Hydraulique du drainage

Application de la formule « arc tg » de la profondeur équivalente au drainage d'un sol hétérogène verticalement

par Gaston Guyon

Ingénieur en Chef honoraire du Génie Rural des Eaux et des Forêts,
membre titulaire de l'Académie d'Agriculture de France.

I ■ INTRODUCTION

Nous avons montré, en particulier dans la note [3] publiée dans cette revue, que parmi les différentes formules simplifiées connues, commodes d'emploi, exprimant *la profondeur équivalente* (grandeur fictive remplaçant pour les calculs des dimensions du drainage la profondeur réelle séparant le fond des tranchées du toit du substratum quasi- imperméable au sens du drainage), seule la formule en « arc tg » répondait à toutes les déductions de la théorie de l'hydrodynamique des nappes drainées telle que nous la concevons. La démonstration est effectuée dans le cas d'un sol homogène au regard de la conductivité hydraulique K de Darcy.

Dans la réalité, il est rare de rencontrer un sol sédimentaire, limono-argileux, épais de plusieurs mètres à partir de la base de la couche labourée, dont la perméabilité ne diminue pas progressivement pour devenir quasi nulle au voisinage du toit du substratum ; les pédologues le savent bien...

Peut-on, dès lors, considérer comme étant toujours applicable la formule de la profondeur équivalente et, éventuellement, à quelles conditions ?

Avant de répondre à cette question et pour éclairer en toute objectivité le lecteur, nous présentons, à la section suivante, la théorie de l'hydrodynamique appliquée à un sol hétérogène verticalement. C'est un extrait d'une publication du Centre National du Machinisme Agricole, du Génie Rural, des Eaux et des Forêts [2].

II ■ LA THÉORIE

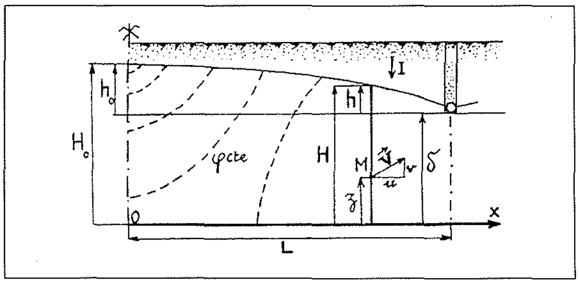
Le régime d'écoulement de la nappe vers les tranchées drainantes est supposé permanent (pluie infiltrée d'intensité I constante), et la conductivité hydraulique horizontale locale $K_h(z)$, ainsi que la conductivité hydraulique verticale locale $K_v(z)$ sont proches de fonctions monotones croissantes (cote z comptée depuis le toit du substratum quasi imperméable, *fig. 1*).

Le débit q de la nappe à travers une section verticale $H(x)$ a pour expression, u étant la composante horizontale de la vitesse $\vec{V}$ au point M :

$$q(x) = \int_0^H u dz = -\int_0^H K_h(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} dz$$

Cette intégrale s'écrit aussi, en tenant compte de la règle de dérivation sous le signe somme :

In this paper, it is shown that the formula « arc tg » giving the equivalent depth for the drainage of the homogeneous soil may, under certain conditions, be applied to the verticaly heterogeneous soil. This paper extends the results published in La Houille Blanche n° 7, 1995.



1. Schéma de l'écoulement.

$$\int_0^H K_h(z)\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dz = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^H \varphi(z)K_h(z)\,dz - K_h(H)\,\varphi(H)\,\frac{dH}{dx}$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\int_0^H (\varphi - z)K_h(z)dz$$

En posant :

$$\psi = \int_0^H (\varphi - z)\,K_h(z)\,dz\ ,$$

l'expression du débit devient :

$$q(x) = \frac{\partial\psi}{\partial x}$$

Intégrant entre $x = 0$ et $x = L$ (demi-écartement), la différentielle $q dx = -(\partial\psi/\partial x)\,dx$, on obtient :

$$\int_0^L q dx = \psi_0 - \psi_L \qquad (1)$$

Explicitons ψ_0 et ψ_L.

a) Calcul de ψ_0 :

