

Comportement dynamique des ensembles tournants de turbomachines couplés aux fluides environnants

Dynamic behaviour of turbomachines rotating sets coupled with surrounding fluids

par G. Jacquet-Richardet

Laboratoire de Mécanique des Structures, UPRESA CNRS 5006, INSA Lyon

This paper presents and illustrates the coupling techniques developed at the Laboratoire de Mécanique des Structures, adapted to the analysis of fluid structure coupled behaviours in turbomachines. Three different aspects are considered : the added mass effect, the aeroelastic instability called flutter and the global analysis of flexible wheel-shaft assemblies. These problems are quite different but the coupling techniques used for each case are close. Within this context, the interest of modal techniques is particularly highlighted.

I ■ CONTEXTE

Les turbomachines sont généralement des entités de haute technologie qui présentent la particularité de mettre en jeu à la fois une structure et un fluide. Du fait de la complexité des phénomènes rencontrés, la conception d'une turbomachine fait appel à de nombreuses spécialités différentes qui, tout en devenant de plus en plus performantes au cours du temps, se sont naturellement cloisonnées. Ainsi, les calculs « fluide » sont effectués indépendamment des calculs « structure » et ces deux disciplines de base se subdivisent encore en domaines d'expertise distincts. Ce type d'approche a permis des progrès considérables, tant du point de vue du rendement que de la fiabilité. Mais, les machines devenant de plus en plus légères pour des puissances transmises de plus en plus importantes, ces approches découplées commencent à montrer leurs limites. Les couplages à envisager sont alors autant fluide-fluide, structure-structure que fluide-structure.

Les problèmes posés par le couplage fluide-structure sont nombreux et divers. On distingue cependant deux familles principales selon que le fluide est léger (aéroélasticité) ou lourd (hydroélasticité). L'activité « couplage fluide-structure » a été initiée au Laboratoire de Mécanique des Structures en 1983. Les travaux développés en aéroélasticité concernent la mise au point de méthodes numériques capables de prévoir l'instabilité aéroélastique de flottement, très destructrice pour les moteurs d'avions [1]. En hydroélasticité, l'intérêt s'est reporté sur l'étude du problème de masse ajoutée, élément indispensable pour la prévision du comportement dynamique de structures fonctionnant dans des fluides lourds, comme les pompes [2].

II ■ ÉQUATIONS GÉNÉRALES

Les roues de turbomachines se caractérisent par des formes complexes et, par conséquent, la méthode des éléments finis s'est largement imposée pour l'étude de leurs comportements statique et dynamique [3-4]. Après discrétisation par éléments finis, écriture des énergies associées et application des équations de Lagrange, le comportement dynamique de la structure couplée au fluide environnant est donné par :

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [C]\{\dot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = \{F_c(\Omega^2)\} + \{F_e\} + \{F(\delta, \dot{\delta}, \ddot{\delta})\} \quad (1)$$

où $[M]$ est la matrice de masse de la structure, $[C]$ est la matrice représentative des effets gyroscopiques et d'amortissement et $[K]$ est la matrice de raideur, constituée des termes de raideur élastique $[KE]$, géométrique $[KG]$ et supplémentaire $[MG]$. Les vecteurs $\{\delta\}$, $\{\dot{\delta}\}$, $\{\ddot{\delta}\}$ sont respectivement les déplacements nodaux, vitesses et accélérations nodales de la structure. $\{F_c\}$ est le vecteur des forces centrifuges et $\{F_e\}$ est le vecteur des forces extérieures stationnaires. Enfin, le vecteur $\{F\}$ représente les forces imposées par le fluide et dépendantes du mouvement de la structure. De manière classique, le problème dynamique (1) est linéarisé en supposant que la vibration se fait selon de petites amplitudes autour de la position d'équilibre statique de la roue soumise aux effets conjoints de la rotation et des efforts fluides stationnaires.

