

CALCUL GRAPHIQUE DES RÉGIMES VARIABLES DANS LES CANAUX

(SUITE)

A. CRAYA

Ancien élève de l'École Polytechnique

III. — CAS OU LES BERGES NE SONT PAS VERTICALES

Nous avons dans ce qui précède plus spécialement supposé le canal à berges verticales dans la zone où le niveau varie.

Cette limitation si elle était essentielle exclurait évidemment un certain nombre de problèmes pratiques très intéressants; nous allons voir cependant qu'il n'en est rien et qu'il est facile d'étendre convenablement aux canaux à berges inclinées les raisonnements et les méthodes qui précèdent.

Pour cela nous distinguerons encore les canaux prismatiques des canaux à section variable.

I. — CANAUX PRISMATIQUES

Canal horizontal sans pertes de charge

1° Nous avons étudié au début de cette étude les conditions de propagation vers l'aval ou vers l'amont d'une onde élémentaire.

Ces conditions imposées par le théorème des quantités de mouvement et la continuité du débit étaient :

$$\begin{cases} a \Delta U = g \Delta h \\ \omega \Delta U = a \Delta \omega \end{cases}$$

Il est clair que jusqu'en ce point, notre raisonnement n'imposait aucune restriction à la forme de la section.

On en déduit par combinaison :

$$\begin{cases} a^2 = \frac{g \omega}{b} \\ \Delta U = \sqrt{\frac{g}{b \omega}} \Delta \omega \end{cases}$$

Rien n'est donc changé à la célérité de l'onde qui demeure $\sqrt{g h'}$ ($h' = \frac{\omega}{b}$ hauteur moyenne); seule la relation complémentaire d'équilibre ne peut plus être écrite sous la forme simple antérieure $\Delta(U - 2V) = 0$.

On a en effet :

$$\sqrt{\frac{g}{b \omega}} d\omega = \sqrt{\frac{g}{h'}} \frac{d\omega}{b} = \sqrt{\frac{g}{h'}} dh' \frac{dh'}{dh'} = 2 \frac{dh}{dh'} d\sqrt{g h'} \quad (1)$$

et dès lors que les berges ne sont pas verticales on n'a plus $dh = dh'$; autrement dit le fond du canal rectangulaire équivalent n'est plus indépendant du niveau.

D'ailleurs en une section donnée h et h' sont fonction l'un de l'autre et le canal étant prismatique cette fonction est indépendante de l'abscisse x ; la différentielle (1) peut donc aussi s'écrire :

$$2 \frac{dh}{dh'} d\sqrt{gh'} = 2 f(\sqrt{gh'}) d\sqrt{gh'} = 2 dF(V)$$

en appelant encore V la célérité $\sqrt{gh'}$.

Ainsi la loi d'une onde descendant le courant s'écri: maintenant :

$$d[U - 2F(V)] = 0$$

où la fonction $F(V)$ est virtuellement donnée avec la forme de la section.

On a de même pour une onde remontant le courant :

$$d[U + 2F(V)] = 0$$

2° A partir des lois d'une onde élémentaire nous avons précédemment analysé celles d'un train d'ondes, puis celles d'un régime variable quelconque; on voit aisément que rien n'est à changer à ces raisonnements et qu'on en déduit les règles suivantes (caractéristiques) :

Observateur descendant le courant avec une onde :

$$\frac{dx}{dt} = U + V \qquad U + 2F(V) = \text{Cte}$$

Observateur remontant le courant avec une onde :

$$\frac{dx}{dt} = U - V \qquad U - 2F(V) = \text{Cte}$$

3°. La traduction graphique de ces lois fait encore naturellement appel aux plans (UV) et (xt) .

La seule différence est que les caractéristiques sur le plan UV ne sont plus rectilignes; ce sont les courbes $U - 2F(V) = \text{Cte}$ et $U + 2F(V) = \text{Cte}$ qui résultent, toutes par translation parallèlement à OU de la courbe $U = 2F(V)$ et de sa symétrique $U = -2F(V)$; il n'y a là aucune complication car cette courbe peut être tracée une fois pour toutes sur un transparent auxiliaire.

D'ailleurs si les variations de niveau ne sont pas très considérables, on peut remplacer la courbe par sa tangente dans cette région, de sorte qu'on pourra parfois conserver la commodité des caractéristiques rectilignes à ceci près que leur pente au lieu d'être $\frac{1}{2}$ sera désormais $\frac{1}{2K}$ où K est une valeur locale de $\frac{dh}{dh'}$.

L'expression du coefficient K s'obtient aisément en différenciant $h' = \frac{\omega}{b}$

$$dh' = \frac{b d\omega - \omega db}{b^2} = dh - \frac{h'}{b} db$$

Nous pouvons poser (fig. 23)

$$\frac{db}{dh} = \text{tg } \alpha_1 + \text{tg } \alpha_2 = \rho$$

$$\text{Il vient alors : } K = \frac{1}{1 - \rho \frac{h'}{b}}$$

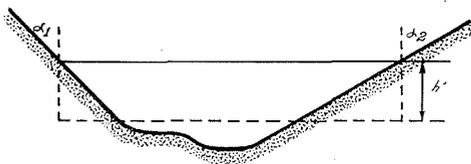


FIGURE 23

Considérons à titre d'exemple le cas d'un canal trapézoïdal (fig. 24)

$$\text{On a : } \omega = \frac{\rho z^2 - \rho a^2}{2} \text{ d'où } h' = \frac{\omega}{b} = \frac{1}{2} \left(z - \frac{a^2}{z} \right)$$

$$\frac{dh'}{dz} = \frac{1}{K} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a^2}{z^2} \right) \text{ soit } K = \frac{2}{1 + \frac{a^2}{z^2}}$$

On vérifie aisément (fig. 24 où $OB = a$) que l'on peut écrire aussi :

$$K = 1 + \sin 2\beta$$

Ces relations permettent d'apprécier l'influence de K et d'en effectuer le calcul en fonction du niveau; on pourrait en déduire aussi la fonction $F(V)$.

