Note sur l'application de la formule de Bernoulli aux courants liquides

par Fernand CAMPUS, *Ingénieur A. I. Lg. et A. I. M., Professeur à l'Université de Liége*
et Albert SCHLAG, *Ingénieur A. I. Lg. et A. I. M., Chargé de cours à l'Université de Liége*

La formule de Bernoulli se déduit de l'application des équations générales d'Euler, au cas particulier des liquides pesants. Il en résulte immédiatement que, en raison même des hypothèses faites au cours de la démonstration de ces équations, la formule de Bernoulli ne peut s'appliquer *qu'à un même filet liquide*, c'est-à-dire aux points situés sur la trajectoire d'une même particule, qu'il s'agisse de la trajectoire *réelle*, ainsi que cela résulte directement des équations d'Euler ou de la trajectoire *dans le mouvement moyen local*, comme l'a démontré M. Boussinesq dans son *Essai sur la théorie des eaux courantes*.

On n'est donc pas en droit d'appliquer la formule de Bernoulli à l'ensemble d'une masse liquide en mouvement ; le terme relatif à l'énergie cinétique doit notamment, comme nous allons le voir, être affecté d'un facteur correctif. On sait, en effet, que la quantité de mouvement et l'énergie vive d'une masse liquide dont les particules possèdent des vitesses différentes, sont supérieures à celles qu'on déterminerait en utilisant la vitesse moyenne U. On démontre que la quantité de mouvement

$$\rho \int_{\omega} u^2 \cdot d\omega = (1 + \eta)\, \rho\, U^2\, \omega$$

et que la force vive

$$\rho \int_{\omega} u^3 \cdot d\omega = \alpha \cdot \rho\, U^3\, \omega$$

η étant toujours positif et α étant toujours plus grand que l'unité et approximativement égal à $1 + 3\,\eta$. En pratique, on prend souvent

$$\eta = 0{,}037 \quad \text{et} \quad \alpha = 1{,}11 \quad \text{soit } 10/9$$

Il règne dans la littérature technique, une grande confusion sur le point de savoir s'il faut introduire le facteur $(1 + \eta)$ ou le facteur α dans l'expression de la formule de Bernoulli étendue à une masse liquide tout entière.

Certains auteurs appliquent tout simplement la formule de Bernoulli sous sa forme initiale, à la masse entière, l'altitude z étant celle du centre de gravité de la section normale aux filets (que nous appellerons dans ce qui suit, *section transversale*), la pression et la vitesse étant la pression et la vitesse moyennes, et le terme relatif à l'énergie cinétique n'étant affecté *d'aucun* facteur de correction.

D'autres, comme Eydoux *(Hydraulique générale et appliquée)* et Forchheimer *(Hydraulik)* écrivent, — justement pour les cas de la pratique, mais sans insister sur une explication :

$$\frac{\alpha\, U^2}{2g} + \frac{p}{\varpi} + Z = \text{Constante},$$

où Z est la cote du centre de gravité de la section transversale, U et p la vitesse et la pression moyennes.

Quant à Mouret, dans son *Cours d'Hydraulique* autographié (1913-14) de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, il détermine l'énergie mécanique totale du courant liquide par unité de poids

$$\frac{\alpha\, U^2}{2g} + \frac{1}{\varpi\, Q} \int p\, d\, Q + z_1$$

dans laquelle z_1 est l'ordonnée du centre de gravité. Il déduit de cette expression la forme du théorème de Bernoulli applicable aux courants liquides, en vertu du principe de la conservation de l'énergie.

Enfin, Flamant (*Hydraulique*, pp. 38 et suivantes de la 3[e] édition) introduit le facteur $(1 + \eta)$ au lieu de α dans son équation générale du mouvement permanent. Flamant suppose un courant liquide défini par le parallélisme à peu près parfait des vitesses individuelles des divers filets ; il peut ainsi mettre la première équation d'Euler sous la forme :

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = g \cdot \sin I - F - u'$$

F, terme tenant compte des frottements, disparaît dans le cas d'un liquide parfait ; d'autre part, Flamant démontre que $\dfrac{dp}{dx}$ est constant dans une même section transversale et égal à $\dfrac{dp_0}{dx}$; il en résulte que u' ou $u\dfrac{du}{dx}$ doit également être constant dans la section. La vitesse variant sans discontinuité dans la section transversale, il existe un point où la vitesse réelle est précisément égale à la vitesse moyenne U, donc :

$$\frac{d\,(u^2)}{dx} = \frac{d\,(U^2)}{dx}$$

et l'équation devient :

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dp_0}{dx} = g \cdot \sin I - \frac{d\,U^2)}{dx}$$

Or, l'équation finale qu'établit Flamant est, dans l'hypothèse d'un liquide parfait,

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dp_0}{dx} = g \cdot \sin I - (1 + \eta)\, \frac{d\,(U^2)}{dx}$$

Comme η est différent de 0, si la vitesse n'est pas identique en tous les points d'une section, il faut en conclure que

$$\frac{d\,(U^2)}{dx} = 0, \quad \text{ou} \quad U\,\frac{dU}{dx} = 0 \quad \text{ou encore} \quad \frac{dU}{dx} = 0,$$

c'est-à-dire que *le mouvement doit être uniforme*, dans l'hypothèse faite par Flamant, d'un écoulement par filets parallèles.

La formule finale qu'on appliquerait à l'écoulement d'un courant en général, serait donc entachée d'une erreur.

