressible turbulent boundary layer equations*. Douglas Aircraft Co., Report No. LB52949, 1945.
- [12] VERMEULEN A.J., HEAD M.R. - *Measurements of three dimensional turbulent boundary layers*. RAE-DFVLR Seminar on "Non-hypersonic" boundary layers, London 1971, pp. 32-35.
- [13] JOHNSTON J.P. - *Measurements in a three-dimensional turbulent boundary layer induced by a swept, forward-facing step*. *J. Fluid Mech.*, Vol. 42, p.4 (July 30, 1970), pp. 823-844.
- [14] EAST L.F. - *Measurements of the turbulent boundary layer on a slender wing*. Paper presented at Euromech 33, Berlin 1972.
- [15] RYHMING I.L., FANNELOP T.K. - *A 3D law-of-the-wall including skewness and roughness effects*. IUTAM Symposium on Three-Dimensional Turbulent Boundary Layers. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1982.

Discussion

Président : J. DODU

M. le Président. — Je remercie vivement M. RYHMING de sa communication dont il y a lieu de souligner l'intérêt fondamental.

Remarquant que, dans son exposé, M. RYHMING a rendu compte d'une comparaison entre éléments calculés et résultats expérimentaux sur des aspects globaux (évolutions d'angles, de déviations, etc . . .) je souhaiterais savoir s'il aurait été possible et fructueux, pour de telles expériences, de disposer d'informations locales sur les taux de turbulence et, par conséquent, sur les tensions de paroi qui en découlent.

M. RYHMING. — Je vais faire projeter des diapositives qui vous montreront les difficultés à cet égard, les résultats de cette expérience faite par les Hollandais.

Il s'ensuit une discussion sur la présentation des différentes diapositives et M. RYHMING ajoute que, suite à ces essais expérimentaux, on a beaucoup d'informations fondamentales pour contrôler le fonctionnement du modèle de turbulence, notre choix simpliste est beaucoup critiqué dans la littérature. Je pense néanmoins que cette méthode est valable pour toutes les couches de cisaillement simple, c'est-à-dire les couches limites sur une paroi.

Je ne pense pas qu'un tel modèle puisse fonctionner dans d'autres configurations. Il existe une méthode dans laquelle on utilise deux équations de transfert qui s'ajoutent à notre système, cela coûte beaucoup plus cher pour effectuer le calcul. Je peux vous dire que les résultats que j'ai vus avec cette méthode sont inférieurs aux nôtres, à plusieurs égards.

Par conséquent, il n'est pas certain qu'une représentation mathématique plus complexe de la turbulence donnera un meilleur résultat.

M. MICHEL. — Je voudrais vous demander si le concept d'anisotropie est tributaire de la modélisation que vous avez prise. Plus précisément, est-ce que ce concept est tributaire de la modélisation des tensions de Reynolds en $\epsilon\delta u/\delta y$?

M. RYHMING. — Non, je dirai que l'anisotropie est dérivée parce qu'on oublie à ce moment là qu'il y a un taux de variation de φ ; on peut contrôler alors les différents paramètres par rapport à la direction de φ . Je pense que, dans la couche, très bas de la surface, il est important d'inclure cette correction parce qu'elle permet de calculer le degré d'anisotropie ; notre graphique le montre facilement. Mais il y a d'autres aspects dans cette affaire ; il y a d'autres paramètres dont on n'est pas encore tout à fait sûr. Il est clair qu'il faut maintenant regarder les autres mesures qui ont été faites ; dans la littérature, il existe une dizaine de cas qui ont à peu près la même base que celle prise par les Hollandais. On a donc une information sur quelques-unes de ces couches limites où l'on peut tester un modèle comme le nôtre avec les expériences. Nous allons continuer dans cette voie.

Le Président. — Je remercie beaucoup M. RYHMING de l'excellente information qu'il nous a donnée sur les travaux qu'il a faits et je crois que son projet de persévérer dans cette voie de travail est extrêmement intéressant et mérite d'être soutenu.

Abstract

Calculation of the three-dimensional boundary layers with isotropic and anisotropic turbulent viscosities

The three-dimensional turbulent boundary layer equations are solved numerically using a finite difference technique identical to that explained in "The solution of the laminar and turbulent three-dimensional boundary layer equations with a simple finite difference technique", FFA 126, 1974 by T.K. Fannelöp and D.A. Humphreys. The calculations dealt with in the present report put forward new solutions using anisotropic viscosities ϵ_{in} and ϵ_{out} . The new definitions of $\epsilon_{in,x}$ and $\epsilon_{in,z}$ are arrived at by taking into account the skewing effect discussed by I.L. Ryhming and T.K. Fannelöp in "A 3-D law-of-the-wall including skewness and roughness effects", IUTAM Symposium on Three-Dimensional Turbulent Boundary Layers, published by Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1982. The expression ϵ_{out} where the intermittence is generally represented by Klebanoff's function, is modified to advantage by Sarnecki's correlation function.

The measurements obtained by the classic experiment BEE72 done by the NLR (National Aerospace Laboratory, Amsterdam), which simulates the three-dimensional boundary layer on an infinite span swept wing leading to separation have been used to test the calculations. These measurements are sufficiently accurate to allow us to conclude that the aniso-

tropy (ϵ_z/ϵ_x) evaluated experimentally is initially of the order of 0.3, and reaches 0.8 in the separation zone. It is therefore relatively simple to test the validity of the hypotheses used in the anisotropic calculations.

However, there is one difficulty which complicates the situation as the formula for anisotropic $\epsilon_{in,z}$ is no longer valid ($\epsilon_{in,z} \rightarrow 0$) when we approach the depth where the speed component w reaches its maximum value. Three possibilities are discussed briefly to try to solve this problem provisionally.

The results of the three-dimensional boundary layer calculations are given in the form of graphs. The Figures include measurements and values calculated

- (a) for the integral characteristics of the boundary layer ($R_\theta, H, \beta_w, C_F$) as a function of the distance travelled on the distance travelled on the wing surface and
- (b) for the speed components and shear stress (u, w, τ_x, τ_z) as a function of the depth of the layer at a fixed point in the distance travelled.

The comparisons show that the anisotropic speed profiles are slightly better, that the integral characteristics differ very little and that the separation region is systematically calculated too early, even if the results are very satisfactory elsewhere.