On remarquera enfin que tout canal où les berges conservent une inclinaison constante dans la zone de variation du niveau peut être remplacé par un canal trapézoïdal équivalent.

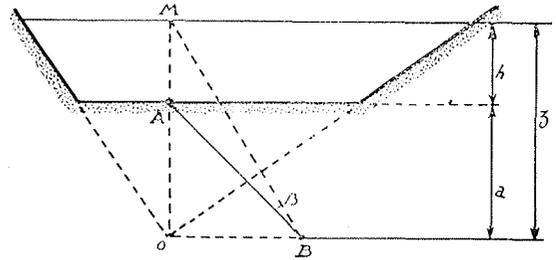


FIGURE 24

Influence de la pente du fond et des pertes de charge

Nous suivrons une marche entièrement analogue à celle du chapitre II.

Commençant par l'étude de la pente, nous écrirons donc d'abord les conditions de passage d'un régime permanent au-dessus d'un petit décrochement du fond (fig. 12).

Ces conditions sont données comme on l'a vu par le théorème de Bernoulli et l'équation de continuité, c'est-à-dire par :

$$\begin{cases} \Delta \left(z + \frac{U^2}{2g} \right) = 0 \\ \Delta (\omega U) = 0 \end{cases}$$

En désignant encore par y l'altitude du fond et h la hauteur d'eau, on a : $z = y + h$ soit :

$$\begin{cases} \Delta h + U \frac{\Delta U}{g} = -\Delta y \\ U \Delta \omega + \omega \Delta U = 0 \end{cases}$$

Mais ici nous ne pouvons plus confondre la variation de hauteur avec celle de la hauteur moyenne; nous remplacerons par conséquent Δh par $\frac{\Delta \omega}{b}$ et résolvant le système précédent en $\Delta \omega$ et ΔU nous obtiendrons :

$$\Delta U = -g \Delta y \frac{U}{U^2 - g \frac{\omega}{b}} \qquad \Delta \omega = g \Delta y \frac{\omega}{U^2 - g \frac{\omega}{b}}$$

En écoulement variable le croisement de deux régimes au droit du décrochement donnera naissance à deux ondes se propageant respectivement vers l'amont et vers l'aval (fig. 17).

Un observateur descendant le courant rencontrera donc d'abord l'onde adverse (passage de M_1 à M) et ce changement s'effectue sur la courbe $U + 2F(V) = Cte$; puis franchissant le décrochement il constatera une variation de ΔU et ΔV conforme aux lois des régimes permanents (passage de M à M'); il observera donc en définitive une translation de sa caractéristique en palier égale à :

$$\Delta \left[U + 2F(V) \right] = \Delta U + \sqrt{\frac{g}{b \omega}} \Delta \omega = -\frac{g \Delta y}{U + \sqrt{\frac{g \omega}{b}}}$$

Pareillement l'observateur remontant le courant notera :

$$\Delta \left[U - 2F(V) \right] = \Delta U - \sqrt{\frac{g}{b \omega}} \Delta \omega = \frac{g \Delta y}{U - \sqrt{\frac{g \omega}{b}}}$$

Passant de là à une distribution de plus en plus dense de décrochements nous aboutissons à la limite, à la généralisation des résultats antérieurs, savoir :

Caractéristiques des observateurs descendant le courant :

$$d[U + 2F(V)] = + g i dt$$

Caractéristiques des observateurs remontant le courant :

$$d[U - 2F(V)] = + g i dt$$

Enfin en ce qui concerne les pertes de charge il n'y a rien à changer aux résultats qui ont été précédemment établis. Les caractéristiques pour un canal prismatique quelconque deviennent en définitive :

Observateurs descendant le courant :

$$d[U + 2F(V)] = g \left(i - \frac{\lambda U^2}{g R} \right) dt$$

Observateurs remontant le courant :

$$d[U - 2F(V)] = g \left(i - \frac{\lambda U^2}{g R} \right) dt$$

La méthode d'étude graphique ne subit elle-même aucun changement substantiel; comme précédemment il y aura lieu de tracer à l'avance les courbes d'égal $\text{tg } \varphi$, c'est-à-dire $\frac{\lambda U^2}{g R} = \text{Cte}$ qui ne sont des droites issues de l'origine que pour un canal infiniment large.

II. — CANAUX DE SECTION VARIABLE

Caractéristiques dans le cas général

Les étapes successives qui précèdent nous amènent finalement au cas le plus général, c'est-à-dire à un canal de section quelconque et variable; au point de vue théorique nous aurions pu aborder d'emblée ce cas général; nous verrons cependant qu'il est beaucoup moins maniable en pratique et cette circonstance, jointe à l'avantage de la clarté, justifie la marche plus progressive adoptée même au prix de quelques répétitions.