On a successivement, faisant intervenir l'identité :

$$\varphi(z) = \varphi(H_0) - \int_z^{H_0} \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,dz\ :$$

$$\psi_0 = \int_0^{H_0} (\varphi - z)\,K_h(z)\,dz = \int_0^{H_0}\left(\varphi(H_0) - \int_z^{H_0}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,dz - z\right)K_h(z)\,dz\ ,$$

$$= \int_0^{H_0} (H_0 - z)\,K_h(z)\,dz - \int_0^{H_0} K_h(z)\,dz\int_z^{H_0}\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz$$

Sachant que la composante verticale $v(0,z)$ de la vitesse est égale à $-K_v(z)\,(\partial\varphi/\partial z)$, et posant $Z = z/H_0$, on peut écrire :

$$\frac{v(0,z)}{v(0,H_0)} = \frac{K_v(z)}{K_v(H_0)}\,\frac{(\partial\varphi/\partial z)_z}{(\partial\varphi/\partial z)_{H_0}} = \frac{K_v(z)}{K_v(H_0)}\,f(Z) \qquad (2)$$

Le rapport $f(Z)$ des gradients est inférieur à l'unité.
Sur les modèles analogiques les points d'intersection des équipotentielles avec l'inter-drains sont, en effet, de plus en plus rapprochés dans le sens croissant des z.
Posons, d'autre part :

$$K_h(z) = K_h(H_0)\,g(Z) \qquad (3)$$

$K_h(z)$ étant, par hypothèse, une fonction monotone croissante, $g(Z)$ varie de zéro à l'unité.

Avec les relations (2) et (3), ψ_0 devient :

$$\psi_0 = \int_0^{H_0} (H_0 - z)\,K_h(z)\,dz + v(0, H_0)\frac{K_h(H_0)}{K_v(H_0)}\,H_0^2\int_0^1 g(Z)\,dZ\int_z^1 f(Z')\,dZ'$$

$$\psi_0 = \int_0^{H_0} (H_0 - z)\,K_h(z)\,dz + v(0, H_0)\,\frac{K_h(H_0)}{K_v(H_0)}\,H_0^2\,R'_0$$

L'intégrale double R'_0 est inférieure à 1/2.
Et puisque $v(0, H_0) = -I$ (pluie infiltrée) :

$$\psi_0 = \int_0^{H_0} (H_0 - z)\,K_h(z)\,dz - I(K_h(H_0)/K_v(H_0))H_0^2\,R'_0 \qquad (4)$$

b) Calcul de ψ_L :

Le même raisonnement que pour le calcul de ψ_0, nous conduit à la relation suivante où $v(L, \delta)$ est la vitesse verticale de l'écoulement à la base du drain :

$$\psi_L = \int_0^{\delta} (\delta - z)\,K_h(z)\,dz - v(L, \delta)\,\frac{K_h(\delta)}{K_v(\delta)}\,\delta^2\,R'_L$$

Soit encore, en posant $v(L, \delta) = \omega I$, comme dans l'étude relative au sol homogène ($\omega = L/p$*) :

$$\psi_L = \int_0^{\delta} (\delta - z)\,K_h(z)\,dz - \omega I\delta^2(K_h(\delta)/K_v(\delta))\,R'_L \qquad (5)$$

Finalement, la relation (2) s'écrit, compte tenu de (4) et (5), et en admettant que le rapport d'anisotropie $\gamma = K_h/K_v$ est indépendant de la cote z :

$$\int_0^L q dx = \int_0^{H_0} (H_0 - z)\,K_h(z)\,dz - \int_0^{\delta} (\delta - z)\,K_h(z)\,dz - I\gamma(H_0^2\,R'_0 + \omega\delta^2\,R'_L) \qquad (6)$$

L'intégrale du 1[er] membre devient $IL^2/2$ puisque $q = Ix$.
Si le sol était homogène, la relation (6) s'écrirait, avec $K_h(z) = K_h$:

$$\frac{IL^2}{2} = \frac{H_0^2}{2}K_h - \frac{\delta^2}{2}K_h - I\gamma(H_0^2\,R_0 + \omega\delta^2\,R_L) \qquad (7)$$

Comparons, maintenant, les relations (6) et (7). On constate que dans (6) les deux intégrales tiennent respectivement la place des termes $H_0^2\,K_h/2$ et $\delta^2\,K_h/2$ de la relation (7) ; d'où l'idée d'écrire plus généralement :

$$\int_0^H (H - z)\,K_h(z)\,dz = \frac{H^2}{2}\,\tilde{K}_h(H) \qquad (8)$$

$\tilde{K}_h(H)$ désigne *la conductivité hydraulique horizontale équivalente* [4]**
Avec l'expression (8), la relation (6) devient :

---

* p : 1/2 périmètre mouillé du fond de la tranchée = πr dans le cas d'un drain plein d'eau et sans « effet de tranchée ».