L'auteur allemand J.-F. Bubendeg écrit également

$$\alpha = 1 + \eta$$

De ce qui précède, on peut conclure que la question vaut la peine d'être examinée soigneusement.

Soit donc un liquide parfait en mouvement.

L'équation de Bernoulli pourra être appliquée à chaque filet, entre deux sections 1 et 2.

$$z_1 + \frac{p_1}{\varpi} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\varpi} + \frac{u_2^2}{2g}$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par le débit du filet, $u_1 \cdot d\omega_1 = u_2 \cdot d\omega_2$ et intégrons à tous les filets :

$$\int_{\omega_1} z_1\, u_1\, d\omega_1 + \frac{1}{\varpi}\int_{\omega_1} p_1\, u_1\, d\omega_1 + \frac{1}{2g}\int_{\omega_1} u_1^3 \cdot d\omega_1$$

$$= \int_{\omega_2} z_2\, u_2\, d\omega_2 + \frac{1}{\varpi}\int_{\omega_2} p_2\, u_2\, d\omega_2 + \frac{1}{2g}\int_{\omega_2} u_2^3 \cdot d\omega_2 .$$

$\int_{\omega} z\, u\, d\omega$ représente le moment par rapport au plan d'origine des z, de la surface ω, en chaque point de laquelle on supposerait exister une densité massique proportionnelle à u. Z étant le centre de gravité de cette surface ainsi chargée,

$$\int_{\omega} z \cdot u \cdot d\omega = Z\, U\, \omega .$$

$\int_{\omega} p\, u\, d\omega$ peut aussi se représenter par $PU\omega$, P étant en vertu du deuxième principe de la moyenne (1), une valeur intermédiaire entre les pressions maximum et minimum dans la surface ω. P est donc la pression *réelle* régnant en un certain point de la surface.

Enfin,

$$\int_{\omega} u^3 \cdot d\omega = \alpha\, U^3\, \omega$$

Le théorème de Bernoulli devient ainsi :

$$Z_1\, U_1\, \omega_1 + \frac{P_1}{\varpi}\, U_1\, \omega_1 + \frac{\alpha}{2g}\, U_1^3\, \omega = Z_2\, U_2\, \omega_2 + \frac{P_2}{\varpi}\, U_2\, \omega_2 + \frac{\alpha}{2g}\, U_2^3\, \omega_2$$

ou en divisant par le débit total

$$U_1\, \omega_1 = U_2\, \omega_2$$

$$Z_1 + \frac{P_1}{\varpi} + \alpha\frac{U_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\varpi} + \alpha\frac{U_2^2}{2g} = \text{Constante}$$

(1) Si dans l'intervalle (a, b), la fonction $F(x)$ n'est jamais négative ni constamment nulle, et si la fonction $\varphi(x)$ a pour valeur maximum M et pour valeur minimum m, on a :

$$\int_a^b \varphi(x)\, F(x)\, dx = \mu \int_a^b F(x)\, dx$$

μ désignant un certain nombre compris entre M et m.

Cas particuliers

I. *La pression varie hydrostatiquement dans la section transversale.* — Si nous désignons par p_0 la pression à l'altitude $z = 0$,

$$p = p_0 - z\,\varpi$$

et le deuxième terme de l'équation devient :

$$\int_{\omega} p \cdot u \cdot d\omega = \int_{\omega} (p_0 - z\,\varpi)\, u \cdot d\omega = p_0\, U\, \omega - \varpi\, Z\, U\, \omega$$

$$= (p_0 - \varpi Z)\, U\, \omega = P \cdot U \cdot \omega$$

P étant ici la pression au point d'altitude Z, c'est-à-dire au centre de gravité de la surface ω chargée comme nous l'avons indiqué plus haut.

Si du reste la pression varie hydrostatiquement, la somme $z + \frac{p}{\varpi}$ est la même en tous les points de la section.

Ce cas sera en particulier celui qui se rencontre dans l'étude des courants, soit en conduites forcées, soit en canaux ouverts. L'équation de Bernoulli s'écrira alors :

$$z + \frac{p}{\varpi} + \alpha\frac{U^2}{2g} = \text{Constante}$$

z *et* p *se rapportant à un même point quelconque de la section transversale*, soit son centre de gravité géométrique, soit un point de la surface libre, soit un point pris sur le fond du lit, etc.

II. *Les vitesses et les pressions sont distribuées symétriquement par rapport à un axe horizontal situé dans la section transversale.* — On voit aisément que dans ce cas, Z est l'altitude de cet axe horizontal, c'est-à-dire dans ce cas du centre de gravité géométrique de la section, tandis que P est la pression en un certain point de la section, qui n'est pas mieux défini que dans le cas général.

C'est le cas des conduites *verticales*, circulaires, rectangulaires, etc.

***

En conclusion, l'affirmation de Ph. Forchheimer que « dans les mouvements rotationnels, le théorème de Bernoulli s'applique aux différents filets, mais non pas à l'ensemble du courant » est ambiguë. On peut exprimer au contraire, que, abstraction faite des résistances des parois, si le théorème de Bernoulli s'applique aux différents filets, il s'applique aussi à l'ensemble du courant, par intégration se rapportant non aux sections élémentaires $d\omega$ des filets, mais à leurs débits élémentaires $u.\, d\omega$ Il est donc bien évident aussi que le terme $\frac{U^2}{2g}$ doit être affecté du coefficient $\alpha = 1 + 3\,\eta$ et non du facteur $(1 + \eta)$.