

La géométrie fractale des nuages et des régions de pluie et les simulations aléatoires

*The fractal geometry of clouds and rain zones
with random simulations*

S. Lovejoy

Ingénieur canadien en stage à l'Établissement d'Études
et de Recherche en Physique de l'Atmosphère
78470 Magny-les-Hameaux

1. Introduction

Sur une large gamme d'échelles spatio-temporelles, la pluie met en évidence une variabilité extraordinaire, et une intermittence extrêmement forte.

Sur une carte de pluie obtenue par radar (Fig. 1), on trouve une multitude de structures en ligne droite – des “bandes”, des “fronts”, et des “lignes de grains”.

Dans la suite de cet article, deux aspects principaux de champ de l'intensité de la pluie seront examinés :

– d'une part, les variations qui respectent des lois d'invariance d'échelles et conduisent à une géométrie fractale (Mandelbrot 1975-1977-1982),

– d'autre part, la nature erratique de ces fluctuations liées à la hiérarchie des structures en ligne droite.

A partir de quelques données empiriques, il devient possible de construire des modèles aléatoires assez réalistes du point de vue statistique et visuel.

2. L'intermittence et l'effet NOE

La notion d'intermittence est liée à la succession, spatiale ou temporelle, d'épisodes “calmes” et d'épisodes “très actifs”, transition soudaine d'un type d'épisode à un autre.

Appelons :

$r(t)$ le flux total (en m^3/s) de la pluie pour un orage donné,

Δr une variation donnée de ce flux $r(t)$,

ΔR les variations aléatoires de ce flux,

P_r la probabilité d'observer des variations $\Delta R > \Delta r$.

Lorsque la loi de distribution en probabilité est du type “hyperbolique”, c'est-à-dire lorsque :

$$P_r(\Delta R > \Delta r) \cong (\Delta r)^{-\alpha} \quad (1)$$



Figure 1 – Photo de pluie obtenue par radar à une altitude de 3 km, et prise dans l'Atlantique en zone tropicale, avec une résolution de 4×4 km. Les symboles indiquent les taux de pluie sur une échelle logarithmique. Les astérisques représentent soit du bruit (centre) ou la portée maximale du radar (220 km). On peut noter :

- a) la grande “complexité” des formes, et
- b) la mise en évidence de plusieurs structures en lignes droites.

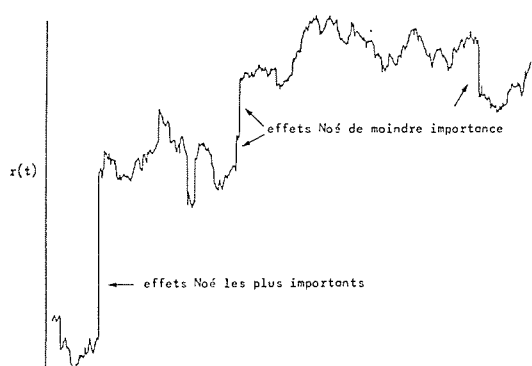


Figure 2 – Simulation du type Monte Carlo d'une série temporelle de la pluie $r(t)$ construite par l'addition de 1 300 variables aléatoires indépendantes venant d'une distribution Δr . Des changements positifs et négatifs ont une même probabilité. On remarque que dans n'importe quel intervalle, une grande partie du changement en $r(t)$ est due à un seul grand "saut", d'où le comportement intermittent ou "erratique".

de très large fluctuations sont fréquentes et la fonction $r(t)$ présente de très fortes discontinuités comme l'indique la figure 2.

D'une analyse portant sur de nombreux résultats expérimentaux, il a été démontré (Lovejoy 1981) que le flux de pluie R suit une loi de la forme (1) avec $\alpha \approx 5/3$.

Il est intéressant de signaler que cette même valeur α a été trouvée pour le flux d'énergie cinétique (Schertzer et Lovejoy, 1983).

Le comportement hyperbolique des fluctuations a également été mis en évidence pour :

Les champs de vent :	$\alpha \approx 5$
La force de flottabilité :	$\alpha \approx 10/3$
le nombre de Richardson :	$a \approx 1$

Les probabilités de ce type ont tout d'abord la propriété suivante : lorsque la fonction $P_r(\Delta R > \Delta r)$ décroît très lentement, la variance devient infinie.

