
Calcul direct de la vitesse de chute d'un grain sphérique dans un fluide

Direct calculation of the fall velocity of a spherical grain in a fluid

J. Valembois

Contrôleur Général Adjoint
à la Direction des Etudes et Recherches
d'Electricité de France

Le calcul de la vitesse de chute d'un grain sphérique dans un fluide peut se faire directement, sans passer par une procédure d'approximations successives. La méthode, qui est intéressante pour le calcul sur machine, en particulier sur les calculateurs de poche, utilise les propriétés du nombre sans dimensions G (paramètre du grain), proposé par l'auteur en 1960.

The fall velocity of a spherical grain in a fluid can be calculated directly without resorting to successive approximations. The method is of interest for calculating on a computer, especially mini-computers. It uses the properties of the non-dimensional number G (grain parameter) proposed by the author in 1960.

Notations

g : accélération de la pesanteur,
 D : diamètre du grain,
 ρ_s : masse volumique du grain,
 ρ : masse volumique du fluide,
 $\epsilon = (\rho_s - \rho)/\rho$: densité apparente du grain dans le fluide,
 ν : viscosité cinématique du fluide,
 W : vitesse de chute du grain dans le fluide,
 $R_W = WD/\nu$: nombre de Reynolds de l'écoulement autour du grain,
 C_D : coefficient de traînée, fonction de R_W ,
 G : paramètre du grain,
 $G = \epsilon g D^3 / \nu^2$

Notation :

g : acceleration of gravity,
 D : grain diameter,
 ρ_s : unit mass of the grain,
 ρ : unit mass of the fluid,
 $\epsilon = (\rho_s - \rho)/\rho$: apparent density of the grain in the fluid,
 ν : kinematic viscosity of the fluid,
 W : fall velocity of the grain in the fluid,
 $R_W = WD/\nu$: Reynolds number corresponding to the free fall of the grain,
 C_D : drag coefficient as a function of R_W ,
 G : grain parameter.
 $G = \epsilon g D^3 / \nu^2$

Calcul habituel de la vitesse de chute

Pour calculer la vitesse de chute d'un corps dans un fluide au repos, on écrit que le poids apparent P_{app} du corps dans le fluide est égal à la traînée T correspondant à la vitesse de chute W .

Pour un grain sphérique :

$$\begin{aligned} P_{app} &= (\rho_s - \rho) g (\pi D^3 / 6) \\ T &= C_D (\rho W^2 / 2) (\pi D^2 / 4) \end{aligned}$$

C_D étant fonction de $R_W = WD/\nu$, l'équation $P_{app} = T$ permet d'obtenir W , en procédant par approximations successives.

Utilisation du paramètre de grain G

Ce paramètre, introduit par nous en 1960 [1], permet de procéder à un calcul direct.

Il s'écrit :

$$G = \frac{\rho_s - \rho}{\rho} g \frac{D^3}{\nu^2} = \epsilon g D^3 / \nu^2 \quad (1)$$

Ce nombre sans dimensions caractérise à la fois le *sédiment*, ici une sphère, par son diamètre D et sa masse volumique ρ_s , le *fluide* dans lequel cette sphère tombe, par sa masse volumique ρ et sa viscosité cinématique ν , et le *champ de forces* qui agit sur la sphère, par la valeur de g .

On voit facilement que $P_{app} = T$ peut s'écrire :

$$G = 0,75 C_D R_W^2 \quad (2)$$

Comme C_D est fonction de R_W , (2) s'écrit :

$$R_W = \varphi(G)$$

On peut tracer la courbe $G(R_W)$ à partir des valeurs connues de $C_D(R_W)$ et de l'équation (2), ou bien calculer un tableau des valeurs de G en fonction de R_W , ou encore déterminer des relations analytiques approchées $R_W = \varphi(G)$, utilisables sur un calculateur.

La procédure est alors :

- 1) Calcul de $G = \epsilon g D^3 / \nu^2$
- 2) Calcul de $R_W = \varphi(G)$
- 3) Calcul de $W = R_W \nu / D$

Conventional calculation of fall velocity

To calculate the fall velocity of a body in a still fluid, the apparent weight P_{app} of the body in the fluid is written as equal to the drag T corresponding to the fall velocity W .

