SOCIÉTÉ HYDROTECHNIQUE DE FRANCE

Comité technique — Session n° 127 — Paris — 20 et 21 mars 1985

21 MARS : BRUIT DES TURBOMACHINES
organisé en collaboration avec le Groupement
des Acousticiens de Langue Française (GALF)

Détermination du bruit rayonné par les structures vibrantes

*Computation of the noise radiated
by vibrating surfaces*

J. Planchard *, F. Guisnel **, P. Smadja **

Ingénieurs à la Direction des Études et Recherches d'Electricité de France,
1, Avenue du Général de Gaulle, 92141 Clamart Cedex.

* Département « Mécanique et Modèles Numériques ».

** Département « Acoustique ».

La connaissance du bruit engendré par les structures vibrantes (carters de machines tournantes, tuyauteries, etc.) à partir de leurs champs de vitesses vibratoires, est d'une grande importance en acoustique industrielle. Après un bref rappel des équations régissant ces phénomènes, on fait un inventaire des différentes méthodes de calcul dont on dispose actuellement (résolution par équations intégrales, résolution directe de l'équation de Helmholtz) et l'on compare leurs avantages et leurs inconvénients. Quelques informations sur les programmes de calcul utilisés à Electricité de France sont données et quelques exemples numériques corrélés à des mesures expérimentales sont présentés.

In industrial acoustics, it is extremely important to be able to determine the noise generated by vibrating structures (rotating machine casings, piping, etc.) from their vibratory velocity field. After a brief review of the equations governing these phenomena, the computation methods presently available are listed (solution by integral equations, direct solution of Helmholtz's equation) and the advantages and drawbacks of these methods are compared. Information is given on the computation programs used by Electricité de France as well as a few numerical examples correlated with experimental measurements.

1. INTRODUCTION

Un des principaux problèmes qui se posent à l'Acousticien est la détermination du bruit engendré par les structures vibrantes (carters de machines tournantes par exemple) : une connaissance précise de la pression sonore rayonnée est en effet nécessaire afin d'insonoriser convenablement le local contenant ces sources. Ce problème est d'une grande acuité à Electricité de France puisque les centrales de production d'énergie renferment un grand nombre de sources de bruit (groupes turbo-alternateurs, pompes, tuyauteries, etc...) conduisant, étant données les puissances mises en jeu, à des niveaux sonores à la limite du seuil de tolérance pour le personnel. Le calcul de ce champ sonore est un difficile problème, ayant fait l'objet de nombreux travaux depuis les deux dernières décennies.

Après un bref rappel des équations régissant les phénomènes acoustiques, on décrira les différentes méthodes de calcul pouvant être utilisées.

2. LES EQUATIONS DU PROBLEME

Il est bien connu qu'une surface matérielle S , vibrant à la fréquence ω , engendre un bruit caractérisé par un champ de pression p ayant la même fréquence. Cette pression rayonnée satisfait l'équation de Helmholtz dans la région extérieure à S :

$$C^2 \Delta p(x) + \omega^2 p(x) = 0, \quad (2.1)$$

où C est la vitesse de propagation du son ; Δ est l'opérateur Laplacien :

$$\Delta = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

En outre, p est reliée aux déplacements des points matériels de S par la condition à la limite :

$$\frac{\partial p}{\partial n}(x) = -i\omega\rho_0 v_n(x), \quad x \in S, \quad (2.2)$$

où $v_n(x)$ est la composante normale de la vitesse vibratoire de la surface (en général, ce sera un nombre complexe pour tenir compte des déphasages entre les différents points de S) ; ρ_0 est la masse spécifique du fluide baignant S ; n est la normale-unité orientée vers l'extérieur de S . La condition (2.2) signifie que le fluide reste collé à la paroi vibrante durant son mouvement. Il faut noter que les équations (2.1), (2.2) ne sont valables que si $v_n(x)$ est petit (hypothèse de l'acoustique linéaire).

Ces équations ne suffisent pas pour résoudre le problème : il faut en ajouter d'autres qui sont des conditions aux limites relatives à l'environnement de la surface S .

Deux cas sont à considérer, que nous allons passer en revue.