Mais elles ont aussi cette autre propriété : la plus grande valeur aléatoire relevée dans un échantillon donné est du même ordre de grandeur que la somme de toutes les autres valeurs de cet échantillon.

C'est cette dernière propriété qui a été surnommée "Effet Noé" (Mandelbrot et Wallis) par référence au Déluge : une fluctuation l'emporte très nettement sur les autres.

Pour des statisticiens, les propriétés de ces probabilités étaient considérées comme "bizarres", les distributions hyperboliques étaient exclues a priori des modèles statistiques. Mandelbrot affirme, au contraire, que ces propriétés s'appliquent dans plusieurs domaines.

Lorsqu'on étudie une fonction aléatoire en prenant la somme de nombreuses variables de ce type (Fig. 2), la fonction est discontinue et la plus grande discontinuité domine toutes les autres.

C'est également vrai pour tous les intervalles de temps considérés, ce qui confirme que ce comportement se manifeste à toutes les échelles. Dans le cas présent, les discontinuités les plus larges peuvent être identifiées avec des fronts de pluie, et il apparaît toute une gamme de discontinuités plus faibles qui correspondent à des fronts de pluie de moindre importance.

Les figures 3a, b, c, montrent le résultat d'une généralisation de la figure 2 en trois dimensions (l'espace horizontal et le temps) décrit par Lovejoy et Mandelbrot (1983) et par Lovejoy *et al.* (1983), ce qui confirme clairement l'existence de lignes droites.

Il est important de noter que le type hyperbolique d'une loi de probabilité est invariant par changement des unités dans lesquelles la variable aléatoire est exprimée. Notre modèle est invariant pour des changements d'échelles spatio-temporelles.

En conséquence, les fronts de pluie doivent obéir à cette même loi d'invariance d'échelle et ceci est confirmé d'une manière beaucoup plus directe en utilisant une méthode de classification objective des structures en ligne droite à partir des observations faites par radar ou transmises par satellites (Lovejoy *et al.*, 1983).

En analysant le rapport entre les aires et les périmètres des régions de pluie et des régions de nuages entre 1 km^2 et $1,2 \times 10^6 \text{ km}^2$ (Fig. 4), il a été démontré (Lovejoy 1982) que les aires de pluie n'ont pas d'échelles caractéristiques et donc qu'elles sont fractales.

D'après les données récentes de LANDSAT, ce comportement subsiste au moins jusqu'à des échelles de $4 \times 10^{-2} \text{ km}^2$ (communication privée de R. Calahan).

Ce résultat est l'expression mathématique de l'idée intuitive que la forme des nuages et des régions de pluie est composée d'une infinité de "bosses" de différentes échelles. Si l'on ajoute à cette interprétation "l'effet Noé", on constate que les aires de pluie sont bornées par des courbes fractales (qui sont discontinues à toutes les échelles) et par des structures en ligne droite.

