Hydraulique du drainage

Une formule de la profondeur équivalente

G. Guyon

Ingénieur en chef honoraire du Génie Rural, des Eaux et des Forêts, membre de l'Académie d'Agriculture de France

I ■ INTRODUCTION ■

Lorsque les fossés à ciel ouvert ou les tranchées du drainage par canalisations enterrées ne sont pas creusés jusqu'au plafond du substratum imperméable (au sens du drainage), pour des raisons techniques et/ou économiques, les calculs de l'hydrodynamique des nappes font intervenir ce que les spécialistes appellent « la profondeur équivalente » (cf. définition, section 2).

Dans cette note il ne saurait être question d'analyser toutes les équations rencontrées dans la littérature qui conduisent à cette grandeur ; Lovell et Youngs, notamment, s'en sont chargé remarquablement, dans une publication datant de 1984 [3]. Il s'agit, en général, de formules compliquées, empiriques ou semi-empiriques, mais certaines ont pu être simplifiées *sous des conditions restreignant leur champ d'application ;* telles sont, par exemple, la formule simplifiée de la profondeur équivalente de Hooghoudt [4] et la formule de Youngs [5].

Nous proposons ici une formule simple : la relation « arc tg » de la profondeur équivalente très satisfaisante sur les plans théorique et pratique. C'est la génèse de cette dernière expression que nous rapportons dans les lignes qui suivent en nous limitant, pour ne pas trop allonger le texte, au cas d'un sol homogène et isotrope au regard de la conductivité hydraulique K du sol (le cas d'un sol hétérogène verticalement est traité dans la note [2]).

Le régime d'écoulement de la nappe, pour une plus simple approche de la notion de profondeur équivalente, est considéré comme étant permanent sous une pluie infiltrée d'intensité I supposée constante dans le temps. Notons que les formules du régime permanent ont toujours la faveur des spécialistes pour le drainage des sols où, soit les objectifs (maintien d'une nappe à une profondeur fixée), soit le régime des pluies de la région (pluies de faible intensité et de longue durée, variation lente du niveau de la surface piézométrique de la nappe), justifient leur application.

Nous commencerons par le cas d'un sol où la profondeur du toit du substratum est finie et nous poursuivrons par celui où le sol est, théoriquement, infiniment profond, dans le but d'obtenir une valeur asymptotique de la profondeur équivalente.

II ■ LA PROFONDEUR DU SOL EST FINIE ■

L'hydrodynamique des nappes drainées, basée sur la théorie du potentiel des vitesses et sur la fonction de Tcharny, conduit à la relation suivante [1] :

$$I/K = \frac{\rho(\rho + 2\lambda)}{1 + 2(\rho + \lambda)^2 R_0 + 2\lambda^2 \omega R_L} \qquad (1)$$

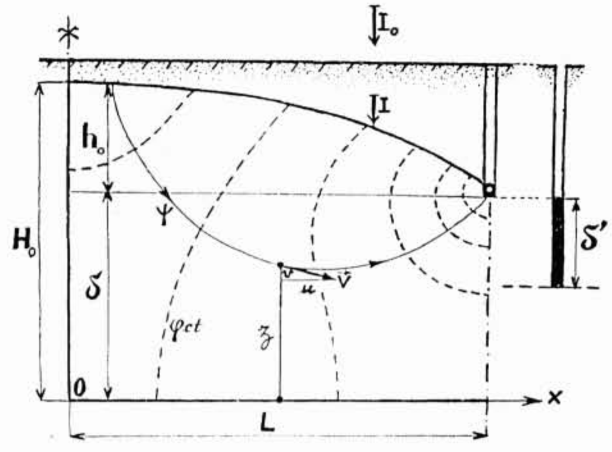
Dans cette expression :

$\rho = h_0/L$, h_0 étant la hauteur de la nappe à son sommet comptée depuis une ligne horizontale *passant par le fond de la tranchée,* L est le demi-écartement des tranchées rectilignes et parallèles ; λ est la profondeur réduite δ/L, δ étant la hauteur séparant le fond de la tranchée du toit du substratum imperméable ;

ω est un facteur de répartition du débit de la nappe $q = IL$ sur le fond de la tranchée qui est sensiblement égal au rapport L/p, p étant le demi périmètre mouillé. A noter que, si on ne tient pas compte de l'effet de tranchée et avec

Drainage hydraulics

In the paper the author justifies, from a theorical point of view, a new formula « arc tg » expressing the equivalent depth ; this depth is taken into account to fit the calculations of drainage when the impermeable barrier is deeper than the bottom of drainage trenches.