La première étape du raisonnement demeure l'étude de la propagation d'une petite onde dans un canal prismatique; il n'y a pas à revenir sur ces lois que nous rappelons ci-après :

Ondes descendant le courant : $\Delta U - \sqrt{\frac{g}{b \omega}} \Delta \omega = 0$

Ondes remontant le courant : $\Delta U + \sqrt{\frac{g}{b \omega}} \Delta \omega = 0$

Ceci fait, il faut examiner l'influence sur la propagation d'ondes d'une discontinuité élémentaire de la section : il n'y a plus lieu ici d'ailleurs de séparer l'effet de pente du fond du changement de forme, et nous considérerons d'emblée un décrochement avec changement de section (fig. 25).

La loi de passage d'un régime permanent demeure :

$$\begin{cases} \Delta \left(z + \frac{U^2}{2g} \right) = 0 \\ \Delta (\omega U) = 0 \end{cases}$$

Mais Δz n'est plus lié directement à l'augmentation de section, et pour exprimer cette variation, nous sommes amenés à introduire (fig. 25) le niveau N'_2 qui sur la section 2 découpe la même aire ω que le niveau N_1 sur la section 1.

On a alors : $\Delta z = \overline{N_1 N_2} = \overline{N_1 N'_2} + \overline{N'_2 N_2}$

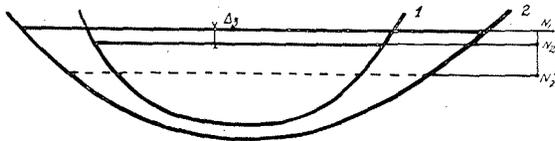


FIGURE 25

On appellera $\Delta \zeta$ le terme $\overline{N_1 N'_2}$ et quant à $\overline{N'_2 N_2}$, ce n'est autre que $\frac{\Delta \omega}{b}$.

Avec cette précision les équations des régimes permanents s'écrivent comme précédemment :

$$\begin{cases} \frac{\Delta \omega}{b} + \frac{U \Delta U}{g} = -\Delta \zeta \\ U \Delta \omega + \omega \Delta U = 0 \end{cases}$$

On en déduit encore les variations ΔU et $\Delta \omega$ et par combinaison ce que notent les observateurs traversant le décrochement en régime variable :

$$\Delta U + \sqrt{\frac{g}{b \omega}} \Delta \omega = -\frac{g \Delta \zeta}{U + \sqrt{\frac{g \omega}{b}}} \quad \Delta U - \sqrt{\frac{g}{b \omega}} \Delta \omega = \frac{g \Delta \zeta}{U - \sqrt{\frac{g \omega}{b}}}$$

On passe ensuite de là à une série de tels décrochements d'où résultent les lois des caractéristiques :

Observateurs descendant le courant :

$$dU + \sqrt{\frac{g}{b \omega}} d\omega = g \eta dt$$

Observateurs remontant le courant :

$$dU - \sqrt{\frac{g}{b \omega}} d\omega = g \eta dt$$

Dans ces formules η est la pente du niveau fictif qui découpe dans le canal une section constante égale à la section locale ω .

On remarquera qu'il n'est plus possible ici de remplacer $\sqrt{\frac{g}{b \omega}} \Delta \omega$ par $\Delta F(\omega)$ parce que b est fonction non seulement de ω mais aussi de x . Dans le cas des berges verticales nous avons donné une variante des caractéristiques qui, elle aussi, ne s'étend pas complètement au cas général; il faut donc reconnaître que la variable $V = \sqrt{gh'}$ perd désormais de ses avantages et qu'on peut sans inconvénient lui substituer par exemple $Z = \log \omega$.

On peut étendre sans difficulté le principe de la représentation graphique précédente aux plans (xt) et (UZ) ; seulement il s'agit bien souvent d'une représentation, car la part du calcul numérique auxiliaire devient très importante.

Le problème élémentaire reste la recherche de l'état résultant de deux régimes donnés et il se résout encore par la rencontre des deux observateurs partant du lieu et à l'instant où ils se produisent.

Celui qui descend le courant par exemple observe :

$$\Delta U + \sqrt{\frac{g \omega}{b}} \Delta Z = g \left(\eta - \frac{\lambda U^2}{g R} \right) \Delta t$$

Dans le plan (UZ) cette équation représente une droite de coefficient angulaire $-\frac{1}{V}$ passant par un point déduit du point $(U_A Z_A)$ par une translation $g \left(\eta - \frac{\lambda U^2}{g R} \right) \Delta t$ parallèlement à OU ; la célérité V est une fonction de Z qui varie avec chaque section, et il convient comme travail de préparation initial de calculer des tableaux ou des graphiques de ces fonctions.

On voit donc que, dans le cas d'une section quelconque et variable, la complication et la longueur du calcul s'accroissent considérablement; il faut ajouter que parallèlement la validité des hypothèses de base (ondes planes, absence de courbures, etc...) devient plus problématique.

IV. — CONDITIONS AUX LIMITES

Dans tout problème d'écoulement variable on peut distinguer le canal où sont véhiculées les ondes obéissant aux lois précédentes, et ses extrémités où ces ondes sont produites, réfléchies ou transformées.

Comme pour la théorie du coup de bélier il serait donc désirable de compléter l'étude des caractéristiques des ondes par celles des principales singularités qu'elles peuvent rencontrer; leur étude systématique se présente malheureusement de façon moins simple que pour les conduites, et pour plusieurs d'entre elles fait appel à l'hydraulique expérimentale; nous nous limiterons donc dans ce qui suit à l'examen de quelques cas simples et à des canaux rectangulaires.

