Hydraulique du drainage

Application de la formule « arc tg » de la profondeur équivalente au régime de tarissement d'une nappe située dans un sol hétérogène verticalement

Drainage Hydraulics : « arc tg » formula applied to the deepness of the recession flow of an aquifer situated in a vertically hererogeneous soil

par G. Guyon

Ingénieur en Chef honoraire du Génie Rural des Eaux et des Forêts,
membre de l'Académie d'Agriculture de France

This paper follows those published in the 7/1995 et 3/1996 issues of La Houille Blanche. An expression of the aquifer top ground water drainage speed is established for the case of recession flow non influenced by the rain. It is then demonstrated that the cartesian chart with logarithme coordinates, proposed for the drain separation calculus in steady flow, leads generally to a solution for the recession flow.

I ■ INTRODUCTION

Dans les notes [2] et [3] publiées dans cette revue, le régime d'écoulement de la nappe drainée considéré est le régime permanent obtenu sous une pluie supposée d'intensité constante. La présente note, au contraire, admet que la couche labourée du sol est ressuyée après un épisode pluvieux, et que la surface piézométrique de la nappe s'abaisse progressivement sous la seule influence de la gravité (fig. 1).

Précisons que la connaissance des notes [2] et [3] est indispensable pour une bonne compréhension de cette publi-

cation et éviter au lecteur l'abus de répétitions concernant : la notation des grandeurs en jeu, la définition et les formules de la profondeur équivalente δ' et celles de la conductivité hydraulique horizontale équivalente $\bar{K}(H)$.

D'emblée, l'étude portera sur un sol hétérogène verticalement au regard de la conductivité hydraulique, mais la conductivité hydraulique horizontale locale $K_h(z)$ (ordonnée depuis le toit du substratum quasi-imperméable), est une fonction monotone croissante, ainsi que la conductivité verticale locale $K_v(z)$ [3].

II ■ EXPRESSION DE LA VITESSE DE RABATTEMENT DE LA SURFACE PIÉZOMÉTRIQUE DE LA NAPPE, À L'INTER-DRAINS

Le calcul partira de la relation (9) de la note [3], mais avec les modifications suivantes s'agissant, cette fois, du régime de tarissement :

a) Le premier membre s'écrit, au lieu de $IL^2/2$ [1] :

$$\int_0^L q(x, t) dx = \int_0^L \left(- \int_0^x \mu \frac{\partial H(x, t)}{\partial t} dx \right) dx$$

1. Tarissement de la nappe.

La porosité de drainage μ^* se détermine sur le terrain par la méthode du puits et des piézomètres [1] [5]. Par ce procédé, il s'agit d'une valeur moyenne et la relation ci-dessus peut s'écrire de ce fait, sachant par ailleurs que $H(x, t) = \delta + h(x, t)$:

$$-\bar{\mu} \int_0^L dx \int_0^x \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} dx$$

Nous ferons l'hypothèse simplificative suivante : la loi classique de séparation des variables, utilisée notamment dans le cas où la profondeur δ est nulle et alors vérifiée théoriquement et expérimentalement [1], [4], s'applique approximativement dans le cas présent :

$$h(x, t) = h(0, t) \cdot C(X) \text{ avec } X = x/L :$$

$C(X)$ est le facteur de forme de la surface piézométrique.

Dans la conclusion de cette note nous reviendrons sur le choix de cette simplification.

Avec la loi précédente, le premier membre de (9) devient :

$$\int_0^L q dx = -\bar{\mu} \frac{dh(0, t)}{dt} L^2 \int_0^1 X C(X) dX$$

Soit, après avoir désigné par N l'intégrale adimensionnelle du second membre :

$$\int_0^L q dx = -\bar{\mu} N L^2 \frac{dh(0, t)}{dt}$$

La valeur de N est comprise entre 0,41 (parabole : $C(X) = 1 - X^2$) et 0,45 (ellipse : $C(X) = \sqrt{1 - X^2}$). La valeur moyenne $N = 0,43$ peut être adoptée [1].

b) Au second membre de (9) :

- la vitesse I doit être remplacée par l'expression : $-\bar{\mu}(dh(0, t)/dt)$ [1] ;
- on doit substituer aux deux conductivités $\bar{K}(H_0)$ et $\bar{K}(\delta)$ leur moyenne arithmétique pour que l'application de la formule « arc tg » de la profondeur équivalente reste significative [3] ;
- le terme $\gamma H_0^2 R'_0$ peut être négligé vis-à-vis de son homologue dominant $\gamma \omega \delta^2 R'_L$ [3].