1. Schéma de l'écoulement.

l'hypothèse d'un drain maintenu plein d'eau, le facteur ω s'écrit $\omega = \frac{L}{p} = \frac{L}{\pi r}$ (r rayon du drain) ;

R_0 et R_L sont des intégrales qui s'écrivent respectivement :

Sur l'inter-drains :

$$R_0 = \int_0^1 Zf(Z)\,\mathrm{d}Z \quad \text{avec} \quad Z = z/H_0$$

$f(Z)$ est une fonction monotone croissante telle que $v(0, z)$ étant la composante verticale de la vitesse $\vec{V}$ de Darcy : $v(0, z) = -If(Z)$. $f(Z)$ est comprise entre zéro pour $z = 0$ ($v(0,0) \sim 0$) et l'unité pour $z = H_0 = h_0 + \delta$.

L'intégrale R_0 est toujours inférieure à 1/2.

Sur la verticale du drain :

$$R_L = \int_0^1 Zg(Z)\,\mathrm{d}Z \quad \text{avec} \quad Z = z/\delta$$

La fonction $g(Z)$ est telle que :

$$v(L, z) = v(L, \delta)\, g(Z) = \omega I g(Z).$$

Comme R_0, cette intégrale est inférieure à 1/2.

Dans l'expression (1) la hauteur d'eau dans la tranchée (ou dans le drain) a été négligée devant la hauteur h_0 ; autrement, si cette hauteur désignée par d n'est pas négligeable il faut diminuer le numérateur de (1) du rapport $(d/L)^2$. Dans la pratique cette condition est exceptionnelle, le diamètre des drains dépassant rarement 10 cm.

Considérant *les dimensions réelles du drainage agricole*, tout au moins dans nos régions d'Europe Occidentale, il est possible de simplifier le dénominateur de (1) en supprimant le terme contenant l'intégrale R_0, pour les raisons suivantes : l'écartement $E = 2L$ des files de drains est au moins égal à 10 mètres : $L \geq 5$ m ; la profondeur δ du substratum dépasse rarement 5 à 6 m pour un sol homogène ou *quasi-homogène* (la conductivité hydraulique $K_h(z)$ est monotone et moins que proportionnelle [2]) et sachant que la valeur de l'écartement E dépend de la profondeur δ (cf. *tabl. 1*) ces deux grandeurs variant dans le même sens, il paraît raisonnable de limiter la valeur pratique de λ à 0,20 ; le sommet de la nappe, en régime d'écoulement permanent, est, au moins, à 0,25 m de la surface du sol et, de ce fait, si les drains sont posés à 1,00 m de profondeur, la valeur de h_0 est, au plus, égale à 0,75 m : ρ est inférieur à 0,15 ; enfin, le terme où figurent l'intégrale R_L et le facteur ω, est *un terme dominant par rapport au terme de* R_0. En effet, en admettant que les travaux de drainage à la parcelle soient exécutés avec une trancheuse ayant un caisson de 20 cm de largeur (cas usuel) et outillée d'un distributeur capable de déposer 20 à 25 cm de gravier au fond de la tranchée et autour du drain, le facteur ω est au moins égal à $10\,L$, L étant exprimé en mètres ; c'est-à-dire, au minimum à 50. Dans le cas d'un drainage réalisé avec une sous-soleuse et en faisant abstraction de l'effet de tranchée, $p = 0{,}10$ m correspond à un drain plein d'eau de 65 mm de diamètre environ (diamètre très utilisé en France, drains annelés en PVC). Dans un cas comme dans l'autre, $\omega = 50$ pour $L = 5$ m.

Ainsi, considérant toutes ces valeurs limites des différentes grandeurs en jeu (λ, ρ et ω) et se rappelant que R_0 et R_L sont toujours inférieures à 1/2, de (1) il reste :

$$I/K \simeq \frac{\rho(\rho + 2\lambda)}{1 + 2\lambda^2 \omega R_L} \tag{2}$$

A ce stade de notre exposé, il est temps de faire intervenir la notion de profondeur équivalente.