Les roues de turbomachines, lorsqu'elles sont considérées accordées, sont constituées d'un ensemble de N sous-structures identiques (secteurs). Dans ces conditions, les relations de propagation d'onde permettent de décrire le comporte-

ment d'ensemble à partir de quantités associées à un seul secteur de base :

$$\{\delta\}_j = \{\delta_n^c\} \cos(j-1)\beta_n + \{\delta_n^s\} \sin(j-1)\beta_n \quad (2)$$

où $\{\delta\}_j$ est le déplacement du secteur j et $\{\delta_n^c\}$, $\{\delta_n^s\}$ sont les quantités généralisées associées au secteur de base. $\beta_n = 2\pi n/N$ est le déphasage inter-secteur, N est le nombre total de secteurs et n , ordre de Fourier, prend les valeurs discrètes $n = 0, 1, \dots, D/2$, où $D = N$ si N est pair et $D = N - 1$ si N est impair. Dans ces conditions, la solution du problème dynamique linéarisé en vibration libre, associé à (1), est obtenue par résolution de $D/2$ systèmes réduits de la forme :

$$[M_n]\{\ddot{\delta}_n\} + [C_n]\{\dot{\delta}_n\} + [K_n]\{\delta_n\} = \{F_n(\delta_n, \dot{\delta}_n, \ddot{\delta}_n)\} \quad (3)$$

La taille des systèmes est limitée à deux fois de nombre de degrés de liberté d'un seul secteur et peut être encore réduite par condensation des degrés de libertés internes à chaque secteur [3].

III ■ STRUCTURES IMMERGÉES. EFFET DE MASSE AJOUTÉE

Les techniques de modélisation ainsi que les résultats présentés dans ce paragraphe sont issus d'une étude développée dans le cadre d'une collaboration avec GEC Alsthom Bergeron, pour l'analyse du comportement dynamique des roues de pompes immergées [5, 6]. L'application est basée sur une roue de pompe centrifuge constituée de deux flasques axisymétriques et six aubes de géométrie complexe [7].

● 3.1 Modélisation

Une série d'essais effectués par Bergeron a montré que, dans la plage de vitesse et pour la géométrie considérées, les fréquences naturelles et les modes propres étaient relativement peu influencés par la rotation. Les effets de la rotation ont donc été négligés. La méthode des éléments finis a été retenue pour la modélisation de la structure et du fluide. Les variables représentatives du comportement fluide sont les pressions nodales. Comme on ne s'intéresse qu'aux premières fréquences de vibration, le fluide est supposé incompressible et son effet limité à l'effet de masse ajoutée. Dans ces conditions et en négligeant dans un premier temps les effets d'amortissement, le comportement de l'ensemble couplé fluide-structure est régi par :

$$([M_n] + [Ma_n]) \{\ddot{\delta}_n\} + [K_n] \{\delta_n\} = \{0\} \quad (4)$$

$$[Ma_n] = \rho_F [L_n] [H_n]^{-1} [L_n]^t \quad (5)$$

où $[L]$ est une matrice rectangulaire qui transforme les pressions imposées par le fluide à l'interface en forces nodales équivalentes, $[H]$ est l'équivalent fluide de la masse de la structure et ρ_F est la masse volumique du fluide. La matrice de masse ajoutée $[Ma]$ peut être calculée directement, cependant sa construction reste coûteuse. Cette opération peut être significativement allégée en supposant que les modes propres de la structure immergée peuvent s'écrire comme combinaison linéaire des modes de la structure dans le vide.