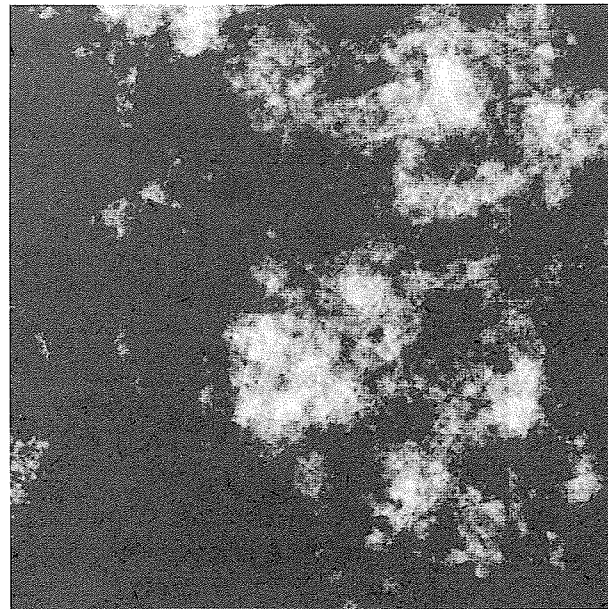


Figure 3a – Première généralisation de la figure 2 à l'espace et au temps, du type "fronts". Le fond (pas de pluie) est noir, et l'intensité de pluie, en échelle logarithmique, est représentée par celle des blancs. Le modèle était construit sur un réseau de 800×800 points additionnant 250 000 "fronts" (discontinuités) avec des intensités hyperboliques ($\alpha = 5/3$). On peut noter la similitude de ce champ avec des images de nuages, ce qui n'est pas surprenant, étant donné les liens intimes entre champ de pluie et nuage (Fig. 4). La loi d'invariance d'échelle pour ce champ est caractérisé par $H = 1/2$.

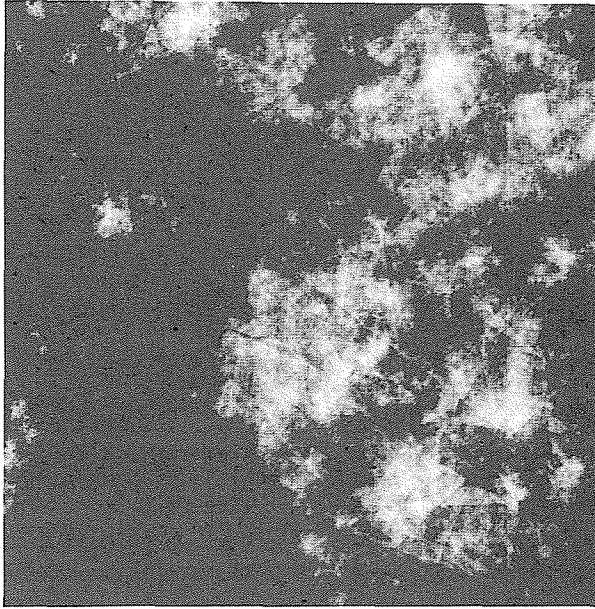


Figure 3b – Même légende que figure 3a. Elle est obtenue à un temps différent, sous l'hypothèse de Taylor. (dite de "turbulence gelée"). C'est-à-dire que les différents temps obtenus (Fig. 3a, b, c) correspondent à des coupes bidimensionnelles (x, y) d'un champ tridimensionnel isotrope (x, y, t) : la coordonnée "temps" joue le même rôle qu'en coordonnée spatiale.

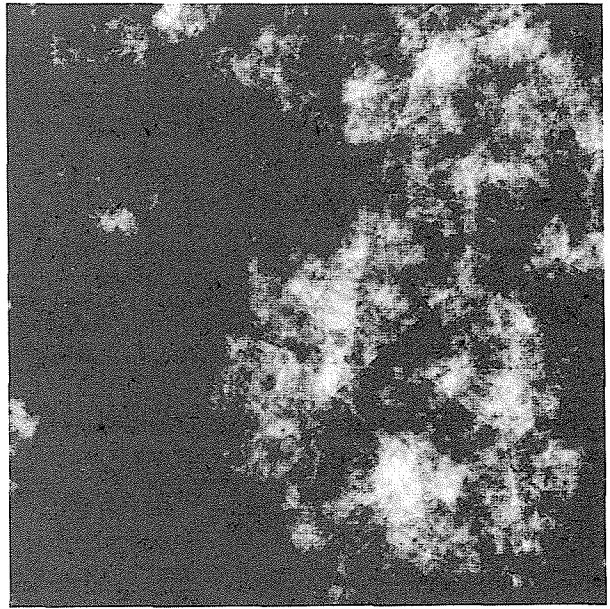


Figure 3c – Même légende que figure 3a, b. La différence de temps entre les images correspond à un écartement spatial de 32 éléments de grille.



Figure 3d – Modèle du type "anneaux" de Lovejoy et Mandelbrot (1983), construit sur un réseau 400×400 en additionnant 160 000 formes en anneaux avec des intensités hyperboliques avec $\alpha = 5/3$. La loi d'invariance d'échelle est caractérisée par $H = 1/\alpha = 3/5$. L'intensité de la pluie est représentée sur une échelle logarithmique par la noirceur du point de grille, sur un fond blanc.