For a spherical grain :

$$\begin{aligned} P_{app} &= (\rho_s - \rho) g (\pi D^3 / 6) \\ T &= C_D (\rho W^2 / 2) (\pi D^2 / 4) \end{aligned}$$

C_D being a function of $R_W = WD/\nu$, the equation $P_{app} = T$ yields W by a process of successive approximations.

Use of the grain parameter G

This parameter, introduced by the author in 1960 [1], allows a direct calculation to be performed.

It is written :

$$G = \frac{\rho_s - \rho}{\rho} g \frac{D^3}{\nu^2} = \epsilon g D^3 / \nu^2 \quad (1)$$

This non-dimensional number portrays the *sediment*, here a sphere, by its diameter D and its unit mass ρ_s ; the *fluid* receiving this sphere by its unit mass ρ and its kinematic viscosity ν , and the *field of forces* acting on the sphere by the value of g .

It can easily be seen that $P_{app} = T$ can be written :

$$G = 0,75 C_D R_W^2 \quad (2)$$

As C_D is a function of R_W , (2) becomes :

$$G = f(R_W) \quad (3)$$

The curve $G(R_W)$ can be drawn using the known value of $C_D(R_W)$ and equation (2). Alternatively, a table of the values of G as a function of R_W can be calculated, or the approximate analytical relations, $R_W = \varphi(G)$ which can be used on a computer can be determined.

The procedure then becomes :

- 1) Calculation of $G = \epsilon g D^3 / \nu^2$,
- 2) Calculation of $R_W = \varphi(G)$,
- 3) Calculation of $W = R_W \nu / D$.

On trouvera ci-dessous les formules $R_W(G)$ que nous utilisons, dans un programme très simple, sur un calculateur de poche. Elles ont été déterminées pour donner une approximation convenable des valeurs que l'on pourrait relever sur les courbes $G(R_W)$ établies comme on l'a indiqué plus haut.

The formulae $R_W(G)$ used in a very simple programme on a mini-computer are given below. They were determined to give an appropriate estimate of the values which could be read off the curves $G(R_W)$ established as indicated above.

G	$R_W = \varphi(G)$
$G \leq 10$	$R_W = 0,0556 G$
$10 < G \leq 300$	$R_W = 0,0784 G^{0,85}$
$300 < G \leq 67\ 000$	$R_W = 0,1711 G^{0,713}$
$67\ 000 < G$	$R_W = 1,826 G^{0,5}$

Les données d'entrée sont D, ρ_s, ρ, ν (la valeur de g étant supposée $9,81 \text{ m/s}^2$). Le programme donne directement W (il ne nous est pas apparu utile de détailler ici ce programme, qui est très simple).

Il faut noter que le procédé (et le programme) permettent de calculer aussi bien :

- les vitesses de chute (ou de remontée) de particules solides dans un liquide ou un gaz ;
- les vitesses de chute de particules liquides (supposées rester sphériques) dans un gaz ;
- les vitesses de remontée de particules gazeuses (supposées rester sphériques) dans un liquide.

Nota : On pourra voir dans [1] que le paramètre G possède d'intéressantes propriétés, utilisables avec profit dans l'étude des lois du transport solide.

The data entries are D, ρ_s, ρ, ν (the value of g is assumed to be 9.81 m/s^2). The programme gives W directly (it has not seemed of interest to give the details of this very simple programme here).

It should be observed that the procedure (and the programme) allow for the calculation of :

- fall (or ascent) velocities of solid particles in a liquid or a gas,
- the fall velocities of liquid particles (assumed to have remained spherical) in a gas ;
- the ascent velocities of gaseous particles (assumed to have remained spherical) in a liquid.

Note : It can be observed in [1] that the parameter G has interesting properties, which can be of value in the study of laws governing sediment transport.

Référence

- [1] VALEMOIS J. – Etude sur modèle du transport littoral. Conditions de similitude. *Proceedings of the Seventh Conference on Coastal Engineering*, Vol. 1, p. 307-317, La Haye, août 1960.