BASSIN TRÈS LARGE

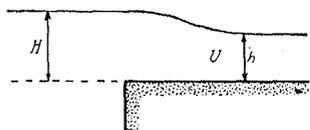
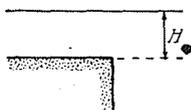


FIGURE 26



Pour une alimentation par un bassin très vaste et en admettant qu'il n'y a pas de perte à l'entrée on a (fig. 26) :

$$h + \frac{U^2}{2g} = H$$

c'est-à-dire :

$$U^2 + 2V^2 = 2V_0^2 \quad \text{où} \quad V_0 = \sqrt{gH}$$

Cette relation est représentée sur le plan UV par une ellipse d'axes V_0 suivant OV et $V_0\sqrt{2}$ suivant OU .

Si l'on introduit une perte à l'entrée de la forme $k \frac{U^2}{2g}$, la condition imposée devient :

$$(1 + k) U^2 + 2V^2 = 2V_0^2$$

et c'est encore une ellipse dont le grand axe est cette fois :

$$\sqrt{\frac{2}{1+k}} V_0$$

Au débouché d'un canal dans un grand bassin, toute l'énergie cinétique est perdue et le bassin impose son niveau, soit : $V = V_0$.

VANNE

Un problème courant dans les installations hydroélectriques est celui de l'injection d'un débit en tête d'un canal initialement en régime permanent.

Si le débit Q est fixé à un instant donné, on a entre la hauteur et la vitesse la relation :

$$Q = Uh = \frac{UV^2}{g}$$

qui sur le plan UV est représentée par une courbe d'allure hyperbolique.

La loi de débit imposée sera donc figurée par un réseau de telles courbes à des intervalles de temps suffisamment

rapprochés; la conduite de l'épure détermine ensuite la hauteur et la vitesse aux instants successifs en tête du canal.

D'une façon plus précise, ce qui est imposé par un organe de décharge à une ouverture donnée, c'est une relation entre U et V .

Par exemple, pour la vanne de la figure 27 on a :

$$Q = \frac{U V^2}{g} = s \sqrt{2 (V_0^2 - V^2)} \quad \text{où } V_0 = \sqrt{g H}$$

dont la courbe représentative est facile à tracer.

De même, si la vanne est à l'extrémité du canal, la condition imposée devient :

$$Q = \frac{U V^2}{g} = s \sqrt{2 (V^2 - V_0^2)}$$

Suivant qu'il s'agit d'une turbine, de l'influence d'un ressaut noyé, etc..., les relations pourront être plus compliquées ou même connues seulement empiriquement; mais le principe est toujours de tracer les courbes en régime permanent aux diverses ouvertures de l'organe de décharge.

Des considérations analogues s'appliqueraient à un déversoir en tête ou à l'extrémité d'un canal.

BRANCHEMENT

En première approximation on peut étendre aux canaux la méthode applicable aux bifurcations des conduites.

On admettra que le niveau est le même dans chaque branche et l'on aura l'équation de continuité :

$$L_1 U_1 = L_2 U_2 + L_3 U_3 \quad (1)$$

La conduite de l'épure exige une représentation distincte pour chaque canal; le lien se fait à la bifurcation par la rencontre de trois observateurs arrivant simultanément de chacune des branches; nous savons par les lois des ondes que chacun doit observer un régime qui sur son plan représentatif est situé sur une droite connue : il s'agit d'en déduire les régimes qui résulteront de leur rencontre; ceux-ci devront se trouver à une ordonnée commune et vérifier la relation (1); on voit (fig. 28) qu'il suffit de tracer sur le plan $U_1 V_1$ le lieu imposé par les branches 2 et 3; c'est une droite de pente constante $\frac{1}{2} \frac{L_1}{L_2 + L_3}$ dont il suffit de déterminer un point; son intersection avec la caractéristique du canal 1 donne le régime cherché.

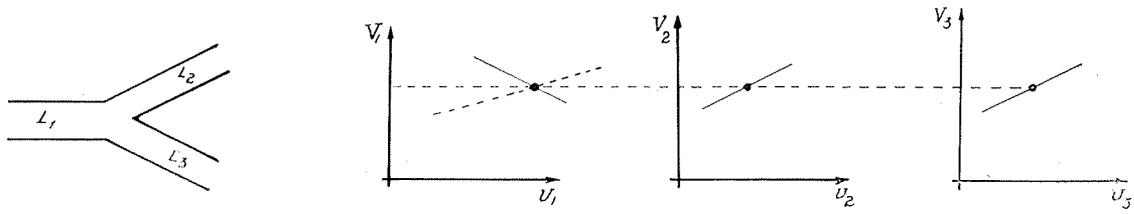


FIGURE 28

tion (1); on voit (fig. 28) qu'il suffit de tracer sur le plan $U_1 V_1$ le lieu imposé par les branches 2 et 3; c'est une droite de pente constante $\frac{1}{2} \frac{L_1}{L_2 + L_3}$ dont il suffit de déterminer un point; son intersection avec la caractéristique du canal 1 donne le régime cherché.