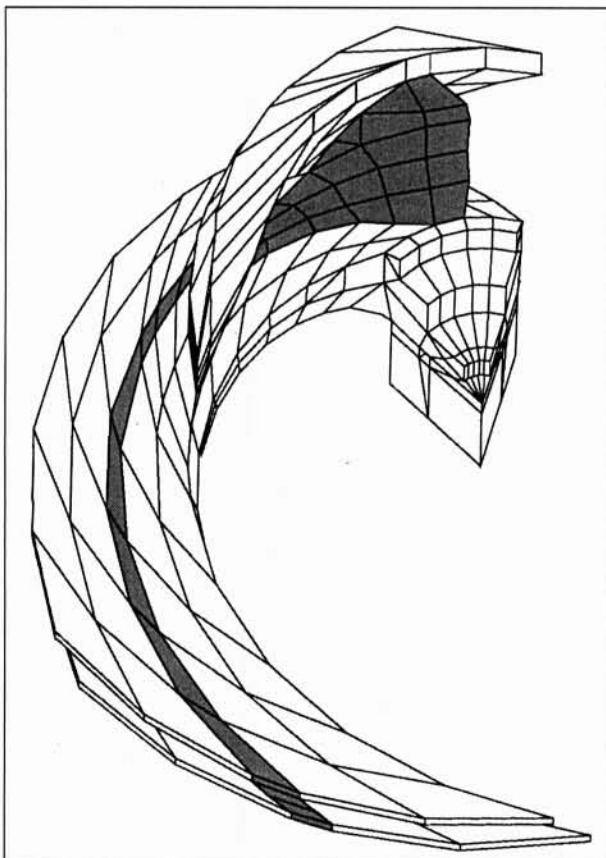
● 3.2 Application

La méthode ainsi que les réductions proposées ont été testées par comparaison des résultats obtenus avec des résultats de référence expérimentaux. Comme le montre la figure 1 les aubes conditionnent la forme du secteur répétitif de base. La structure est maillée à l'aide de 295 éléments finis volumiques isoparamétriques à 20 ou 15 nœuds et 3 ddl par

nœud. Le fluide est maillé avec 1 005 éléments volumiques à 20 ou 15 nœuds et un ddl par nœud. Les calculs sont effectués pour chaque déphasage inter-secteurs β_n possible : $\beta_0 = 0^\circ$, $\beta_1 = 60^\circ$, $\beta_2 = 120^\circ$ and $\beta_3 = 180^\circ$.

Les premiers modes calculés en air et en eau, ainsi que les fréquences propres associées sont données dans le tableau 1. L'influence de l'eau sur les fréquences est importante et peut induire une baisse allant jusqu'à 30 %. Cette influence est fortement dépendante de la forme du mode. Les 5 premières déformées modales ne sont pas influencées par l'immersion. Au-delà, chaque mode en air évolue vers deux modes différents en eau. Le premier est très proche du mode en air, avec les deux flasques vibrant en phase. En revanche, le second est significativement différent du mode en air et se caractérise par une opposition de phase entre les flasques.

L'intérêt de la méthode modale apparaît clairement quand on examine les temps de calculs. Le temps nécessaire pour le calcul de la structure en air est de 13 heures CPU avec une station de travail HP715. Le temps supplémentaire pour le calcul de la structure en eau est de 29 heures avec la méthode directe, 10,9 heures avec la méthode modale conservant 5 modes en base modale et 11,4 heures avec la méthode modale conservant 10 modes en base modale. Les fréquences obtenues avec ces différentes méthodes sont reportées dans le tableau 2. On peut constater que la précision donnée par la méthode modale est bonne, même lorsque le nombre de modes conservés est relativement faible. La convergence est très rapide pour les modes où les flasques vibrent en phase puisque ces modes ne sont pratiquement pas affectés par l'immersion. Pour les modes où les flasques vibrent en opposition de phase, la convergence est naturellement plus difficile mais reste très bonne lorsque le nombre de modes retenus est suffisant. Dans cette optique, il est intéressant de noter que l'augmentation du nombre de modes pris en compte n'augmente que très peu les temps de calcul.



1. Maillage éléments finis du secteur répétitif de base.















Roue en air		Roue en eau		
Mode 1 $\beta_1 = 60^\circ$ 282. Hz		Mode 1 $\beta_1 = 60^\circ$ 233. Hz		-17. %
Mode 2 $\beta_0 = 0^\circ$ 900. Hz	Mode parapluie	Mode 2 $\beta_0 = 0^\circ$ 654. Hz	Mode parapluie	-27. %
Mode 3 $\beta_1 = 60^\circ$ 1017. Hz		Mode 4 $\beta_1 = 60^\circ$ 862. Hz		-15. %
Mode 4 $\beta_2 = 120^\circ$ 1098. Hz		Mode 3 $\beta_2 = 120^\circ$ 853. Hz		-22. %
Mode 5 $\beta_3 = 180^\circ$ 1377. Hz		Mode 5 $\beta_3 = 180^\circ$ 1104. Hz		-20. %
Mode 6 $\beta_1 = 60^\circ$ 1765. Hz		Mode 9 $\beta_1 = 60^\circ$ 1585. Hz		-10. %
		Mode 10 $\beta_1 = 60^\circ$ 1679. Hz		-5. %
Mode 7 $\beta_3 = 180^\circ$ 1777. Hz		Mode 6 $\beta_3 = 180^\circ$ 1388. Hz		-22. %
		Mode 7 $\beta_3 = 180^\circ$ 1472. Hz		-17. %

Tableau 1. — Influence de l'immersion sur les fréquences et modes propres.