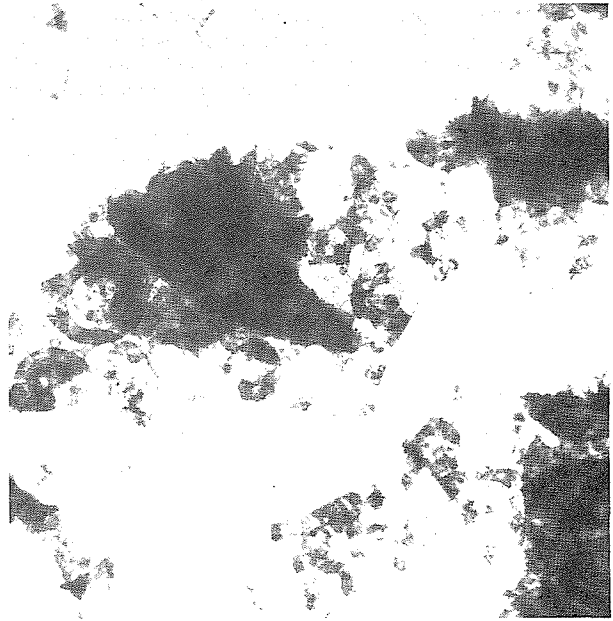


Figure 3e – Exemple d'un modèle du même type que 3d sur un réseau 800×800 avec une densité d'anneaux quatre fois inférieure à celle de la figure précédente. L'insuffisance du nombre d'anneaux met en évidence les formes de base du modèle – les anneaux de toutes tailles. L'usage d'autres formes de bases produira des champs ayant des valeurs de α et H identiques – les différences apparaîtront à d'autres niveaux. Une interprétation physique de ces formes (les "tourbillons" de base) et des études plus systématiques des données seraient évidemment nécessaires pour aller plus loin.

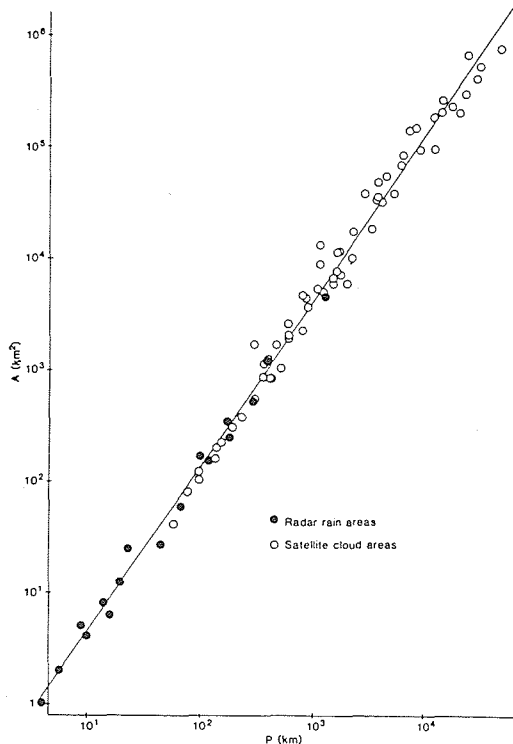


Figure 4 - Le rapport entre les aires (A) et périmètres (P) des régions de pluie radar et nuages satellitaires avec une résolution de 1 km (Lovejoy (1982)). L'étude du rapport A - P a été proposée par Mandelbrot (1977) pour caractériser la "complexité" des périmètres. Un périmètre "fractal" de dimension (D) suit la règle $P \propto (\sqrt{A})^D$. Pour $D = 1$, les périmètres sont "lisses", non-fractals, obéissant à la géométrie "classique". Pour des périmètres de plus en plus compliqués, $D \rightarrow 2$, la dimension d'un plan. Dans le cas présent, on trouve $D \sim 1,35$ avec un coefficient de corrélation $\rho = 0,994$. Il est important de noter que n'intervient aucun changement de pente sur toute la gamme d'échelles en question (~ 2 km à 1 000 km), les petites aires ayant des périmètres de même "complexité" que les grands. Il n'y a donc pas d'évidence d'échelles caractéristiques.

Sur un plan horizontal, le champ de pluie est donc composé d'un grand nombre de fronts (ou de lignes droites) dont les plus larges dominent tous les autres et correspondent aux "bandes" et aux "fronts" que l'on distingue sur les cartes de pluie radar.