Il faut dire cependant que cette méthode n'est qu'approximative pour les canaux; en raison des récupérations partielles de vitesses, le niveau n'est pas exactement le même à l'entrée de chaque canal; si l'on en tient compte le lien des niveaux doit être demandé à l'expérience et la relation (1) se complique de l'influence des hauteurs; les lois de la bifurcation deviennent alors beaucoup plus difficiles à exprimer.

ONDES DE CHOC

On ne s'étonnera pas que nous placions les ondes à front raide parmi les singularités de l'écoulement; ce sont en effet des singularités mobiles, dont les lois sont données avec exactitude par le théorème des quantités de mouvements.

On pourrait reprendre le raisonnement que nous avons employé pour le cas d'une petite onde; on peut plus simplement imprimer à la figure 29 une vitesse W en sens opposé et se ramener ainsi à un ressaut.

On a dans ces conditions :

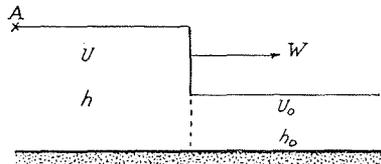


FIGURE 29

$$\begin{cases} \bar{\omega} \frac{h^3}{2} + \rho h (W - U)^2 = Cte \\ h (W - U) = Cte \end{cases}$$

Avec la variable $V = \sqrt{gh}$ ceci s'écrit :

$$\begin{cases} V^4 + 2 V^2 (W - U)^2 = V_0^4 + 2 V_0^2 (W - U_0)^2 \\ V^2 (W - U) = V_0^2 (W - U_0) \end{cases}$$

On en déduit aisément :

$$W = U_0 + \varepsilon \frac{V}{V_0} \sqrt{\frac{V^2 + V_0^2}{2}} = U + \varepsilon \frac{V_0}{V} \sqrt{\frac{V^2 + V_0^2}{2}} \tag{1}$$

$$U - U_0 = \frac{\varepsilon (V^2 - V_0^2) \sqrt{\frac{V^2 + V_0^2}{2}}}{V V_0} \tag{2} \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

Cette dernière relation est la loi de l'onde de choc qui doit être représentée sur le plan UV ; il est clair que pour une faible dénivelée on doit retomber sur les caractéristiques :

$$U - U_0 = 2 \varepsilon (V - V_0) \tag{2'}$$

Effectivement l'équation (1) s'écrit aussi :

$$\frac{U - U_0}{2 \varepsilon (V - V_0)} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{x} \right) \sqrt{\frac{1 + x^2}{2}} \quad \text{où} \quad x = \frac{V}{V_0}$$

Le tableau suivant de la variation du second membre avec x est assez instructif :

$x =$	1/2	1	3/2	2
$f(x)$	1,185	1	1,062	1,185

Pour $x = 3/2$ les altitudes de l'onde de choc et du régime contigu sont dans le rapport de 9 à 4 et la loi approchée $U - U_0 = 2 \varepsilon (V - V_0)$ est encore bonne à 6 % près.

Ceci tient à ce que la courbe représentative de (2) à une tangente d'inflexion au point (U_0, V_0) (fig. 30). On pourra donc souvent, et avec une suffisante approximation, remplacer (2) par la loi linéaire (2') des caractéristiques.

Il y a lieu de remarquer que cette propriété tient au choix de la variable V et constitue un argument nouveau en faveur de cette dernière; en effet, avec une représentation en Uh par exemple, il n'y a plus de point d'inflexion en M_0 , de sorte que l'approximation :

$$\frac{h - h_0}{U - U_0} = \varepsilon \frac{V_0}{g}$$

ne serait pas aussi bonne.

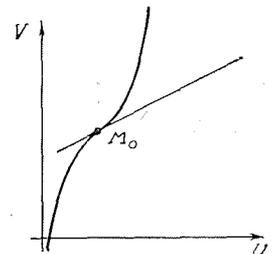


FIGURE 30

La célérité de l'onde de choc est donnée par (1) et elle diffère de celle d'un observateur descendant le courant qui est $U + V$; la différence :

$$V - \frac{V_0}{V} \sqrt{\frac{V^2 + V_0^2}{2}} = \frac{3}{2} (V - V_0) + \dots$$

est d'autant plus sensible que l'onde raide est haute.

L'étude d'une lâchure brusque suivie ou non d'une variation progressive du débit s'effectue suivant la méthode générale.

Sur le plan UV on représente, d'une part la loi imposée à la section origine par exemple $V^2 U = Cte$, et d'autre part la loi de l'onde de choc ou sa tangente osculatrice (fig. 31) : après un court déplacement de la tête de l'onde (régime M_1) on fait partir un observateur vers l'origine et on obtient ainsi l'état qui s'y établit, lequel se rapproche du régime permanent correspondant au nouveau débit (régime M_2) ; ceci fait, le même observateur partant en sens inverse ira amortir la tête de l'onde et rapprochera son régime de celui correspondant au débit initial non perturbé.

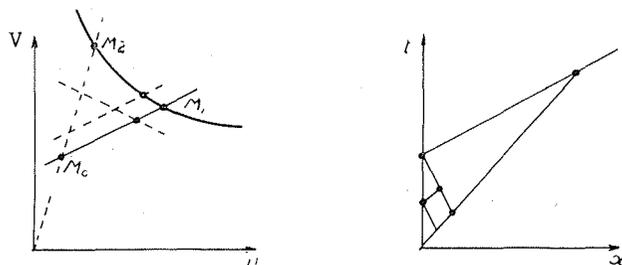


FIGURE 31

Ici cependant on voit apparaître une difficulté ; le

premier trajet est sans histoire, mais dans le second la célérité du voyageur n'étant pas très différente de celle du front de l'onde, leur rencontre s'effectue assez loin ; la détermination du temps de parcours est donc dans ce cas moins précise.