Rappelons que cette grandeur que nous désignons par la lettre δ' résulte de l'analogie du modèle hydraulique réel avec un modèle fictif ayant les mêmes valeurs des grandeurs I, K, h_0 et L, mais constitué, à la place du drain, d'un fossé à ciel ouvert creusé jusqu'au toit d'un pseudo-imperméable situé à la profondeur δ' au-dessous du niveau du fond de la tranchée et rempli d'eau sur cette profondeur (*fig. 1*, croquis à droite).

Avec cette défintion, l'équation (2) où le terme en R_L disparaît nécessairement, devient :

$$I/K = \rho^2 + 2\rho\lambda' \quad \text{avec} \quad \lambda' = \delta'/L \tag{3}$$

Lorsque δ tend vers l'infini (section 3), cette dernière relation s'écrit :

$$(I/K)_\infty = \rho^2 + 2\rho\lambda'_\infty \tag{4}$$

Un raisonnement simple permet de justifier la valeur limite λ'_∞ de λ'.

Supposons la valeur de I/K donnée. Physiquement, la hauteur h_0 ne peut être nulle car il n'y aurait plus d'écoulement ; par conséquent, ρ a une valeur limite finie et, d'après (3), λ' tend également vers une limite finie. Inversement, si l'on se donne une valeur de h_0, cette valeur correspond à la limite $h_0(\delta_\infty)$ qu'on obtiendrait avec une certaine valeur donnée du rapport I/K.

Ainsi, λ'_∞ doit, nécessairement, être *une grandeur asymptotique* de toute relation $\lambda' = f(\rho, \lambda)$ traduisant la profondeur équivalente réduite δ'/L.

D'après (1), quand λ tend vers l'infini, le produit $\lambda(R_0 + \omega R_L)$ reste fini au dénominateur, ce qui implique que R_0 et R_L tendent vers zéro, le facteur ω restant lui-même fini.

Par conséquent, une deuxième déduction de la théorie s'impose concernant particulièrement l'intégrale R_L : quand δ varie de zéro à l'infini, R_L part de zéro, passe par un maximum inférieur à 1/2 puis tend vers zéro.

Enfin, une troisième déduction doit être remarquée : la limite du rapport λ'/λ tend vers l'unité quand λ tend vers zéro. En effet, à partir des relations (2) et (3) on constate que :

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{1 - \rho\lambda\omega R_L}{1 + 2\lambda^2\,\omega R_L} \rightarrow \lim_{(\lambda \to 0)} \frac{\lambda'}{\lambda} = 1$$

La relation « arc tg » satisfait, sans restriction, les trois déductions de la théorie qui viennent d'être rappelées ; elle s'écrit :

$$\lambda' = \frac{2\lambda'_\infty}{\pi} \text{arc tg} \frac{\pi\lambda}{2\lambda'_\infty} \tag{5}$$

L'asymptote λ'_∞ se calcule à partir des relations (6) et (7) de la section suivante.

Le *tableau 1* montre comment varie l'intégrale R_L quand le 1/2 périmètre mouillé p est égal à 10 cm. R_L résulte de l'égalité de (2) et (3) d'où on déduit :

$$\lambda^2\,\omega R_L = \frac{\lambda - \lambda'}{\rho + 2\lambda'}$$

L'intégrale R_L passe, comme il convient, par un maximum inférieur à 1/2. On remarquera que, toutes autres grandeurs égales, R_L et p sont directement proportionnels ; c'est ainsi qu'avec un drain de 10 cm de diamètre, les valeurs de R_L du tableau doivent être multipliées par 0,16/0,10 = 1,6.

Tableau 1. — Valeurs de R_L

L (m)	h_0 (m)	ρ	δ (m)	λ	R_L
5	0,75	0,15	0,25	0,05	0,13
			0,50	0,10	0,15
			1,00	0,20	0,13
	0,50	0,10	0,25	0,05	0,17
			0,50	0,10	0,19
			1,00	0,20	0,15
10	0,50	0,05	0,25	0,025	0,11
			0,50	0,05	0,14
			1,00	0,10	0,13
			2,00	0,20	0,10
20	0,50	0,025	0,25	0,0125	0,06
			0,50	0,025	0,08
			1,00	0,05	0,09
			2,00	0,10	0,08
			4,00	0,20	0,06
40	0,50	0,0125	0,50	0,0125	0,04
			1,00	0,025	0,05
			2,00	0,05	0,06
			4,00	0,10	0,05
			6,00	0,15	0,04