La nature erratique de la pluie est importante, non seulement au niveau de la morphologie, mais également en ce qui concerne les fluctuations aléatoires de grande amplitude, ce qui pose un sérieux problème aux prévisions déterministes.

3. Evidence empirique de l'effet Noé

L'observation des fluctuations du flux de pluie sur une aire isolée a été faite avec des cartes radar ayant une résolution de 4×4 km, toutes les 5 minutes à Montréal, en Espagne et sur l'Atlantique en zone tropicale. Ces aires de pluie se fractionnant et/ou se regroupant, il était indispensable d'établir un critère de choix pour déterminer la fonction $r(t)$.

La figure 5 représente la probabilité pour des aires de pluie de conserver leur forme avec quelques légères

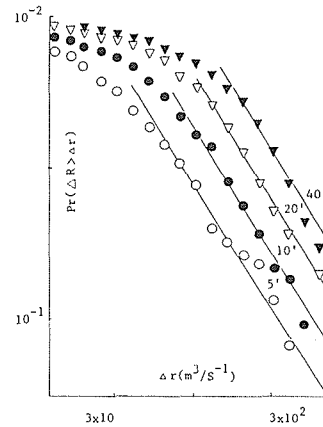


Figure 5 - Probabilité ($P_r(\Delta R > \Delta r)$) pour qu'un changement aléatoire du flux de pluie (ΔR) dépasse un Δr (négatif) donné. Les cercles blancs correspondent à $\Delta t = 5$ minutes, les cercles noirs, à $\Delta t = 10$ minutes, les triangles blancs, à $\Delta t = 20$ minutes, et les triangles noirs à $\Delta t = 40$ minutes. Les lignes droites ont une pente $\alpha = -5/3$ ($1/\alpha = -\alpha$). Les mesures ont été effectuées lors de deux après-midi en Espagne. Des distributions semblables ont été mises en évidence à Montréal et dans l'Atlantique en zone tropicale.

modifications pendant au moins 100 minutes. Ces aires ont été observées jusqu'à une division ou un regroupement avec d'autres orages, après quoi cette aire de pluie était considérée comme morte (Tsonis et Austin 1981). On constate que moins de 10 % des aires de pluie satisfont à ce critère (Lovejoy et Mandelbrot 1983).

4. L'effet "Joseph" et la prévisibilité des flux de pluie.

Une comparaison des distributions de Δr pour des intervalles de temps différents (Δt) peut fournir des informations sur l'existence des échelles temporelles dans les processus générateurs de pluie. Quand de tels processus sont régis par un temps caractéristique (T), la forme de la distribution de $\Delta r(\Delta t)$ pour $\Delta t < T$ et pour $\Delta t > T$ est différente, ainsi que la distance entre les courbes de la figure 5. On constate, au contraire, qu'en doublant Δt , les distributions varient avec le facteur 2^H , H étant le paramètre de la loi d'invariance d'échelle.

En effet, la loi d'invariance d'échelle s'écrit de façon générale

$$\Delta R(\lambda \Delta t) \stackrel{d}{=} \lambda^H \Delta R(\Delta t)$$

pour tous les facteurs λ . Le symbole $\stackrel{d}{=}$ représentant l'égalité en distribution de probabilité.

On peut noter, que si les fluctuations (ΔR) suivent la loi précédente et que si la variance était finie, le spectre $E(\omega)$ aurait une loi de puissance:

$$E(\omega) \propto \omega^{-\beta}$$

avec $\beta = 2H + 1$ (ω étant la fréquence)

Pour les données indiquées en figure 5, l'exposant H est presque constant : $H = 0,69 \pm 0,060$ ou $H = 0,59$ selon la façon dont on l'estime (Lovejoy et Mandelbrot 1983). Mandelbrot (1975) a montré que si les fluctua-

tions sont indépendantes, $H_{\text{ind}} = 1/\alpha$. Cette possibilité n'est donc pas exclue de nos données qui indiquent pour $\alpha = 5/3$, $H_{\text{ind}} = 0.60$. Par contre, si $1/\alpha \neq H$, les fluctuations sont statistiquement liées pour très longtemps et ce sont ces fluctuations persistantes dans le temps que Mandelbrot et Wallis (1968) ont nommé "Effet Joseph" par analogie avec les sept années maigres et les sept années grasses de la Bible.