Finalement, sachant que le rapport d'anisotropie est voisin de l'unité, tout au moins pour les sols limono-argileux, cultivés [3], on obtient la relation suivante simplifiée, de la hauteur $h(0, t) = h$:

$$\frac{2\bar{\mu}N}{\bar{K}} \left| \frac{dh}{dt} \right| = \frac{h(h + 2\delta)}{L^2 + 2\delta^2 \omega R'_L} \quad (1)$$

Avec les grandeurs adimensionnelles ρ et λ il vient :

$$\frac{2\bar{\mu}N}{\bar{K}} \left| \frac{dh}{dt} \right| = \frac{\rho(\rho + 2\lambda)}{1 + 2\lambda^2 \omega R'_L}$$

Faisant intervenir la profondeur équivalente réduite $\lambda' = \delta'/L$:

$$\frac{2\bar{\mu}N}{\bar{K}} \left| \frac{dh}{dt} \right| = \rho(\rho + 2\lambda') \quad (2)$$

III ■ CALCUL DE L'ÉCARTEMENT DES DRAINS

Pour le calcul de l'écartement des files de drains ou de fossés, rectilignes et parallèles, nous allons montrer que

2. Courbe de tarissement.

l'abaque établi pour le régime d'écoulement permanent peut aussi être utilisé pour le régime de tarissement non influencé par les pluies.

Le théorème des accroissements finis, appliqué à la fonction $h(0, t)$ représentée figure 2, transforme les relations (1) et (2) de la manière suivante, avec δ' et λ' :

$$\frac{2\bar{\mu}N}{\bar{K}} \frac{h_0 - h}{t} = \frac{h_n(h_n + 2\delta'_n)}{L^2} = \rho_n(\rho_n + 2\lambda'_n) \quad (3)$$

La hauteur h_n correspond au point de contact de la tangente à la courbe $h(t)$, parallèle à la corde ab . On ne connaît pas sa valeur lorsque le rapport ρ est inférieur à 0,08 [2]*. Par contre, la hauteur moyenne $h_m = 0,5(h_0 + h)$, probablement proche en grandeur de h_n , a une valeur connue : on se fixe, en effet, la valeur $h_0 - h$ du rabattement et le temps t mis pour l'obtenir ; par exemple, le sommet de la surface piézométrique, après avoir franchi le fond du labour, doit s'abaisser de 0,25 m en un jour.

Ainsi, le premier membre des relations (3) a une valeur connue. Sur l'axe des ordonnées de l'abaque, ce premier membre que nous désignons par F remplace I/K (fig. 3). Mais n'ayant pas la valeur de $\sigma_n = \delta/h_n$, nous ne pouvons obtenir la valeur correspondante de ρ_n . Toutefois nous aurons la valeur de ρ_n à partir de $\sigma_m = \delta/h_m$. Voyons si cette valeur de ρ_m convient pour le calcul de l'écartement.

Les figures 3 et 4 montrent que, pour une même valeur de F : ρ_m est $>$ à ρ_n si h_m est $>$ à h_n et ρ_m est $<$ à ρ_n si h_m est $<$ à h_n . Par conséquent, les deux rapports $L_m = h_m/\rho_m$ et $L_n = h_n/\rho_n$ doivent être, numériquement, peu différents.

De cette constatation il résulte qu'on peut, avec l'abaque notamment, calculer la valeur de l'écartement des drains ou des fossés, en régime de tarissement non influencé par les pluies, comme s'il s'agissait du régime permanent, mais, cette fois, avec les données F et h_m au lieu de I/K et h_0 . Les comparaisons de la section 3 suivante, contribueront à justifier ce mode de calcul.