Pour pallier à cet inconvénient, on peut, à partir de l'état de l'intumescence à ses deux extrémités, interpoler sa forme à un instant donné en quatre sections intermédiaires par exemple : de là, faisant partir des observateurs dans les deux directions, on déduira les états ultérieurs du courant ; et l'on continuera ainsi à intercaler des sections intermédiaires au fur et à mesure que l'onde s'allonge.

Souvent le front d'onde s'amortit assez rapidement et, à partir du moment où il s'évanouit, les précautions qui précèdent deviennent inutiles ; on trouvera dans le chapitre qui suit quelques résultats élémentaires sur l'amortissement des petites ondes.

On peut avoir à étudier aussi des cas plus compliqués que celui qui précède, comme par exemple l'intumescence produite par la rupture brusque d'un barrage ; le régime qui s'établit tout d'abord tend à se propager sous forme d'onde positive vers l'aval et négative vers l'amont ; on l'obtient aisément par l'intersection sur le plan UV des caractéristiques d'onde de choc issues des points figuratifs des régimes à l'amont et à l'aval du barrage ; cependant à la différence de ce qui précède, il ne saurait y avoir d'onde de choc négative remontant vers l'amont ; cette figure d'écoulement correspondrait en effet à une création d'énergie mécanique tout comme le ressaut négatif ; le profil de l'onde négative s'aplatit donc au fur et à mesure qu'elle se propage, en conformité avec les célérités différentes de ses divers éléments.

V. — PROPAGATION D'UNE ONDE ÉLÉMENTAIRE

ÉVOLUTION DU FRONT D'ONDE

Considérons une onde de choc se propageant vers l'aval dans un canal rectangulaire large, éventuellement de largeur variable.

Nous avons vu qu'un observateur voyageant avec le front d'onde est constamment rencontré par des observateurs caractéristiques marchant plus vite que lui dans la même direction ; il en résulte que l'évolution de l'onde de tête dépend de tout ce qui la suit.

Cette divergence entre les constatations du voyageur en tête d'onde et celles d'un observateur caractéristique peut être précisée comme suit :

Considérons l'état de l'intumescence à un instant donné ; soient UV le régime au front d'onde (point O), et

$U_1 V_1$ celui en un point voisin en amont O_1 ; l'observateur parti de O_1 vers l'aval rencontre le front d'onde au bout du temps δt ; si sa célérité est $U + V$ et $U + X$ celle du front, on a :

$$\delta t = \frac{dx}{V - X}$$

A ce moment il observe un régime $U' V'$ et l'on a :

$$(U' + 2 V') - (U_1 + 2 V_1) = M \delta t$$

où pour alléger l'écriture nous avons désigné par M la quantité :

$$g \left(i - \lambda \frac{U^2}{V^2} - \frac{1}{gL} \frac{dL}{dx} UV \right)$$

Considérons aussi l'état $U'_1 V'_1$ du courant au point O_1 encore, mais au temps dt avant l'instant initial avec :

$$dt = \frac{dx}{U + V}$$

Un observateur parti de O_1 avec cette avance rencontrera le front d'onde O à l'instant initial et on aura :

$$(U + 2 V) - (U'_1 + 2 V'_1) = M dt$$

En soustrayant les deux relations et divisant par δt nous obtenons :

$$\frac{\partial (U + 2 V)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} (U + 2 V) \frac{dt}{\delta t} = M \left(1 - \frac{dt}{\delta t} \right)$$

Soit d'après la valeur de $\frac{dt}{\delta t}$:

$$\frac{\partial (U + 2 V)}{\partial t} = M \frac{U + X}{U + V} + \frac{V - X}{U + V} \frac{\partial}{\partial t} (U + 2 V) \quad (1)$$

On pourrait aussi répéter, sans modification pour une onde finie, l'analyse que nous avons faite antérieurement du passage d'une petite onde sur un décrochement; le raisonnement en question conduit à la formule ci-dessus (1) limitée à ses deux premiers termes; mais lorsque l'on considère ensuite une série de décrochements et de paliers, cette relation simplifiée est incomplète parce que, durant le parcours du palier, l'onde raide qui se déplace moins vite reçoit un afflux d'ondes élémentaires descendant le courant; telle est précisément la signification du troisième terme de notre formule.

Les remarques qui précèdent montrent qu'il est impossible en toute rigueur de calculer l'évolution du front d'onde indépendamment de toute l'intumescence qui le suit; cependant si nous nous bornons à une perturbation brusque *petite* sur un régime initial permanent, nous allons voir qu'il est possible d'obtenir des résultats approchés, présentant quelque intérêt.