Mode	Flasques	Méthode directe	Méthode modale 5 modes/ βn	Δ %	Méthode modale 10 modes/ βn	Δ %
1	ph	156,2	156,2	0,0	156,2	0,0
2	ph	391,9	392,2	0,1	392,1	0,1
3	ph	628,0	628,2	0,0	628,1	0,0
4	ph	749,5	750,6	0,1	749,9	0,1
5	ph	884,0	884,2	0,0	884,1	0,0
6	ph	1 096,4	1 097,0	0,1	1 096,6	0,0
7	op	1 325,8	1 348,9	1,7	1 336,7	0,8
8	op	1 355,7	1 418,2	4,6	1 370,4	1,1

Tableau 2. — Précision de la méthode modale (ph) flasques en phase, (op) flasques en opposition de phase.

IV ■ FLOTTEMENT. INSTABILITÉ AÉRO-ÉLASTIQUE

● 4.1 Modélisation

Le flottement est issu d'un couplage qui se crée entre la vibration d'un aubage et le fluide qui le traverse. Pour traiter ce type d'instabilité et être à même de la prédire, plusieurs problèmes se posent. 1) Le système (3) reste non-linéaire du fait de l'interdépendance des forces aérodynamiques instationnaires et du déplacement vibratoire. 2) Même limité à un seul secteur de base, le nombre d'équations du système reste élevé. 3) Comme différents types de discrétisations et différents types de maillages sont généralement utilisés pour les domaines fluide et structure, il est nécessaire de résoudre le problème de compatibilité à l'interface. L'ensemble de ces problèmes peut être résolu grâce à l'utilisation d'une technique modale [8, 9].

Soit un ensemble $[\Phi_n]$, constitué par les m premiers modes de la structure isolée. Alors le déplacement couplé peut s'écrire :

$$\{\delta_n\} = \sum_{i=1}^m \{\Phi_{ni}\} q_{ni} = [\Phi_n] \{q_n\} \quad (6)$$

Cette expression, reportée dans (3), conduit au système réduit suivant :

$$[m_n] \{\ddot{q}_n\} + [c_n] \{\dot{q}_n\} + [k_n] \{q_n\} = \{f_n\} \quad (7)$$

où :

$$\begin{aligned} [m_n] &= [\Phi_n]^T [M_n] [\Phi_n] & [c_n] &= [\Phi_n]^T [C_n] [\Phi_n] \\ [k_n] &= [\Phi_n]^T [K_n] [\Phi_n] & \{f_n\} &= [\Phi_n]^T \{F_n\} \end{aligned} \quad (8)$$

Considérant un modèle aérodynamique instationnaire linéarisé, les forces dépendantes du mouvement de la structure s'écrivent alors :

$$\{f_n\} = [\Phi_n]^T \{F([\Phi_n] \{q_n\})\} = [\Phi_n]^T [A_n] \{q_n\} = [a_n] \{q_n\} \quad (9)$$

Les vecteurs de la matrice A_n représentent les forces instationnaires générées par la structure vibrant selon chaque mode retenu, à la fréquence du système couplé. L'ordre de la matrice a_n est m par m et cette matrice est complexe du fait du déphasage entre le mouvement de la structure et les forces aérodynamiques générées. Considérant (9), le système (7) devient :

$$[m_n] \{\ddot{q}_n\} + [c_n] \{\dot{q}_n\} + [k_n - a_n] \{q_n\} = \{0\} \quad (10)$$

La résolution de (10) donne les valeurs des fréquences amorties ω_{ni} ainsi que des amortissements aéroélastiques associés

α_{ni} . L'instabilité apparaît lorsque les amortissements sont positifs.

Dans la mesure où les quantités modales sont des quantités indépendantes du maillage, pourvu que celui-ci soit suffisamment fin, la projection en base modale résout également le problème posé par la non coïncidence du type et de la finesse des maillages à l'interface. Les quantités modales structure sont calculées à l'aide du maillage structure. Les quantités modales fluide sont calculées sur une grille de type surfacique, identique au maillage fluide à l'interface. Ce maillage d'interface est constitué d'éléments triangulaires de type T3. Sur chaque élément la pression est connue en chaque nœud. Les forces modales sont obtenues, simplement, après calcul des forces nodales équivalentes, assemblage et interpolation des déplacements sur le maillage d'interface [9].