1er cas (fig. 1) : le fluide où est plongé S n'est pas confiné. p doit alors satisfaire la condition de rayonnement de Sommerfeld :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} \left| \frac{\partial p}{\partial R} - \frac{i\omega p}{C} \right|^2 dS = 0, \quad (2.3)$$

où S_R est une sphère de rayon R contenant S . Cette condition signifie qu'aucune onde ne vient de l'infini.

Fig. 1 - Surface vibrante en espace non confiné

2ème cas (fig. 2) : le fluide est confiné (salle de machines, par exemple). Il faut imposer des conditions aux limites sur les murs du type :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{i\omega p}{Z(\omega)}; \quad (2.4)$$

sur un mur revêtu d'un matériau absorbant, $Z(\omega)$ est l'impédance acoustique du matériau ($Z(\omega)$ est complexe en général) ; on fait la convention que $Z(\omega)$ est infinie pour un mur parfaitement réfléchissant.

Fig. 2 - Surface vibrante en espace confiné

On démontre [1,2] que, dans le cas non confiné, les équations (2.1), (2.2), (2.3) ont une solution qui est unique (on a donc là un problème mathématiquement bien posé). Dans le cas confiné, la situation est un peu plus complexe ; si l'un des murs au moins est absorbant, il y a existence et unicité d'une solution (voir une démonstration dans [3]), tandis que si tous les murs sont parfaitement réfléchissants, il y a existence et unicité sauf si ω est égale à l'une des fréquences propres du local (dans ce cas un phénomène de résonance apparaît et, de ce fait, aucune solution stationnaire ne peut exister).

3. RAYONNEMENT EN ESPACE NON CONFINÉ

Puisque l'espace où doit être calculé le champ sonore est infini, il est préférable de transformer le problème en une équation définie sur la surface rayonnante qui, elle, est bornée. Ceci peut être atteint par l'emploi des potentiels acoustiques, qui conduisent à des équations intégrales définies sur S . Historiquement, il semble que ce sont des spécialistes de l'acoustique sous-marine qui, les premiers, ont eu l'idée d'utiliser ces méthodes (problème de la détection des sous-marins), cf. [4] à [7].

Passons maintenant en revue les méthodes utilisées.

3.1 - Méthode du potentiel de simple couche

On définit au préalable la solution élémentaire $G_k(x, y)$ de l'équation de Helmholtz

$$(\Delta_y + k^2) G_k(x, y) = -4\pi \delta(x-y), \quad (3.1)$$

où $\begin{cases} k = \omega/C \text{ (nombre d'onde),} \\ \delta(x-y) \text{ est la masse de Dirac concentrée au point } x, \\ \Delta_y \text{ est le Laplacien par rapport à la variable } y. \end{cases}$

$$\text{Alors } G_k(x, y) = \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}, \quad (3.2)$$

où $|x-y|$ est la distance de x à y .

Par analogie avec la théorie du potentiel ordinaire, on cherche la pression rayonnée sous la forme :

$$p(x) = \frac{1}{4\pi} \int_S G_k(x, y) \varphi(y) dS_y, \quad (3.3)$$

où $\varphi(y)$ est une fonction inconnue pour l'instant (densité de "simple couche").

On vérifie, en dérivant sous le signe somme que la fonction p écrite sous la forme (3.3) vérifie :

$$\Delta p(x) + k^2 p(x) = 0, \quad (3.4)$$

en tout point x extérieur à S , ainsi que la condition de Sommerfeld (2.3).

Il faut maintenant que p satisfasse la condition à la limite (2.2). Pour cela, on calcule sur S la dérivée normale extérieure de l'expression (3.3) ; puisque dans (3.3) figure une intégrale singulière, on obtient, cf. [8,9]

$$\frac{\partial p}{\partial n}(x) = -\frac{1}{2} \varphi(x) + \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial}{\partial n_x} G_k(x, y) \varphi(y) dS_y \quad (3.5)$$

($\frac{\partial}{\partial n_x}$: dérivée normale par rapport à la variable x),

ce qui joint à (2.2) donne :

$$\begin{aligned} & -\frac{\varphi(x)}{2} + \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial}{\partial n_x} G_k(x, y) \varphi(y) dS_y = \\ & -i\omega \rho_0 v_n(x), \quad x \in S, \end{aligned} \quad (3.6)$$

qui est une équation intégrale par rapport à la fonction inconnue $\varphi(x)$. On a ainsi remplacé un problème d'équation aux dérivées partielles (les équations (2.1) à (2.3)) sur un domaine infini (l'extérieur de S), par une équation intégrale sur une surface bornée.