** C'est cette caractéristique hydrodynamique globale qu'on mesure sur le terrain par la méthode du puits et des piézomètres (rabattement de nappe par pompage) [1]

$$\frac{IL^2}{2} = \frac{H_0^2}{2}\tilde{K}_h(H_0) - \frac{\delta^2}{2}\tilde{K}_h(\delta) - I\gamma(H_0^2 R'_0 + \omega\delta^2 R'_L) \quad (9)$$

Sous forme adimensionnelle, on obtient, avec $H_0 = h_0 + \delta$, $\rho = h_0/L$, $\lambda = \delta/L$ et $\tilde{K}_h(\delta)/\tilde{K}_h(H_0) = \tau$:

$$\frac{I}{\tilde{K}(H_0)} = \frac{(\rho+\lambda)^2 - \tau\lambda^2}{1 + 2\gamma(\rho+\lambda)^2 R'_0 + 2\gamma\lambda^2\omega R'_L} \quad (10)$$

III ■ CONDITIONS D'APPLICATION DE LA FORMULE « ARC TG »

Un sol homogène et isotrope au regard de la conductivité hydraulique conduit, d'après (10) où les rapports γ et τ sont dans ce cas égaux à l'unité, à la relation suivante de la note [3] :

$$\frac{I}{K} = \frac{\rho(\rho + 2\lambda)}{1 + 2(\rho+\lambda)^2 R_0 + 2\lambda^2\omega R_L} \quad (11)$$

Il est précisé, à cette même note, que la relation précédente se simplifie si les rapports ρ et λ sont au plus égaux respectivement à 0,15 et 0,20 (cas général). C'est ainsi, qu'au dénominateur de (11), le terme où figure R_0 peut être négligé.

Rappelons que, λ' étant la profondeur équivalente réduite : $\lambda' = \delta'/L$, on pose :

$$I/K = \rho^2 + 2\rho\lambda'$$

Ces rappels effectués, voyons les conditions pour qu'en conservant une approximation suffisante pour le calcul de l'écartement des drains, les rapports τ et γ disparaissent de (10), ce qui permettrait l'application de la formule « arc tg » de la profondeur équivalente réduite qui s'écrit [3] :

$$\lambda' = \frac{2\lambda'_\infty}{\pi} \text{ arc tg } \frac{\pi\lambda}{2\lambda'_\infty} \text{ (arcs en radians)} \quad (12)$$

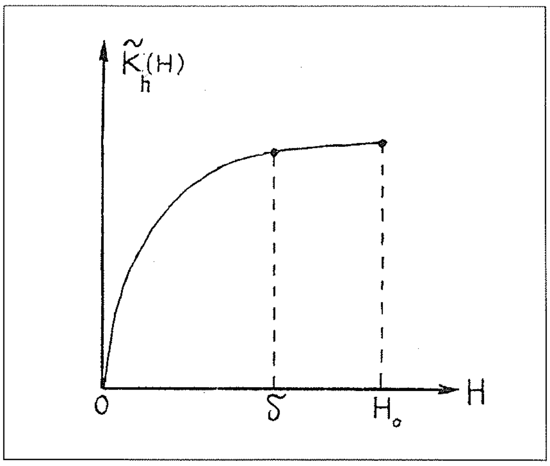
avec :

$$\lambda'_\infty = 0,145 \rightarrow 0,08 \leq \rho \leq 0,15$$
$$\lambda'_\infty = 0,014 \ln\rho + 0,18 \rightarrow 0,005 \leq \rho < 0,08$$

Dans les sols sédimentaires limono-argileux, là où le drainage s'impose pour des raisons techniques et économiques notamment, le rapport d'anisotropie est, généralement, peu différent de l'unité. C'est ainsi, par exemple, que des tests effectués il y a trente ans, sur des sols limoneux, drainés, du département des Yvelines (78), par le Centre d'Expérimentation du Génie Rural, n'a pas donné de différences statistiquement significatives entre les valeurs des conductivités K_h et K_v.