On vérifie que de toutes les formules simplifiées de la profondeur équivalente que nous connaissons, à savoir :

- la relation simplifiée de Hooghoudt [4] :

$$\lambda' = \lambda / \left(1 - \lambda\sqrt{2} + \frac{\lambda^2}{2} + \frac{4\lambda}{\pi} \ln \frac{\lambda\sqrt{2}}{(d/L)} \right)$$

- la formule de Youngs [5] :

$$I/K = \rho^\alpha \text{ avec } \alpha = 2\lambda^\lambda \text{ qui donne } \lambda' = \frac{1}{2}(\rho^{\alpha-1} - \rho)$$

- la relation hyperbolique, la plus simple [1] :

$$\lambda' = \lambda'_\infty \lambda / (\lambda'_\infty + \lambda)$$

- la formule « moyenne » [1] :

$$\lambda' = \lambda'_\infty \lambda (1 + \lambda) / (\lambda'_\infty + \lambda(1 + \lambda)),$$

seule la relation (5) en « arc tg » respecte, *à la fois*, les trois déductions fondamentales de la théorie de l'hydrodynamique des nappes drainées :

la courbe représentative de l'équation simplifiée de Hooghoudt est, effectivement, tangente à l'origine à la demi-droite de pente 1/1, mais elle l'est à gauche au lieu de l'être à droite et, de ce fait, au début, la profondeur réduite λ' est supérieure à λ. Par ailleurs, la fonction $\lambda'(\lambda)$ passe par un maximum et ne présente pas d'asymptote λ'_∞.

L'équation de λ' déduite de la relation de Youngs suscite, elle aussi, quelques réserves : le rapport I/K est supérieur au polynôme $\rho^2 + 2\rho\lambda'$ pour de petites valeurs de λ, et le rapport λ'/λ tend vers l'infini quand λ tend vers zéro, ce qui est contraire à la théorie.

Enfin, l'équation hyperbolique et la relation « moyenne » présentent des valeurs de l'intégrale R_L supérieures à 1/2 pour des valeurs petites de λ. Par exemple, avec $L = 10$ m, $\delta = 0{,}25$ m, $h_0 = 0{,}50$ m, c'est-à-dire : $\lambda = 0{,}025$, $\rho = 0{,}05$ et $\omega = 10\,L = 100$, on obtient avec la fonction hyperbolique $R_L = 0{,}66$ et avec la relation « moyenne » $R_L = 0{,}58$; avec un drain plein d'eau de 10 cm de diamètre, $\omega = L/(\pi r) = 64$ et R_L prend respectivement les valeurs 1,03 et 0,91.

III ■ LA PROFONDEUR DU SOL EST THÉORIQUEMENT INFINIE ■

Pour ce cas, nous avons recours aux équations de l'hodographe [3], correspondant à la situation suivante : la surface pièzométrique de la nappe aboutit sur la génératrice supérieure du drain plein d'eau.

Ces équations s'écrivent :

$$\pi\rho_0 = \ln\left(1 + \frac{2}{\pi}\right) + \frac{2}{\gamma} \ln\left(1 + \frac{\gamma}{2}\right)$$

$$\gamma = (K/I) - 1$$

$$r_0/L = \rho_0 - \frac{2}{\pi\gamma} \ln\ (1 + \gamma),\ r_0 \text{ rayon optimal du drain}$$

La hauteur h_0 est, cette fois, comptée depuis une ligne horizontale passant par le centre du drain.

Dans la pratique des calculs des dimensions du drainage, on considère, généralement, la profondeur de la tranchée et non la distance séparant la surface du sol du centre du drain. D'autre part, dans la réalité du drainage, il existe un certain effet de tranchée (déjà mentionné) le remblai étant plus poreux que le sol où gît la nappe. Enfin, la hauteur d'eau dans les drains se réduit, le plus souvent, à quelques centimètres, en dehors des relativement courtes périodes de crue (pente des drains comprise entre 2 et 5 ‰). Pour ces raisons de terrain, il nous a semblé préférable de faire passer l'axe de référence de la hauteur h_0 par la génératrice inférieure du drain, comme à la section précédente.