Malheureusement, la situation n'est pas si simple, car l'équation (3.6) n'est pas toujours soluble. En effet, on a le théorème suivant :

Théorème 1 (cf. Annexe)

L'équation (8) admet une solution unique si et seulement si le nombre d'onde k est différent d'une suite discrète infinie de nombres d'onde particuliers $k_1, k_2, \dots, k_n$, etc.

Ces nombres d'onde particuliers sont les fréquences propres de Δ pour l'intérieur de la surface S , i.e. il existe des fonctions $u_n(x)$ non identiquement nulles, solutions de l'équation :

$$\begin{cases} \Delta u_n(x) + k_n^2 u_n(x) = 0, & x \text{ intérieur à } S, \\ u_n(x) = 0 & \text{pour tout } x \in S, \\ n = 1, 2, \text{etc.} \end{cases} \quad (3.7)$$

Ainsi, pour ces nombres d'onde k_n , la pression p ne peut être mise sous forme de potentiel acoustique de simple couche, bien que les équations (2.1) à (2.3) aient toujours une solution.

En général, on ne connaît pas de manière explicite ces valeurs propres k_n^2 , excepté dans quelques cas particuliers (parallélépipède, cylindre circulaire, sphère). Puisque la suite des valeurs propres est discrète, la probabilité, pour un nombre d'onde pris au hasard, d'être égal à l'un des k_n est nulle en théorie. Cependant, si la surface S

est grande (vis-à-vis de la longueur d'onde correspondant à ω), les valeurs propres risquent d'être proches les unes des autres si bien que la discrétisation de l'équation intégrale (3.6) peut conduire à un système linéaire mal conditionné numériquement. C'est pour cette raison que la méthode du potentiel de simple couche est peu utilisée dans les études de rayonnement acoustique.

3.2 - Méthode des identités de Green (ou du potentiel combiné)

Pour toute fonction $p(x)$ vérifiant l'équation de Helmholtz et la condition de Sommerfeld à l'infini, on a les trois identités de Green suivantes :

$$p(x) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left(p(y) \frac{\partial}{\partial n_y} G_k(x,y) - G_k(x,y) \frac{\partial p}{\partial n_y}(y) \right) dS_y, \quad (3.8)_{\text{ext}}$$

en tout point x extérieur à S ,

$$0 = \frac{1}{4\pi} \int_S \left(p(y) \frac{\partial}{\partial n_y} G_k(x,y) - G_k(x,y) \frac{\partial p}{\partial n_y}(y) \right) dS_y, \quad (3.8)_{\text{int}}$$

en tout point x intérieur à S ,

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_S \left(p(y) \frac{\partial}{\partial n_y} G_k(x,y) - G_k(x,y) \frac{\partial p}{\partial n_y}(y) \right) dS_y, \quad (3.8)_S$$

en tout point x situé sur S .

L'identité (3.8)_{ext} montre que p est déterminée en tout point extérieur à S dès que p et son gradient normal sont connus sur S . L'idée est alors de calculer les valeurs de p sur S en utilisant l'identité (3.8)_S puisque $\frac{\partial p}{\partial n}(y)$ est connu, d'après la condition à la limite (2.2). On doit donc résoudre l'équation intégrale sur S :

$$p(x) - \frac{1}{2\pi} \int_S p(y) \frac{\partial}{\partial n_y} G_k(x,y) dS_y = \frac{i\omega\rho_0}{2\pi} \int_S G_k(x,y) v_n(y) dS_y, \quad (3.9)$$

où le second nombre est parfaitement déterminé.

On démontre le résultat suivant :

Théorème 2 :

L'équation intégrale (3.9) a toujours une solution quelle que soit la valeur du nombre k . Cependant cette solution est unique si k est différent de tous les nombres propres k_n satisfaisant (3.7) ; lorsque k est égal à l'un des k_n , alors il y a une infinité de solutions (qui sont liées aux fonctions propres u_n).