Quant au rapport τ il suffit de remplacer dans (9) et (10) les conductivités équivalentes $\tilde{K}(H_0)$ et $\tilde{K}(\delta)$ par *leur moyenne arithmétique* pour que ce rapport devienne égal à l'unité. Cette approximation sera d'autant plus satisfaisante que la fonction $\tilde{K}(H)$ sera *moins que proportionnelle* conformément au graphe de la *figure 2*.

La conductivité hydraulique horizontale équivalente devra être déterminée sur le terrain *par la méthode du puits et des piézomètres* [1]. Il s'agira d'un essai de pompage prolongé



2. Variation de $K_h(H)$.

ou répété de manière à obtenir les valeurs de $\tilde{K}(H_0)$ et $\tilde{K}(\delta)$.

Avant de conclure cette note, voici un exemple d'application de la formule $I/\bar{\bar{K}} = \rho(\rho + 2\lambda')$ au calcul de l'écartement des tranchées de drainage.

IV ■ EXEMPLE D'APPLICATION

Le calcul de l'écartement $E = 2L$ s'effectue connaissant, s'agissant dans le cas présent du régime d'écoulement permanent, les valeurs respectives de l'intensité I de la pluie infiltrée, de la profondeur δ, de la hauteur h_0, des conductivités hydrauliques $\tilde{K}(H_0)$ et $\tilde{K}(\delta)$.

La valeur de l'asymptote λ'_∞ dépendant du rapport $\rho = h_0/L$, le calcul de L ne peut s'effectuer, *a priori*, que par approximations successives. Pour supprimer cet inconvénient, un abaque cartésien a été établi qui fait intervenir la variable auxiliaire $\sigma = \delta/h_0$.

L'exemple numérique suivant illustrera l'application de cet abaque.

• *Les données :*

profondeur des tranchées : 1,00 m ;
profondeur du substratum sous les drains : δ = 1,25 m ;
hauteur h_0 : h_0 = 0,50 m ;
intensité de la pluie infiltrée : I = 1 cm/jour ;
conductivités hydrauliques équivalentes :
$\tilde{K}(H_0)$ = 0,50 m/j et $\tilde{K}(\delta)$ = 0,40 m/j.

• *Les calculs :*

calcul de σ : σ = 1,25/0,50 = 2,5

calcul de $I/\bar{\bar{K}}$: $I/\bar{\bar{K}}$ = 0,01/0,45 = *0,022*

abaque : $I/\bar{\bar{K}} \rightarrow \sigma \rightarrow \rho$: ρ = 0,077

valeur de l'écartement : $E = 2L = 2 \times 0{,}50/0{,}077$ = 13 m.

• *Vérification :*

$\rho = 0{,}077 \rightarrow \lambda'_\infty = 0{,}014 \ln\rho + 0{,}18 = 0{,}144$
$\lambda = 1{,}25/6{,}5 = 0{,}192$

$$\lambda' = \frac{2 \times 0,144}{\pi} \text{ arc tg} \frac{\pi \times 0,192}{2 \times 0,144} = 0,103$$

$I/\tilde{\tilde{K}} = \rho(\rho + 2\ \lambda') = 0{,}077(0{,}077 + 0{,}206) = \mathit{0{,}022}.$

A titre de comparaison, il paraît intéressant de calculer la valeur que prendrait l'écartement si les tranchées étaient creusées jusqu'au toit du substratum et remplies d'eau sur une hauteur égale à la profondeur réelle δ. Au lieu de la relation (10), on obtient, le terme contenant R_0 étant comme précédemment négligé :

$I/\tilde{K}(H_0) = (\rho + \lambda)^2 - \tau\lambda^2$

$IL^2/\tilde{K}(H_0) = (h_0 + \delta)^2 - \tau\delta^2$

Avec les données précédentes, $L = 9{,}5$ m $\rightarrow E = 19$ m.

Le jeu de la profondeur équivalente réduit singulièrement la valeur de l'écartement.

V ■ CONCLUSION

Le problème posé à l'introduction de cette note a une solution. Certes, c'est une solution approchée puisque, notamment, on remplace les conductivités hydrauliques horizontales équivalentes correspondant, respectivement, à la hauteur piézométrique totale de la nappe à son sommet et à la profondeur du sol sous le fond des tranchées, par leur moyenne arithmétique, mais qui offre l'avantage de prendre en considération, très simplement, l'expression « arc tg » de la profondeur équivalente.