* Dans les sols sédimentaires cultivés, la porosité de drainage est généralement comprise entre 0,01 et 0,05.

* L'expression (2) est directement intégrable si le rapport ρ reste compris entre 0,08 et 0,15 (Cf. section 3).

3. Calcul de l'écartement des drains.

REMARQUE

Le tableau 1 ci-après est établi en considérant les valeurs que prend la profondeur équivalente réduite λ' , lorsque la hauteur $h(t)$ passe de 0,75 m à 0,50 m durant le tarissement non influencé (données extérieures). On constate que les écarts des valeurs de $\lambda'(\rho, \lambda)$ par rapport à la moyenne λ'_m sont faibles, notamment pour les petites valeurs de λ . Il en résulte, tout au moins avec les données $h_0 = 0,75$ m, et

4. $h_m > h_n \rightarrow \rho_m > \rho_n$
 $h_m < h_n \rightarrow \rho_m < \rho_n$

$h(t) = 0,50$ m, qu'on peut calculer le temps de rabattement correspondant, avec la formule intégrée (section 3), bien que le rapport ρ soit inférieur à 0,08 (c'est l'effet réducteur du terme $0,014 \ln \rho$, dans l'expression de λ'_∞ qui, en particu-

lier, amenuise la valeur de l'écart $\Delta \lambda'_\infty : \Delta \lambda'_\infty = \left| \frac{d\lambda'_\infty}{d\rho} \right| \Delta \rho$

$$0,014 \frac{\Delta \rho}{\rho} = 0,014 \frac{\Delta h_m}{h_m} = 0,014 \times \frac{0,125}{0,625} = 0,0028.$$

III ■ QUELQUES EXEMPLES DE COMPARAISON DES VALEURS DES HAUTEURS h_n et h_m

De manière à être en mesure de calculer facilement la valeur de la hauteur h_n , nous nous placerons, d'abord, dans le cas où la profondeur δ' reste constante, c'est-à-dire lorsque ρ est

Tableau 1. — Variations de λ' .

L (m)	δ (m)	λ	h (m)	ρ	λ' _∞	λ'	λ' _{moy}	Ecart %
10	0,5	0,05	0,75 0,50	0,075 0,050	0,144 0,138	0,0458 0,0455	0,04565	0,33
	2,0	0,20	0,75 0,50	0,075 0,050	0,144 0,138	0,1046 0,1016	0,1031	1,45
15	1,0	0,067	0,75 0,50	0,050 0,0333	0,138 0,132	0,0570 0,0564	0,0567	0,53
	3,0	0,20	0,75 0,50	0,050 0,0333	0,138 0,132	0,1016 0,0986	0,1001	1,50
20	1,0	0,05	0,75 0,50	0,0375 0,025	0,134 0,128	0,0452 0,0448	0,0450	0,44
	4,0	0,20	0,75 0,50	0,375 0,025	0,134 0,128	0,0996 0,0965	0,09805	1,58
30	2,0	0,0667	0,75 0,50	0,0250 0,0167	0,128 0,123	0,0559 0,0552	0,05555	0,63
	5,0	0,1667	0,75 0,50	0,0250 0,0167	0,128 0,123	0,0910 0,0887	0,08985	1,28
40	2,0	0,05	0,75 0,50	0,0188 0,0125	0,124 0,119	0,0446 0,0442	0,0444	0,45
	6,0	0,15	0,75 0,50	0,0188 0,0125	0,124 0,119	0,0858 0,0836	0,0847	1,30

compris entre 0,15 et 0,08 [2]. La relation (2), est, en effet, intégrable [1] :

$$t = \frac{\bar{\mu}NL^2}{K\delta'} \ln \frac{h_0(h+2\delta')}{h(h_0+2\delta')} \quad (4)$$

Avec les données suivantes : hauteur $h(0) = 1,00$ m (drains à 1,25 m de profondeur), $L = 10$ m, $\delta = 1,50$ m, $\bar{\mu} = 0,03$, $K = 0,50$ m/jour, on obtient : $\rho_0 = 0,10$, $\lambda'_\infty = 0,145$, $\lambda = 0,15$, $\lambda' = 0,094$, $\delta' = 0,94$ m.