Introduisons dans la formule (1) la distance de parcours :

$$\delta x = (U + X) \delta t$$

nous obtenons :

$$\partial (U + 2 V) = M \frac{\partial x}{U + V} + \frac{V - X}{(U + V)(U + X)} \frac{\partial}{\partial t} (U + 2 V) \partial x \quad (1')$$

D'autre part si $U_0 V_0$ désigne le régime initial non perturbé actuellement au contact du front d'onde et M_0 la valeur correspondante de M la règle habituelle des caractéristiques donne :

$$\partial (U_0 + 2 V_0) = M_0 \frac{\partial x}{U_0 + V_0} \quad (2)$$

On en déduit par soustraction et en appelant u et v les petites différences $U - U_0$ et $V - V_0$:

$$\partial (u + 2 v) = \left[\frac{M}{U + V} - \frac{M_0}{U_0 + V_0} \right] \partial x + \frac{V - X}{(U + V)(U + X)} \frac{\partial}{\partial t} (U + 2 V) \partial x \quad (3)$$

La petite quantité $V - X$ a pour partie principale $\frac{3}{2}v$; d'autre part si l'on met en évidence l'écart u , v , entre le régime perturbé et le régime permanent antérieur en chaque section on a :

$$\frac{\partial (U + 2V)}{\partial t} = \frac{\partial (u + 2v)}{\partial t}$$

Si l'intumescence étudiée consiste en une lâchure brusque en tête du canal d'un débit supplémentaire maintenu ensuite constant, il est clair qu'au départ la dérivée $\frac{\partial (u + 2v)}{\partial t}$ est négligeable; nous supposons que cette quantité demeure petite par la suite et comparable à $\frac{\partial (u + 2v)}{\partial t}$; tant qu'il en est ainsi on voit que le dernier terme de (3) est du second ordre et négligeable par rapport aux deux autres; à la même approximation nous pouvons ne retenir du second que sa partie principale en uv . Nous obtenons ainsi :

$$\partial (u + 2v) = -g \left[\left(i - \lambda \frac{U_0^2}{V_0^2} \right) \frac{u + v}{(U_0 + V_0)^2} + \frac{1}{gL} \frac{dL}{dx} \frac{V_0^2 u + U_0^2 v}{(U_0 + V_0)^2} + \frac{2\lambda U_0}{(U_0 + V_0)V_0^2} \left(u - \frac{U_0}{V_0} v \right) \right] \partial x$$

Entre le régime du front d'onde et celui qui le précède, nous savons d'autre part qu'il existe la relation des ondes de choc qui s'écrit au 3^e ordre près :

$$U - 2V = U_0 - 2V_0 \quad \text{ou} \quad u = 2v$$

En définitive nous obtenons la relation :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g \left[\frac{3}{4} \left(i - \lambda \frac{U_0^2}{V_0^2} \right) \frac{1}{(U_0 + V_0)^2} + \frac{1}{4gL} \frac{dL}{dx} \frac{U_0^2 + 2V_0^2}{(U_0 + V_0)^2} + \frac{\lambda U_0}{(U_0 + V_0)V_0^2} \left(1 - \frac{U_0}{2V_0} \right) \right] \partial x \quad (4)$$

Un calcul tout semblable peut être effectué dans le cas d'une onde remontant le courant.

En appelant toujours U_0 la valeur absolue de la vitesse, i la pente (comptée positivement vers le bas) et $\frac{dL}{dx}$ l'évasement, comptés l'un et l'autre dans la direction du courant, $|x|$ la distance de parcours en valeur absolue on a :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = g \left[\frac{3}{4} \left(i - \lambda \frac{U_0^2}{V_0^2} \right) \frac{1}{(V_0 - U_0)^2} + \frac{1}{4gL} \frac{dL}{dx} \frac{U_0^2 + 2V_0^2}{(V_0 - U_0)^2} - \frac{\lambda U_0}{(V_0 - U_0)V_0^2} \left(1 + \frac{U_0}{2V_0} \right) \right] \partial |x| \quad (5)$$

Nous allons maintenant analyser d'un peu plus près la signification de ces résultats, et pour cela nous commencerons par examiner quelques cas particuliers.

CAS D'UN CANAL INITIALEMENT AU REPOS

L'effet propre de la pente et du changement de section peut être mis en lumière simplement en considérant le cas d'une eau initialement au repos ($U_0 = 0$).

On a alors :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{3}{4} \frac{gi}{V_0^2} \partial x - \frac{1}{2L} \frac{dL}{dx} \partial x = -\frac{3}{4} \frac{\partial H}{H} - \frac{1}{2} \frac{\partial L}{L}$$

soit :

$$v H^{3/4} L^{1/2} = \text{Cte}$$

Si l'on introduit à la place de v la surélévation h de l'onde on obtient avec $v = \frac{\sqrt{g}}{2\sqrt{H}} h$:

$$h H^{1/4} L^{1/2} = \text{Cte}$$

On voit en particulier qu'il y a amplification de l'onde lorsque celle-ci s'approche d'une plage inclinée ou qu'elle pénètre dans un canal convergent; mais naturellement les formules ci-dessus ne demeurent valables que tant que l'onde reste petite.

Ce phénomène a son analogue dans plusieurs problèmes physiques connexes; la propagation du coup de bélier

notamment dans un tuyau télescopique donne lieu, ainsi que l'a signalé M. BERGERON, à une amplification ou un amortissement suivant le sens de parcours.

Les méthodes actuelles permettent de calculer exactement cette propagation d'une surpression brusque dans un tuyau à caractéristiques continûment variables; nous nous bornons à en donner le résultat; si l'on appelle h la surpression, S la section et a la célérité variable on a :

$$h \sqrt{\frac{S}{a}} = C^{te}$$

On remarquera que si l'on fait $S = LH$ et $a = \sqrt{gH}$ on retombe sur la première formule, de sorte que les deux phénomènes quoique distincts sont l'image l'un de l'autre.