Il y a donc une difficulté lorsque k est un nombre d'onde propre : comment distinguer, parmi cette infinité de solutions, celle qui correspond à la solution physique du problème de rayonnement acoustique ? Schenck [6] remarque que la solution physique doit vérifier l'identité (3.8)_{int}, c'est-à-dire :

$$\int_S p(y) \frac{\partial G_k}{\partial n_y}(x,y) dS_y + i\omega\rho_0 \int_S G_k(x,y) v_n(y) dS_y = 0. \quad (3.10)$$

en tout point x intérieur à S .

Il montre que, si $k = k_n$, alors la solution p vérifiant simultanément (3.9) et (3.10) est unique. Il est à noter qu'on a, dans ce cas, plus d'équations que d'inconnues, et le système devra donc être résolu au sens des moindres carrés. Schenck discrétise l'équation intégrale (3.9) et écrit que la condition (3.10) est satisfaite seulement en un nombre fini de points x_m intérieurs à S .

La difficulté est donc levée, mais une nouvelle question se pose : comment choisir les points x_m ? Ha Duong [10] a montré que les points x_m ne doivent pas être pris aux points x où les fonctions propres u_n s'annulent. Ces fonctions propres sont inconnues en général, mais on démontre, à l'aide du principe du maximum, que l'ensemble des points où elles s'annulent est de mesure nulle ; donc en choisissant les x_m au hasard, il y a peu de chances de tomber sur des noeuds de la fonction propre u_n .

La seule difficulté qui subsiste encore réside dans le fait de savoir quand il faut utiliser la relation (3.10), puisque les k_n sont inconnus en général. Deux stratégies sont possibles : ou bien on calcule numériquement les k_n - ce qui peut être coûteux - ou bien on essaie de résoudre, après discrétisation, l'équation (3.9) et alors, seulement en cas de difficulté lors de la résolution numérique du système linéaire correspondant (due au fait éventuel que k est proche d'un nombre d'onde propre), on utilise l'équation (3.10). Cette dernière stratégie a été mise en oeuvre avec succès à Electricité de France et tous les détails peuvent être trouvés dans la référence [10].

3.3 - Méthode du potentiel hybride

L'inconvénient des deux méthodes précédentes est l'éventualité de l'égalité de k à l'un des nombres propres. La seconde méthode qui fournit toujours une solution quelle que soit la valeur de k , est plus compliquée à mettre en oeuvre.

Pour surmonter ces difficultés, certains auteurs [11] à [15] ont considéré $p(x)$ sous la forme d'un potentiel à la fois de simple

et double couche (potentiel hybride), de densité q :

$$p(x) = \frac{1}{4\pi} \int_S [G_k(x,y) + \alpha \frac{\partial}{\partial n_y} G_k(x,y)] q(y) dS_y \quad (3.11)$$

où α est un nombre arbitraire.

p , ainsi défini, vérifie l'équation de Helmholtz et la condition de Sommerfeld. Sa dérivée normale extérieure à S est égale à

$$\frac{\partial p}{\partial n}(x) = -\frac{q(x)}{2} + \frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{\partial}{\partial n_x} G_k(x,y) + \alpha \frac{\partial^2 G_k}{\partial n_x \partial n_y}(x,y) \right] q(y) dS_y \quad (3.12)$$

Remplaçant $\frac{\partial p}{\partial n}$ par la condition à la limite (2.2), on obtient une équation intégrale par rapport à la fonction q . Cette équation est soluble en vertu du théorème 3.

Théorème 3 :

L'équation intégrale (3.12) a une solution unique quel que soit le nombre d'onde k , si $\text{Im} \alpha \neq 0$.

L'avantage de cette technique est que le problème de rayonnement acoustique peut être résolu pour toute valeur du nombre d'onde. Son seul inconvénient est que le noyau de l'équation intégrale (3.12) est plus compliqué et est très singulier, à cause de la présence de

$$\frac{\partial^2 G_k(x,y)}{\partial n_x \partial n_y}$$

(l'intégrale doit être considérée en valeur principale de Cauchy). Tous les détails de la mise en oeuvre peuvent être trouvés dans [14].