Sur le tableau 2 figurent les valeurs du temps t calculées pour plusieurs valeurs de la hauteur h .

Tableau 2. — $t(h)$.

h (mètre)	t (jour)	t (heures)
1,00	0,000	0,00
0,95	0,093	2,23
0,90	0,192	4,61
0,85	0,299	7,18
0,80	0,415	9,96

A partir de ce tableau, le graphe $h(t)$ a été tracé, figure 5.

5. $h(t)$.

La relation (3) déduite du théorème des accroissements finis, permet de calculer la valeur de h_n lorsque la hauteur h varie de $h_0 = 1,00$ m à $h = 0,80$ m, en un temps égal à 0,415 jour (tableau) :

$$\frac{2\bar{\mu}NL^2}{K} \frac{h_0 - h}{t} = h_n^2 + 2h_n\delta' \quad (5)$$

$$h_n^2 + 1,88 h_n - 2,487 = 0 \rightarrow h_n = 0,896 \text{ m}$$

Cette valeur de h_n est très sensiblement égale à celle de la hauteur moyenne $h_m = 0,90$ m.

On remarquera sur la figure 5 la faible concavité de la courbe $h(t)$ entre zéro et dix heures.

Prenons un second exemple en modifiant seulement la valeur de la profondeur δ . L'expression du temps de rabattement t est encore applicable et on obtient, avec $\delta = 0,50$ m au lieu de 1,50 m : $\lambda = 0,05$, $\lambda' = 0,0458$, $\delta' = 0,458$ m et $t = 0,636$ jour pour un rabattement de $h_0 - h = 1,00 \text{ m} - 0,80 \text{ m}$. Calculons, maintenant, la hauteur h_n correspondant à ce rabattement ; avec l'expression (5) il vient l'équation du second degré :

$$h_n^2 + 2 \times 0,458 h_n - 1,6225 = 0$$

$$h_n = 0,896 \text{ m}$$

Comme précédemment, la valeur de h_n est pratiquement la même que celle de h_m .

Le fait, que, dans les exemples précédents, les hauteurs h_n et h_m soient pratiquement équivalentes, nous incite à appliquer la relation :

$$\frac{2\bar{\mu}N}{K} \frac{\Delta h}{\Delta t} \simeq \rho_m^2 + 2\rho_m\lambda'_m (\rho_m\lambda) = F,$$

à de petites hauteurs successives Δh comme indiqué au tableau 3 ci-dessous. Les données sont les suivantes : $L = 15$ m, $\delta = 2$ m, $\bar{\mu} = 0,03$, $K = 0,60$ m/j, $h_0 = 1,00$ m, $\Delta h = 0,05$ m. Le rapport ρ est inférieur à 0,08.

Par cette méthode de calcul, nous voyons que le temps nécessaire à un rabattement de $1,00 \text{ m} - 0,70 \text{ m} = 0,30 \text{ m}$ est, théoriquement, de 1 jour.

Le calcul de h_n s'effectue, par approximations successives, à partir de la relation :

$$\frac{2\bar{\mu}N}{K} \frac{h_0 - h}{t} = \rho_n^2 + 2\rho_n\lambda'_n (\rho_n\lambda).$$

$$\frac{2 \times 0,03 \times 0,43 \times 0,30}{0,60 \times 0,997} = 0,129 = \rho_n^2 + 2\rho_n\lambda'_n$$

On trouve $\rho_n = 0,0560$; c'est-à-dire $h_n = 0,056 \times 15 = 0,84$ m, soit, à 1 cm près, la hauteur moyenne $h_m = 0,85$ m.