Compte tenu de cette disposition, nous avons majoré les valeurs de ρ_0 des valeurs correspondantes du rapport r_0/L: $\rho = \rho_0 + r_0/L$. Finalement, en prenant comme données d'entrée les valeurs de I/K on obtient, successivement, les valeurs de γ, ρ_0 et ρ à partir des équations ci-dessus de l'hodographe, puis *les valeurs de la profondeur équivalente réduite* λ' avec l'équation (4) de la section 2.

D'après ce tableau, pour des valeurs de ρ comprises

Tableau 2. — Valeurs de ρ et de λ'_∞

$(I/K)_\infty$	γ	ρ_0	r_0/L	ρ	λ'_∞ (4)	λ'_∞ (6) (7)
0,0700	13,286	0,1421	0,0147	0,1568	0,145	
0,0600	15,667	0,1268	0,0125	0,1393	0,146	
0,0500	19,000	0,1106	0,0102	0,1208	0,146	0,145
0,0400	24,000	0,0935	0,0081	0,1016	0,146	
0,0300	32,333	0,0751	0,0061	0,0812	0,144	
0,0200	49,000	0,0548	0,0040	0,0588	0,141	0,140
0,0175	56,143	0,0494	0,0035	0,0529	0,139	0,139
0,0150	65,667	0,0437	0,0030	0,0467	0,137	0,137
0,0125	79,000	0,0378	0,0025	0,0403	0,135	0,135
0,0100	99,000	0,0316	0,0020	0,0336	0,132	0,132
0,0075	132,333	0,0250	0,0015	0,0265	0,128	0,129
0,0050	199,000	0,0179	0,0010	0,0189	0,123	0,124
0,0025	399,000	0,0100	0,0004	0,0104	0,115	0,116
0,0010	999,000	0,0046	0,0002	0,0048	0,102	0,105

entre 0,15 et 0,08, on peut adopter pour λ'_∞ la valeur moyenne 0,145 :

$$0{,}08 \leq \rho \leq 0{,}15 \rightarrow \bar{\lambda}'_\infty = 0{,}145 \qquad (6)$$

Par contre, pour des valeurs de ρ comprises entre 0,08 et 0,005, un ajustement par la méthode classique des moindres carrés de la fonction $\lambda' = a \ln \rho + b$ aux couples $\rho_i\,\lambda'_i$, nous donne :

$$0{,}005 \leq \rho \leq 0{,}08 \rightarrow \lambda'_\infty = 0{,}014 \ln \rho + 0{,}18 \qquad (7)$$

Ce sont la moyenne (6) et l'expression (7), suivant la valeur de ρ, que nous retiendrons pour le calcul de l'asymptote de λ'.

Nota

Avec cette théorie de l'hydrodynamique du drainage, on ne tient pas compte de la frange capillaire qui surmonte la surface pièzométrique de la nappe quand celle-ci est stabilisée. C'est qu'en effet, la présence de cette frange capillaire n'est pas gênante pour le développement des racines des cultures, contrairement à la zone du sol, entièrement saturée d'eau, où séjourne la nappe. Une remontée prolongée de la surface pièzométrique est, par exemple, particulièrement néfaste aux arbres fruitiers (asphyxie des racines, apparition du pourridié).

IV ■ CONCLUSION ■

Le souci de toujours rechercher davantage d'exactitude, en particulier sur le plan théorique, nous conduit à recommander, pour le calcul de l'écartement des drains, lorsque le toit du substratum est plus profond que les tranchées, la relation (5) en « arc tg » pour expression de la profondeur équivalente réduite, qu'il s'agisse du régime d'écoulement permanent mais aussi du régime de tarissement de la nappe (cas analysé à la note [2]).

Bibliographie

[1] GUYON G. (1991). — *« Hydraulique du drainage. Choix d'une formule de la profondeur équivalente » CR* Acad. d'Agric. de France, 77.

[2] GUYON G. (1993). — *« Drainage agricole. Les formules de la hauteur équivalente appliquées au régime de tarissement des nappes » CR* Acad. d'Agric. de France, 79.

[3] LOVELL Cl. and YOUNGS E.G. (1984). — *« A comparison of steady-state land drainage equations »*, Elsevier Science Publishers BV, Amsterdam, Agricultural Water Management, 9.

[4] WESSELING J. (1973). — *« Subsurface flow into-drains. In theories of field drainage and watershed runoff »*. Publ II RI 16 (2), p. 3-56.

[5] YOUNGS E.G. (1985). — *« A simple drainage equation for predicting water-table drawdowns »*. J. Agric. Engng. Res., 31.