Remarque : Hamdi [16] considère la pression comme un potentiel de double couche de densité $q(x)$:

$$p(x) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial G_k}{\partial n_y}(x,y) q(y) dS_y,$$

si bien que l'équation intégrale correspondante s'écrit :

$$\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial^2 G_k}{\partial n_x \partial n_y}(x,y) q(y) dS_y = i\omega \rho_0 v_n(x), \quad x \in S,$$

Cette équation a une solution unique pour tout k , excepté les valeurs (en infinité dénombrable) pour lesquelles k^2 est valeur propre du Laplacien à l'intérieur de S et correspondant à des conditions aux limites de Neumann. Cependant, l'intérêt de cette méthode est qu'elle conduit, après discrétisation, à une matrice symétrique.

3.4 - Résolution numérique des équations intégrales

Quel que soit le type de représentation intégrale choisie, la surface S est subdivisée en petits éléments de surface ΔS_n (plans en général) sur lesquels, p (ou Φ ou q) est supposée constante. En utilisant des formules de quadrature approchées, on remplace l'équation intégrale par un système linéaire pour lequel la matrice représentative est pleine (pour les détails cf. les articles cités plus haut).

Il est à noter qu'aux hautes fréquences, le champ vibratoire $v_n(x)$ de la surface vibrante S présente généralement de fortes variations le long de S . D'autre part, pour éviter de grandes oscillations de $G_k(x,y)$ sur chaque élément de surface, il faut que les dimensions de celui-ci soient petites vis-à-vis de la longueur d'onde acoustique. Ainsi, il est nécessaire d'avoir un découpage très fin de la surface aux hautes fréquences.

3.5 - Méthodes des sources équivalentes

Un des inconvénients de la méthode des équations intégrales est que leurs noyaux présentent une singularité pour $y = x$. Pour éviter cela, on considère des points y_m

($m = 1, 2, \dots, N$) situés à l'intérieur de S et l'on cherche $p(x)$ sous la forme

$$p(x) \approx \sum_{m=1}^N q_m G_k(x, y_m),$$

où les q_m sont à déterminer. En fait, on

remplace la surface S par un ensemble de sources ponctuelles dont on cherchera les intensités q_m .

La détermination des q_m s'effectue en écrivant que l'équation (2.2) est satisfaite au sens des moindres carrés.

Mentionnons que ce type de méthode est appliqué avec succès à E.D.F. pour des calculs de potentiel électrostatique.

3.6 - Codes de calcul utilisés à Electricité de France

Nous disposons actuellement de deux codes : COMPOT et VARIA. Le premier repose sur la méthode de Schenck (cf. section 3.2) et a été validé à l'aide de solutions analytiques dans des cas simples (sphère pulsante) ou expérimentalement (fig. 3) dans le cas d'un demi-cylindre reposant sur un plan parfaitement réfléchissant et situé dans la chambre "sourde" du Département "Acoustique" d'E.D.F. (cf. [17,18] pour les détails).

Le second programme VARIA repose sur la méthode du potentiel de double couche et a été écrit par l'Université Technique de

Compiègne (Thèse de M.A. Hamdi). Des vérifications expérimentales ont également eu lieu et ont montré un bon accord avec les calculs effectués à l'aide de VARIA.

Fig. 3 - Comparaison calcul-mesures (extrait de [18])

4. RAYONNEMENT ACOUSTIQUE DANS UN ESPACE CONFINE

Soit Ω le volume intérieur du local contenant la structure vibrante S (fig. 2). Désignons par Γ l'ensemble des murs du local. Le champ sonore rayonné vérifie :

$$\Delta p(x) + \frac{\omega^2}{c^2} p(x) = 0, \quad x \in \Omega \quad (4.1)$$

avec les conditions aux limites :

$$\frac{\partial p}{\partial n}(x) = -i\rho_0 \omega v_n(x) \text{ sur } S, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n}(x) = -\frac{i\omega\eta(x)}{Z(\omega)} \text{ sur } \Gamma; \quad (4.3)$$

Z est l'impédance de la paroi (avec Z infini pour un mur réfléchissant). L'ensemble des équations (4.1) à (4.3) est bien posé (existence et unicité de la solution).