● 4.2 Application

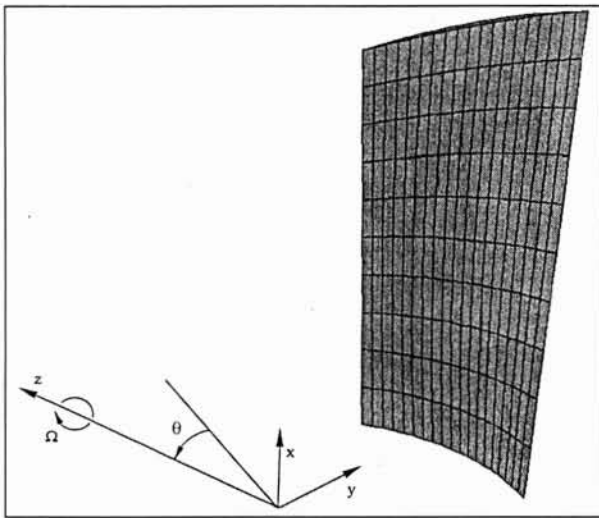
L'application repose sur un étage « fan » de compresseur constitué de 22 aubes à large corde. Le diamètre extérieur de l'étage est de 1,9 m. La longueur des aubes est de 0,69 m et leur élanement (rapport longueur sur corde) est de 2,1. La vitesse de rotation considérée est de 2 000 tr/mn et le disque supportant les aubes est supposé rigide. Trois différentes configurations, toutes basées sur la même géométrie extérieure, sont testées :

1. aube entièrement en titane,
2. aube constituée d'une peau en titane et d'un cœur en nid d'abeilles de faible densité (60 % de l'épaisseur totale),
3. aube en matériau composite constituée de couches de graphite epoxy.

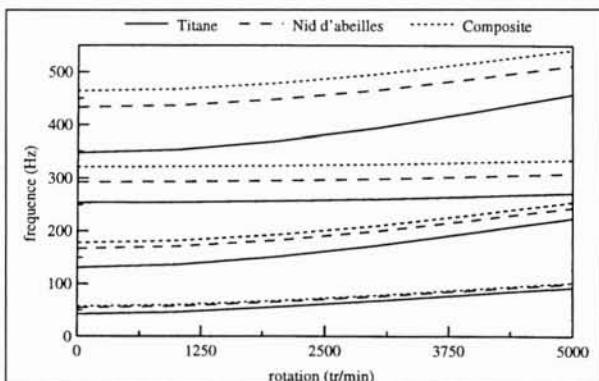
L'avantage des configurations 2 et 3 est de réduire significativement le poids de la structure, tout en lui conservant de très bonnes propriétés mécaniques. La structure est modélisée à l'aide d'un « élément fini multicouche » de coque à huit nœuds et cinq degrés de liberté par nœud [10]. Comme le montre la figure 2, l'aube est modélisée par 380 éléments finis (1 887 nœuds et 2 950 degrés de liberté). Les pressions fluide stationnaires et instationnaires sont calculées à l'aide d'un logiciel quasi-tridimensionnel linéarisé, basé sur les hypothèses d'écoulement potentiel subsonique-transsonique [11]. Onze surfaces de courant sont maillées selon la hauteur de l'aube et chaque maillage est constitué d'environ 900 éléments triangulaires bi-dimensionnels et 600 nœuds. Pour chaque mode couplé, les calculs sont effectués pour les 23 déphasages inter-aubes possibles.

L'évolution des fréquences propres avec la rotation, pour l'aubage isolé, est donnée figure 3. Les modes 1, 2 et 4 sont des modes de flexion d'aube et le mode 3 est un mode de torsion d'aube. La forme de ces modes est peu influencée par la configuration. En revanche les fréquences associées aux configurations nid d'abeilles et composite sont nettement plus élevées que celles associées à la configuration titane (accroissement en fréquence de 30 %). De manière classique, l'effet de la rotation est négligeable pour le mode de torsion mais en revanche très important pour les modes de flexion.