Si les fluctuations sont indépendantes, il est impossible de faire des prévisions de changements futurs sur la seule base des données des pluies précédentes. Cette conclusion a été avancée par Tsonis et Austin (1981) et est incompatible avec la notion de "cycle de vie des orages".

On peut également déterminer le H spatial à partir d'un champ de pluie radar. Lovejoy (1981) a trouvé une valeur de H égale à 0,50 sous les tropiques.

5. La construction de modèles aléatoires de la pluie

A partir de la loi d'invariance d'échelle H , et de l'hyperbolicité α , il est possible de construire un modèle fractal, très simple, comportant peu de paramètres et reproduisant un grand nombre des caractéristiques de véritables champs de pluie. A la différence du cas gaussien, les processus hyperboliques permettent de grandes possibilités, car les formes des régions de pluie varient à l'infini.

Concrètement, les paramètres α et H ne suffisent plus pour caractériser un champ de pluie et d'autres paramètres, telle "la lacunarité", doivent être pris en compte (Mandelbrot 1982).

Les figures 3a, b, c représentent un type de modèle construit en additionnant un grand nombre de fronts ou de discontinuités en ligne droite de toutes tailles. Un modèle plus satisfaisant, pour des raisons mathématiques entre autres, est représenté par la figure 3d ; il a été construit en additionnant un grand nombre d'anneaux (visibles sur la figure 3e qui était une étape intermédiaire). Dans ce cas, les structures en ligne droite correspondent à des petites sections d'anneaux de grands diamètres.

Pour adapter ce modèle à l'évolution temporelle, il convient d'utiliser le fait que les lois d'invariance d'échelles temporelles et horizontales sont identiques (hypothèse Taylor qui nécessite une étude systématique de ses limites).

On peut également envisager une généralisation à la structure verticale en utilisant, éventuellement, le concept de "stratification aléatoire" (Schertzer et Lovejoy, 1983).

6. Conclusions

Des données en provenance d'Espagne, de Montréal, de la zone tropicale de l'Atlantique et de l'Océan indien, ont été utilisées pour cerner la nature très intermittente (erratique) de la pluie et le rapport entre les grandes et les petites échelles temporelles et spatiales. Les principaux résultats sont les suivants :

- la nature intermittente des fluctuations peut être caractérisée par des distributions hyperboliques ($\alpha \cong 5/3$). Dans ce cas, le champ de pluie est composé d'un grand nombre de discontinuités (fronts) dont on n'aperçoit que les plus importantes (effet Noé).
- des fluctuations existent à toutes les échelles, au moins entre 200 m et 1 000 km, et sont régies par une loi d'invariance d'échelle. La forme des aires de pluie est donc de géométrie fractale.
- enfin, il est possible de simuler numériquement des champs aléatoires qui reproduisent assez fidèlement plusieurs des caractéristiques des champs de pluie réels : intermittence, loi d'invariance d'échelles, structures en lignes droites, complexité des formes (dimension fractale des périmètres), etc.

Remerciements

Je tiens à remercier ici MM. D. Schertzer, B. Mandelbrot, G.L. Austin, M. Gilet et J. Tardieu, pour les discussions fructueuses qui m'ont aidé à mener à terme ces recherches.

Références

- MANDELBROT B., WALLIS J.R., 1968. — Noah, Joseph and operational hydrology. *Water Resources Research* 4, 909-918.
- MANDELBROT B., 1975. — Les objets fractals ; forme, hasard et dimension. Paris, Flammarion.
- MANDELBROT B., 1977. — Fractals: form, chance and dimension. Freeman and Co. San Francisco 365 pp.
- MANDELBROT B., 1982. — The fractal geometry of nature. Freeman and Co. San Francisco 460 pp.
- LOVEJOY S., 1981. — An analysis of rain areas in terms of fractals. Preprint vol. 20th Conference on radar meteor. AMS Boston, 476-484.
- LOVEJOY S., 1982. — The area-perimeter relationship for rain and cloud areas. *Science* 216, 185-187.
- LOVEJOY S., TARDIEU J., MONCEAU G., 1983. — Etude d'une situation frontale. Analyse météorologique et fractale. A paraître en *La Météorologie*.
- LOVEJOY S., MANDELBROT B., 1983. — A fractal model of rain. Soumis à *J. Atmos. Science*.
- SCHERTZER D., LOVEJOY S., 1983. — The dimension of atmospheric motions. Soumis à *J. Atmos. Science*.
- TSONIS T., AUSTIN G.L., 1981: An evaluation of extrapolation techniques for the short-term prediction of rain amounts. *Atmos.-Ocean*, 19, 54-65.