Si nous avions calculé l'écartement des drains avec l'abaque ($h_m = 0,85$ m, $\delta/h_m = 2,35$, $t = 1$ jour, nous aurions obtenu :

$$F = 0,129 \rightarrow \sigma = 2,35 \rightarrow \rho_m = 0,056, (= \rho_n)$$

$$L_m = 0,85 / 0,056 = 15,2 \text{ m} \sim 15 \text{ m}$$

Tableau 3. — $h(t)$.

h (m)	$h - \Delta h$ (m)	h_m (m)	ρ_m	λ'_∞	λ'	F	Δt jour	t jour
1,00	0,95	0,975	0,06500	0,1417	0,0880	0,01567	0,1372	0
0,95	0,90	0,925	0,06167	0,1410	0,0878	0,01463	0,1469	0,1372
0,90	0,85	0,875	0,05833	0,1402	0,0875	0,01361	0,1579	0,2841
0,85	0,80	0,925	0,05500	0,1394	0,0873	0,01263	0,1702	0,4420
0,80	0,75	0,775	0,05167	0,1385	0,0870	0,01166	0,1844	0,6122
0,75	0,70	0,725	0,04833	0,1376	0,0867	0,01071	0,2007	0,7966
0,70								0,9973

IV ■ CONCLUSION

L'abaque cartésien, à échelles de coordonnées logarithmiques, très simple d'utilisation grâce à la variable auxiliaire σ , apporte une solution satisfaisante, pratiquement, au calcul de l'écartement des drains enterrés ou des fossés, lorsqu'on considère le régime de tarissement non influencé par les pluies. Bien entendu, le résultat est moins précis que dans le cas du régime permanent [3] en raison de l'hypothèse simplificatrice concernant le facteur de forme de la surface piézométrique, encore que ce facteur n'ait pas d'incidence importante sur la valeur de l'écartement des drains [1]. D'ailleurs, dans la littérature étrangère, figurent des expressions qui ne tiennent pas compte de la courbure, pourtant obligée, de la ligne piézométrique (pertes de charge subies par l'écoulement vers le drain). Avec cette simplification commode, la ligne piézométrique est une droite horizontale* et tout se passe comme si la nappe s'écoulait dans le substratum et là seulement... A l'opposé de cette hypothèse, Lesaffre, dans sa remarquable thèse de doctorat [4], considère que le facteur de forme C est fonction non seulement de l'abscisse réduite X mais également du temps t . Cette hypothèse apporte une solution au calcul des coefficients de forme de la surface piézométrique mais dans le cas d'un sol homogène et en présence d'une profondeur équivalente δ' constante durant le rabattement. De toute manière, sur le plan pratique du calcul de l'écartement des drains, l'incidence de la forme de la surface piézométrique étant réduite, la méthode approchée proposée ici suffit à notre avis.

* Avec notre théorie, dans ce cas : $C(X) = 1$ et $N = 0,50$.

Précisons, pour terminer, que ce n'est pas la première fois que nous préconisons l'expression (2) de la vitesse de rabattement du sommet de la nappe pour le calcul de l'écartement des drains. C'est, entre autres plus anciennes, le cas de la publication récapitulative [1] du CEMAGREF. L'originalité de la présente note consiste à introduire dans les calculs la nouvelle expression « arc tg » de la profondeur équivalente avec son asymptote déduite de la méthode de l'hodographe [2], et de justifier l'adoption de l'expression F et de la hauteur moyenne h_m au moyen du théorème classique des accroissements finis.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] GUYON G. (1981). — Hydraulique des nappes de sols drainés. *Bull techn de génie rural* n° 127. CEMAGREF Antony (92), 93 p.
- [2] GUYON G. (1995). — Hydraulique du drainage Une formule de la profondeur équivalente. *La Houille Blanche* 7/95, pp. 38-41.
- [3] GUYON G. (1996). — Hydraulique du drainage. Application de la formule « arc tg » de la profondeur équivalente au drainage d'un sol hétérogène verticalement. *La Houille Blanche* 3/96, pp. 12-15.
- [4] LESAFFRE B. (1988). — *Fonctionnement hydrologique et hydraulique du drainage souterrain des sols temporairement engorgés*. Thèse de doctorat, Université Paris VI, CEMAGREF Série hydraulique agricole n° 4, 334 p.
- [5] LESAFFRE B. (1990). — *Field measurement of saturated hydraulic conductivity and drainage porosity using Guyon's test*. ASAE, vol. 31 (1), January-February 1990.