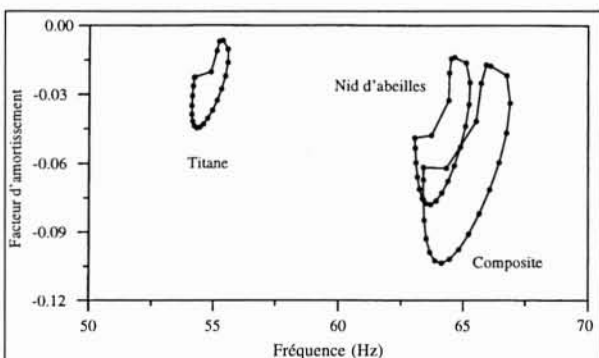
Le comportement couplé obtenu pour le premier mode de chaque configuration est reporté sur la figure 4. Les résultats sont présentés sous forme de boucle de stabilité, qui relie les couples fréquence amortie-facteur d'amortissement calculés pour chacun des déphasages inter-aubes. L'aubage est stable dans tous les cas (amortissement négatif). L'influence du changement de configuration sur les valeurs d'amortissement aéroélastique tient à la fois du changement de fréquence et du changement de raideur. La figure 4 montre clairement que les amortissements obtenus pour les configurations nid d'abeilles et composite sont nettement plus importants que ceux obtenus pour la configuration titane.



2. Maillage éléments finis d'une aube.



3. Structure isolée. Evolution des fréquences naturelles avec la rotation.



4. Premier mode de chaque configuration. Boucles de stabilité.

V ■ ENSEMBLES ROUE-ARBRE FLEXIBLES

La stabilité des rotors de turbomachines est fortement conditionnée par les éléments fluide tels que ceux constitués par les paliers, les écoulements secondaires sur les flasques de roues ou les écoulements de fuite en tête d'aubes par

exemple. En examinant la littérature il apparaît que les paliers et les joints d'étanchéité font l'objet d'études nombreuses et variées. Dans ce domaine l'approche classique de dynamique des rotors, qui modélise l'arbre flexible en poutres et qui suppose les roues rigides, a fait largement ses preuves et donne une précision suffisante [12]. En revanche les interactions mettant en jeu les roues ne sont que peu étudiées et, pour ce type d'étude, les limites de validité de l'hypothèse de roue rigide restent inconnues.

Pour avancer vers une analyse plus fine des interactions fluide structure associées à la dynamique des rotors, un modèle destiné à l'étude des ensembles roue-arbre flexibles en rotation a été développé. Ce modèle, validé par comparaison des résultats calculés avec des résultats issus d'autres modèles numériques ou de l'expérimentation, a permis de mettre en évidence l'importance potentielle des couplages roue-arbre sur le comportement dynamique global des rotors [13, 14]. Une technique de couplage fluide structure adaptée a été mise au point. Cette technique, proche de celle décrite précédemment, fait face aux difficultés supplémentaires provenant du mouvement relatif des domaines fluide et structure. La méthode a été appliquée, dans un premier temps, au cas de l'interaction roue arbre flexible-palier [15].

VI ■ CONCLUSION

L'un des objectifs de l'activité de couplage fluide structure du Laboratoire de Mécanique des Structures est d'essayer de développer des méthodes de couplage suffisamment précises et utilisables au cours du processus de développement des turbomachines. Compte tenu des habitudes de travail encore largement cloisonnées, une technique de couplage doit laisser le plus de liberté possible à chaque spécialiste fluide ou structure pour établir et valider ses modèles, selon les critères, les méthodes et les logiciels qui lui sont propres. Ces impératifs éliminent naturellement les couplages trop rudimentaires. Ils éliminent également les couplages forts, performants, mais lourds, difficilement évolutifs et basés sur des logiciels spécifiques. La technique principale de couplage développée présente l'avantage d'offrir une grande souplesse dans le choix et la mise au point des différents modèles de base. Elle permet notamment de travailler à partir de modèles établis à l'aide des grands logiciels commerciaux, pour la structure et pour le fluide. L'approche utilisée est fréquentielle linéaire et les deux caractéristiques principales sur lesquelles sont basés les développements sont : 1) l'utilisation d'une projection en base modale, à la fois pour le couplage et pour la réduction de l'effort de calcul, 2) l'utilisation d'une grille d'interfaçage entre les domaines fluide et structure.