Discussion

Président : P. GUILLOT

M. LAFORE. — Je voudrais poser deux questions qui débordent un peu dans le cadre de l'hydrologie.

Les simulations que vous nous avez présentées concernent des champs de pluie et je trouve intéressant que l'on arrive à construire de cette façon des champs cohérents ayant une structure analogue à celle que l'on observe dans la réalité. De tels modèles doivent pouvoir être utilisés pour d'autres champs scalaires dont on connaîtrait les caractéristiques fractales ; mais peut-on construire des modèles aléatoires de ce type pour des quantités vectorielles, comme le vent par exemple ?

Est-il possible par ailleurs, en introduisant d'autres équations de simuler des champs simultanés ?

M. LOVEJOY. — Tout d'abord, je crois qu'il ne faut pas voir ces modèles comme une fin en soi. On pourrait effectivement construire des modèles à partir des équations et essayer ensuite de retrouver certaines lois simples comme, par exemple, des lois d'invariance d'échelle : mais on n'en est pas encore là. Les modèles dont j'ai parlé ont l'avantage d'être relativement simples et de dépendre de peu de paramètres ; ils permettent déjà de mieux comprendre les phénomènes champ par champ. Plus tard seulement, on pourra s'intéresser au cas des champs simultanés, mais il reste encore beaucoup à faire avant cela.

Vous avez évoqué également les champs de vent ; on sait actuellement construire un champ vectoriel de vent gaussien ; mais dans la réalité le vent est loin d'être un phénomène gaussien et se caractérise plutôt par des distributions de type hyperbolique.

M. OBLED. — Je voudrais faire une remarque à propos de l'utilisation du variogramme. Il s'agit d'un outil pratique que l'on utilise fréquemment en cartographie, qui a justement l'avantage de permettre de traiter des champs à variance infinie : c'est le

cas notamment des variogrammes de la forme $\gamma(d) = d^2 \log d$ associées aux fonctions splines, ou des variogrammes de la forme $\gamma(d) = \beta d^\alpha$ avec $\alpha > 1$.

M. LOVEJOY. — Je n'ai pas voulu dire qu'il n'était pas intéressant d'utiliser le variogramme pour caractériser la structure d'un phénomène. Seulement, c'est un fait, dès que la variance paraît tendre vers une limite que l'on croît asymptotique, on a tendance à considérer que le phénomène a une certaine portée et qu'il n'y a donc plus de corrélation.

Mais vous avez raison, cela ne vient pas du variogramme, mais plutôt de l'interprétation qu'on en fait.

M. OBLED. — Les simulations aléatoires que nous avons vues concernent des phénomènes instantanés, mais que se passe-t-il quand on intègre temporellement le champ, comme on le fait dans la réalité, lorsqu'on empile des images radar ou que l'on utilise des données pluviographiques ; ne risque-t-on pas ainsi de privilégier certaines structures ou certaines échelles d'espace ? Par exemple, lorsque l'on travaille sur des pluies horaires ou sur des épisodes pluvieux, on constate empiriquement que le phénomène présente une espèce de portée et qu'il existe donc une certaine distance de décorrélation dont la valeur varie d'ailleurs avec le pas de temps d'intégration.

M. LOVEJOY. — Le rapport entre variations temporelles et spatiales est effectivement très intéressant et faire une intégration dans le temps revient bien à introduire une échelle supplémentaire. Je crois que certains aspects — comme la valeur de α , par exemple — ne doivent pas changer très rapidement ; il est possible toutefois, qu'en intégrant de la sorte, on fasse une séparation d'échelle quelque part.