On peut songer à utiliser les méthodes d'équations intégrales comme celles définies dans le paragraphe précédent. Ceci est possible si la salle est petite, car on aboutit à des systèmes linéaires d'ordre raisonnable. Par contre pour les salles de machines des centrales nucléaires d'E.D.F. dont les dimensions sont de l'ordre de 200 m x 50 m x 20 m, on obtient des matrices pleines d'ordre 300.000 pour une fréquence de 100 Hz ! Même avec des ordinateurs tels que le CRAY-1, l'inversion de ces matrices est impossible. C'est pourquoi l'on s'est tourné, à E.D.F., vers une résolution par différences finies des équations (4.1) à (4.3) (cf. [19]). Le nombre d'inconnues est très grand, pouvant même atteindre le million, mais la matrice représentative est très creuse et symétrique (au plus 7 termes non nuls par ligne). La

résolution numérique du système linéaire correspondant est effectuée à l'aide de la méthode du gradient biconjugué [20], [21]. La convergence est plus ou moins rapide, mais celle-ci peut être améliorée en "préconditionnant" la matrice (cf. [22]). Des études seront poursuivies de manière à réduire le nombre des inconnues. Un code de calcul est actuellement en cours de mise au point sur CRAY-1, utilisant au maximum les possibilités de vectorisation de cet ordinateur.

Remarque : il arrive que l'on veuille calculer le bruit rayonné par une structure placée parmi un grand nombre d'obstacles : c'est le cas, par exemple, d'une pompe environnée par une forêt de tuyauteries. La représentation de tous ces tuyaux peut être extrêmement compliquée, et il est plus simple de les simuler en introduisant un milieu fluide fictif, occupé à la fois par l'air ambiant et les obstacles, dont la vitesse du son serait :

$$c_{eq} = c / \sqrt{1 + \tau},$$

où τ est la fraction de volume occupé par les obstacles [23].

Si les tuyaux sont disposés régulièrement, il est préférable d'utiliser la méthode de la référence [24] dans laquelle on trouvera une vérification expérimentale. Dans tous les cas, l'équation (4.1) devient :

$$c_{eq}^2 \Delta p(x) + \omega^2 p(x) = f(x),$$

où $f(x)$ représente les sources de bruit éventuelles dues aux obstacles eux-mêmes (vibrations des tuyauteries par exemple).

Enfin, pour terminer, signalons qu'aux hautes fréquences, de l'ordre du millier de herzs, il est plus simple de se placer dans l'hypothèse de l'Acoustique Géométrique ; il faut alors examiner les différents trajets suivis par le son et issus des sources, en tenant compte des réflexions sur les obstacles et de l'amortissement dû aux éventuels matériaux absorbants : c'est la méthode dite "des rayons", cf. [25] à [26].

5. CONCLUSION

Ce bref tour d'horizon a décrit les différentes méthodes de calcul du bruit rayonné par les structures vibrantes, placées dans un espace confiné ou non, et nous avons mis l'accent sur leurs avantages et inconvénients respectifs. Ces techniques sont assez complexes à mettre en oeuvre et bien du travail reste encore à faire pour les rendre performantes. Les programmes de calcul actuellement utilisés à Electricité de France exigent, en raison de la taille des problèmes à traiter, l'utilisation de gros calculateurs tels que le CRAY-1 de la Direction des Etudes et Recherches d'EDF. De tels outils doivent ainsi permettre aux Ingénieurs Acousticiens, d'une part de

concevoir l'insonorisation des locaux contenant les sources de bruit, et d'autre part, avec l'aide de codes de dynamique des systèmes mécaniques, de réduire les sources elles-mêmes en définissant les modifications à apporter aux structures concernées.