L'analyse du comportement dynamique des ensembles tournants de turbomachines doit de plus en plus souvent être abordée de manière globale. En effet, il devient nécessaire de prendre en compte précisément les couplages possibles entre les différents sous-ensembles flexibles de la structure et entre la structure et le fluide, que ce soit le fluide véhiculé ou celui présent dans les paliers, dans les labyrinthes d'étanchéité, entre les flasques des roues et le carter par exemple. Quand les effets de la flexibilité des roues sont négligeables, l'approche classique de type dynamique des rotors est puissante et adaptée. En revanche, les limites de validité de l'hypothèse de roue rigide sont mal connues et les modèles susceptibles d'analyser le comportement global roues-arbre-fluide n'existent pas. Une étude a été engagée pour avancer vers l'établissement de tels modèles ainsi que vers une meilleure connaissance des phénomènes mis en jeu. Il s'agit, à terme, de pouvoir modéliser finement et d'analyser les interactions qui mettent directement en jeu les roues des lignes d'arbre.

Enfin, un fort intérêt se dégage actuellement pour l'amélioration des techniques de prévision des niveaux vibratoires en réponse forcée sous excitations fluide, ainsi que pour la prévision des durées de vie associées.

REMERCIEMENTS

L'auteur remercie Bergeron Alsthom, Electricité De France, Framatome Thermodyn, le Ministère de l'Enseignement et de la Recherche, et le Centre National de la Recherche Scientifique pour leurs supports.

REFERENCES

- [1] HENRY R., VINCENT B. (1990) — « Instabilité aéroélastique dans les moteurs d'avions. Application à un étage de soufflante SNECMA ». Revue Française de mécanique 1, pp. 23-32.
- [2] PAVANELLO R. (1991). — « Contribution à l'étude hydroélastique des structures à symétrie cyclique ». Thèse de Doctorat, INSA Lyon.
- [3] HENRY R., FERRARIS G. (1984). — « Substructuring and wave propagation. An efficient technique for impeller dynamic analysis ». ASME J. of Eng. for Gas Turbine and Power 106, pp. 2-10.
- [4] GELIN A., PUGNET J.M., JACQUET-RICHARDET G. (1996). — « Accurate prediction in dynamics of centrifugal impellers ». Int. Conf. on Vibrations in Rotating Machinery IMechE, Oxford, pp. 77-87.
- [5] ALSTHOM (1988). — « Dynamique des roues de pompe. Contat MRT 85PO786, Compte rendu de fin d'études ».
- [6] LECOUFFLE J.C., COLIN R., BILLAUD J.F., GUILLOISEAU P., LAIGNEAU T. (1989). — « Dynamique des roues de pompe et de compresseurs centrifuges ». Société Hydrotechnique de France, 20^e journées de l'hydraulique, Lyon, pp. II-2.1, II-2.6.
- [7] JACQUET-RICHARDET G., DAL-FERRO C., (1996). — « Reduction method for finite element dynamic analysis of submerged turbomachinery wheels ». Computers and structures 61 (6), pp. 1025-1036.
- [8] JACQUET-RICHARDET G., HENRY R. (1994). — « A modal aeroelastic finite element analysis method for advanced turbomachinery stages ». Int. J. for Num. Meth. in Eng 37, pp. 4205-4217.
- [9] MOYROUD F., JACQUET-RICHARDET G., FRANSSON T.H. (1996). — « A modal coupling for fluid and structure analysis of turbomachinery flutter. Application to a fan stage ». ASME Paper 96GT335.
- [10] JACQUET-RICHARDET G., SWIDER P. (1997). — « Influence of fibre orientation on the dynamic behaviour of rotating laminated composite blades ». Comm. in Num. Meth. in Eng. 13, pp. 815-824.
- [11] WHITEHEAD D.S., NEWTON S.G. (1985). — « A finite element method for the solution of two dimensional transonic flows in cascade ». Int. J. for Num. Meth. in Fluids 5, pp. 115-132.
- [12] LALANNE M., FERRARIS G. (1998). — « Rotordynamics prediction in engineering ». 2nd ed. J. Wiley.
- [13] JACQUET-RICHARDET G., FERRARIS G., RIEUTORD P. (1996). — « Frequencies and modes of rotating flexible bladed disc-shaft assemblies : A global cyclic symmetry approach ». J. of Sound and Vibration 191 (5), pp. 901-915.
- [14] IRRETIER H., REUTER F., JACQUET-RICHARDET G. (1998). — « Numerical and experimental investigations of coupling effects in anisotropic elastic rotors ». ISROMAC-7.
- [15] JACQUET-RICHARDET G., RIEUTORD P. — « A three dimensional fluid-structure coupled analysis of rotating flexible assemblies of turbomachines ». J. of Sound and Vibration. 209 (1), pp. 61-76.