Par ailleurs, l'abaque dont nous venons de voir un exemple d'application, simplifie considérablement les calculs puisqu'à partir des données de terrain il permet d'obtenir rapidement, sans approximations successives, la valeur de l'écartement des tranchées. La nomographie n'est plus guère à la mode à l'époque actuelle, cependant cet abaque conserve un intérêt certain dans le cas présent. En particulier, il rendra plus aisée la recherche de l'écartement optimal correspondant au prix unitaire minimal du drainage à la parcelle (ce prix à l'hectare, augmente avec la profondeur des tranchées mais est sensiblement inversement proportionnel à l'écartement).

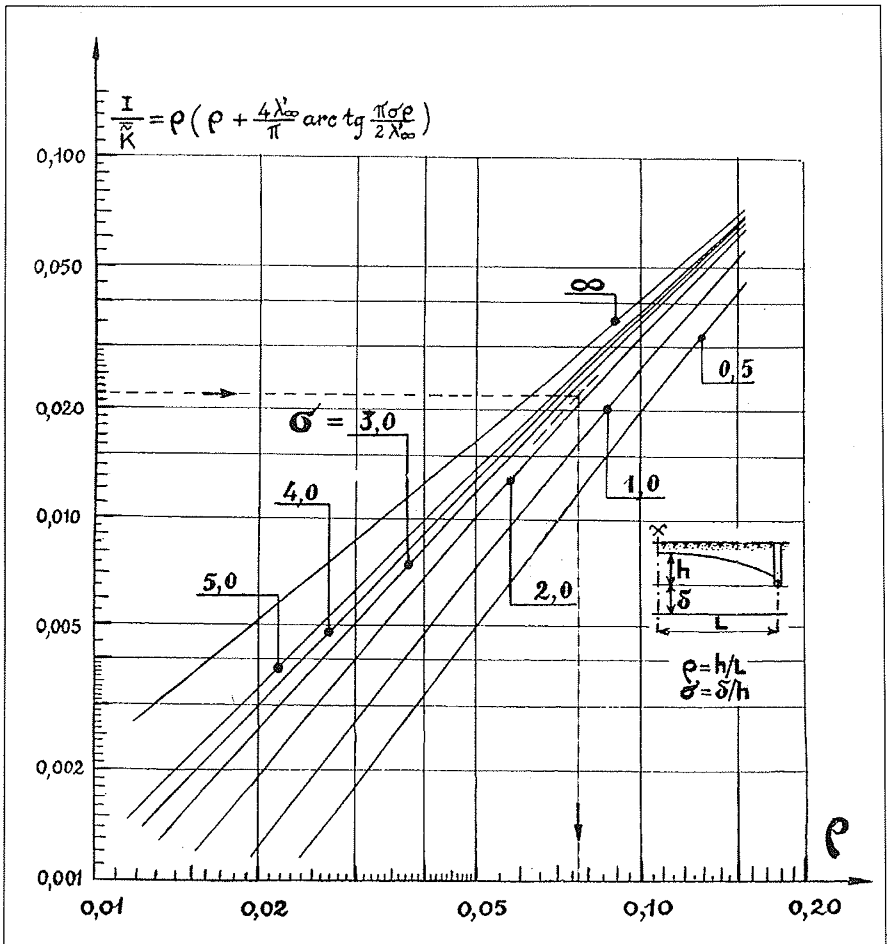
Références

[1] GUYON G. et WOLSACK J. (1978). — La conductivité hydraulique des sols hétérogènes et anisotropes. XV^{es} Journées de l'hydraulique de la SHF, septembre 1978.

[2] GUYON G. (1986). — Hydraulique des nappes drainées. Etudes du CEMAGREF, série hydraulique agricole n° 1, pp. 131-174.

[3] GUYON G. (1995). — Hydraulique du drainage. Une formule de la profondeur équivalente. La Houille Blanche, n° 7.

[4] WOLSACK J. (1978). — Quelques extensions de la théorie du drainage aux cas des sols hétérogènes et anisotropes. Bull. du BRGM, mars 1978.



3. Calcul de l'écartement des drains.