REFERENCES

- [1] V.I. Smirnov "A course of Higher Mathematics", vol. 4, Pergamon Press (1964) .
- [2] R. Courant, D. Hilbert "Methods of Mathematical Physics", Interscience Publishers (1962) .
- [3] J.P. Grégoire, J.C. Nédélec, J. Planchard "Problèmes relatifs à l'Equation de Helmholtz", Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches d'EDF, série C, n° 2 (1974) p. 15-32 .
- [4] G. Chertock "Sound Radiated from Vibrating Surfaces", Journ. Acoust. Soc. Amer., vol. 36, n° 7 (1961) p. 1305-1313
- [5] L.H. Chen, D.G. Schweikert "Sound Radiation from an Arbitrary Body" Jour. Acoust. Soc. Amer., vol. 35, n° 10 (1963) p. 1626-1632 .
- [6] H.A. Schenck "Improved Integral Formulation for Acoustic Radiation Problems" Journ. Acoust. Soc. Amer. vol. 44, n° 1 (1968) p. 41-58 .
- [7] L.G. Copley "Fundamental Results concerning Integral Representation in Acoustic Radiation" Journ. Acoust. Soc. Amer., vol. 44 (1968) p. 28-32 .
- [8] S.G. Mikhlin "Mathematical Physics, an Advanced Course " North Holland (1970) .
- [9] P.J. Philippi "Layer Potentials and Acoustic Vibrations" J. Sound.Vibrat. vol. 54 (1977), p. 473-500 .
- [10] T. Ha Duong "La méthode de Schenck pour la Résolution Numérique du Problème de Radiation Acoustique". Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches d'EDF, série C, n° 2 (1979) p. 15-20 .
- [11] J. Giroire "Integral Equation Methods for Exterior Problems for the Helmholtz Equation" Rapport n° 40 (1978), Centre de Math. Appl. Ecole Polytechnique .
- [12] R.E. Kleinman, G.F. Roach "Boundary Integral Equations for the 3-dimensional Helmholtz Equation" S.I.A.M. Review, vol. 16 (1974) p. 214-236 .
- [13] D. Hodgson, M.M. Sadek "Technique for the Prediction of the Noise Field from an Arbitrary vibrating machine" I. Mech. Eng. (1983) p. 189-197 .
- [14] M.N. Sayhi, Y. Ousset, G. Verchery "Solution of Radiating Problems by Collocation of Integral Formulations in term of Single and Double layer Potentials", J. Sound.Vibrat. vol. 74 (1981) pp. 187-204 .
- [15] C.M. Piasczyk, J.M. Klosner "Acoustic Radiation from Vibrating Surfaces at Characteristics Frequencies", Journ. Acoust. Soc. Amer. vol. 75, n° 2 (1984) p. 363-375 .
- [16] M.A. Hamdi "Formulation Variationnelle par Equations Intégrales pour le calcul de champs acoustiques proches et lointains", Thèse, Université Technique de Compiègne, (1981) .
- [17] P. Smadja, J. Planchard, T. Ha Duong "La modélisation du Bruit Emis par les Structures Mécaniques", 11ème Congrès International Acoustique, Lyon (juillet 1983) .
- [18] F. Guisnel "Présentation et validation d'un modèle numérique calculant le rayonnement acoustique de structures vibrantes : méthode de Schenck", E.D.F. Rapport HE/21/4769 (8 juin 1984)
- [19] F. Laville, G. Nguyen Van Chi, J. Planchard "Projet de programme de calcul "basses fréquences" en acoustique prévisionnelle interne aux locaux" EDF rapport HI/4747-07 (24 mai 1984) .
- [20] D.A.H. Jacobs "Generalizations of the conjugate Gradient Method for Solving Non-symmetric and complex systems of Algebraic Equations", Central Electricity Generating Board, Report RD/L/N70 /80 (August 1980) .
- [21] D. Joly "Utilisation de la méthode du gradient biconjugué à la résolution de l'équation de Helmholtz. Application à un exemple" EDF/IMA , rapport de stage de fin d'études (1983) .
- [22] A. Bayliss, C.I. Goldstein "An iterative Method for the Helmholtz Equation" Journ. Comp. Phys. vol 49 (1983) p. 443-457 .
- [23] R. Parker "Acoustic Resonance in Passages containing Heat Exchanger Tubes" J. Sound. Vibrat. vol. 57 (1978) p. 245-260 .
- [24] J. Planchard, F.N. Rémy, P. Sonnevile "A simplified Method for Determining Acoustic and Tube Eigenfrequencies in Heat Exchangers", A.S.M.E. Journ. Pressure Vessel Technol. vol. 104 (1982) p. 175-179 .
- [25] H. Juridic, F. Santon "Images et Rayons Sonores dans le calcul numérique des Echogrammes", Acustica, vol. 28 (1973)
- [26] J.J. Embrechts "Sound Field Distribution using Randomly traced Sound Ray Technique" Acustica vol. 51 (1982) .
- [27] J. Leblond, J.L. Lecocq "Applications de l'Acoustique Géométrique à l'Etude de la Distribution des Niveaux Sonores dans les locaux industriels" - Notes scientifiques et techniques de l'INRS n° 22 (sept. 1979) .
- [28] C. Lecointre "Programme RAYON" EDF Rapport HE/22-4751 (30 décembre 1983) .

ANNEXE - ALTERNATIVE DE FREDHOLM

Soit l'équation intégrale de Fredholm de seconde espèce définie sur S :

$$\lambda \varphi(x) - \int_S g(x,y) \varphi(y) dS_y = f(x), \quad x \in S, \quad (A1)$$

où λ est un paramètre et $f(x)$ est le second membre. L'opérateur intégral et son adjoint sont supposés posséder des valeurs propres en infinité dénombrable, i.e. :

$$\left\{ \begin{aligned} \int_S g(x,y) w_n(y) dS_y &= \mu_n w_n(x), \\ \int_\Omega g^*(x,y) w_n^*(y) dS_y &= \mu_n^* w_n^*(x), \end{aligned} \right. \quad (A2)$$

$n = 1, 2, \text{etc.}$

où $g^*(x,y) = \bar{g}(y,x)$ (alors $\mu_n^* = \bar{\mu}_n$).

Le théorème de l'alternative de Fredholm s'énonce ainsi :

Théorème

- Ou bien λ est différent de toutes les valeurs propres μ_n , et alors pour tout second membre $f(x)$ l'équation (A1) a une solution unique $\varphi(x)$.
- Ou bien $\lambda = \mu_n$, et alors (A1) n'a de solution que si et seulement si

$$\int_\Omega f(x) \bar{w}_n^*(y) dS_y = 0, \quad (A3)$$
 auquel cas la solution n'est pas unique : si $\varphi(x)$ est une solution particulière, $\varphi(x) + C \text{ste } w_n(x)$ est aussi une solution, la C^{ste} étant arbitraire.

Application au problème de rayonnement acoustique

Formulation 3.1 :

$$g(x,y) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial G_k}{\partial n_x} G_k(x,y), \quad \lambda = \frac{1}{2},$$

$$f(x) = -i\omega \rho_0 v_n(x).$$

Les valeurs propres de l'opérateur intégral sont identiques aux valeurs propres définies par (3.7). Lorsque $k = k_n$, $f(x)$ n'est pas, en général, orthogonal à $w_n^*(x)$.

Formulation 3.2 :

$$g(x,y) \equiv \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n_y} G_k(x,y), \quad \lambda = 1,$$

$$f(x) \equiv \frac{i\omega \rho_0}{2} \int_S G_k(x,y) v_n(y) dS_y.$$

Les valeurs propres de $g(x,y)$ sont les valeurs propres k_n^2 définies par (3.7). Lorsque $k = k_n$, on démontre que f est toujours orthogonal à w_n^* et dans ce cas il y a une infinité de solutions.

Formulation 3.3 :

$$g(x,y) \equiv \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial n_x} G_k(x,y) + \alpha \frac{\partial^2 G_k}{\partial n_x \partial n_y}(x,y) \right]$$

$$\lambda = \frac{1}{2},$$

$$f(x) \equiv -i\omega \rho_0 v_n(x).$$

Si α est complexe, les valeurs propres de $g(x,y)$ sont des nombres complexes, si bien que (A1) a toujours une solution.

Discussion

Président : M. J. ROUX

M. Le Président : Y a-t-il des questions au sujet de cet exposé ? Je pense que nous sommes les deux seuls mathématiciens dans cette salle. Beaucoup de questions se posent sur ces méthodes. Ce sont des méthodes qui sont bien connues et on a l'air de croire qu'il s'agit d'un problème facile. Ce n'est pas si sûr. Le problème a été posé aux alentours de 1868 par HELMHOLTZ, mais il n'a été que posé et pas résolu, il n'y a eu que des solutions partielles. On a l'air de croire qu'il est suffisant d'avoir la connaissance du

gradient sur la surface. Il est clair que ce n'est pas une condition suffisante. Ce sont des théories qui sont utilisées dans un domaine numérique. On n'est pas obligé de calculer les deux termes moyennant certaines transformations. Ce sont des fonctions qui sont en relation. Il y a des développements possibles...

Si personne ne demande plus la parole, je vais la céder à M. DELCAMBRE, qui va tirer la conclusion de la totalité de la journée, car je n'ai pas pu assister à l'intégralité des discussions.