Dans un domaine apparemment plus lointain, le claquement de fouet étudié par M. BERGERON est une autre illustration des considérations qui précèdent.

CANAL EN RÉGIME INITIAL UNIFORME

Nous supposerons maintenant la largeur constante et le régime initial uniforme.

On obtient dans ce cas, pour une onde descendant le courant :

$$\frac{\partial v}{v} = -k \partial x \quad \text{où} \quad k = \frac{g i}{U_0 (U_0 + V_0)} \left(1 - \frac{U_0}{2 V_0} \right)$$

c'est-à-dire :

$$h = h_0 e^{-kx}$$

Nous trouvons donc un amortissement exponentiel qui est en parfait accord avec une théorie développée par BOUSSINESQ à partir de considérations entièrement différentes *; ce résultat apparaît aussi dans toutes les études récentes consacrées aux intumescences.

Il permet de se faire une idée de la longévité des fronts d'onde raide soumis à l'amortissement des pertes de charge; cette question s'est même trouvée présenter une actualité militaire dans la préparation du franchissement du Rhin par les Armées Alliées : de telles ondes pouvaient en effet être créées par l'ennemi en amont de Bâle, et il importait de savoir entre autres choses leur distance possible de parcours.

Nous avons parlé d'amortissement mais notre formule montre que, pour des courants suffisamment torrentiels, il y a au contraire amplification; le critérium pour qu'il en soit ainsi est $U_0 > 2 V_0$, et M. MASSE a déjà signalé cette distinction intéressante entre courants modérément et très torrentiels.

A cette même circonstance M. DANIEL a eu l'idée de rattacher certains écoulements appelés slug-flow dans la littérature de langue anglaise; il s'agit de cette succession de vagues en forme de franges que l'on voit prendre naissance dans les canaux inclinés et peu profonds, et plus couramment sur certaines chaussées les jours de pluie; nous ne faisons que signaler au passage cette question qui était demeurée assez obscure jusqu'à présent et que les résultats actuels éclairent plus complètement.

Dans le cas d'une onde remontant le courant, le même calcul à partir de la formule (5) donne :

$$h = h_0 e^{-k'x} \quad \text{où} \quad k' = \frac{g i}{U_0 (V_0 - U_0)} \left(1 + \frac{U_0}{2 V_0} \right)$$

Pour les courants fluviaux, les seuls qu'il soit intéressant de considérer ici, on constate qu'il y a toujours amortissement.

La formule exponentielle d'amortissement n'est plus valable lorsque la vitesse de régime uniforme est nulle, ainsi que la pente du canal; les pertes de charge étant alors très peu sensibles, l'amortissement est beaucoup plus lent.

Ce deuxième cas peut être facilement étudié à part, suivant les mêmes principes que précédemment.

Un observateur suivant le front d'onde constate ici :

$$\partial (u + 2v) = -g \lambda \frac{u^2}{V_0^3} \partial x$$

c'est-à-dire moyennant $u = 2v$.

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = \frac{g \lambda}{V_0^3} x$$

* *Essai sur la Théorie des eaux courantes*, page 454.

Introduisant la surélévation h par $v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{H}} h$ on obtient :

$$h = \frac{h_0}{1 + h_0 \frac{\lambda x}{2 H^2}}$$

Ce résultat est également en plein accord avec l'étude déjà citée de BOUSSINESQ.

CAS D'UN RÉGIME INITIAL VARIÉ

Si, après ces cas particuliers, on revient au cas général d'un régime initial permanent quelconque, on voit que les formules (4) et (5) permettent de calculer complètement l'évolution de l'onde : U_0 et V_0 sont en effet des fonctions connues de x et l'on a :

$$\frac{\partial v}{v} = + f(x) \partial x \quad \text{soit} \quad v = v_0 e^{\int_{x_0}^x f(x) dx}$$

Considérons à titre d'exemple le cas d'un canal de largeur constante, mais où le régime initial n'est pas uniforme.

D'après les résultats précédents nous voyons que la propagation d'une onde est influencée par deux causes : la variation de profondeur et les pertes de charge; on conçoit donc que, si elles se contrarient, l'onde puisse passer par un maximum ou un minimum.

Les formules (4) et (5) donnent immédiatement la condition de production de cette valeur stationnaire.

Nous appellerons x le rapport $\frac{U_0}{V_0}$ qui caractérise le dosage de l'énergie cinétique et potentielle dans chaque section.

Pour une onde descendant le courant on obtient la condition :

$$\frac{i}{\lambda} = \frac{x}{3} (2x^2 + x - 4)$$

et pour une onde remontant le courant :

$$\frac{i}{\lambda} = -\frac{x}{3} (2x^2 - x - 4)$$

Nous rappelons que la pente i est comptée dans les deux cas dans la direction du courant positivement vers le bas.

La figure 32 représente ces courbes (qui se prolongent par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées); elles séparent le plan en deux zones : l'une hachurée où l'onde est amplifiée, l'autre où elle est amortie.

Le cas particulier où le régime initial est uniforme correspond à $\frac{i}{\lambda} = x^2$ et l'on retrouve la condition d'amplification $\frac{U_0}{V_0} > 2$.

A l'aide de la figure 32 on lit immédiatement l'évolution d'une petite onde dans les différents cas de lignes de remous; nous n'insisterons pas sur cette discussion très facile.

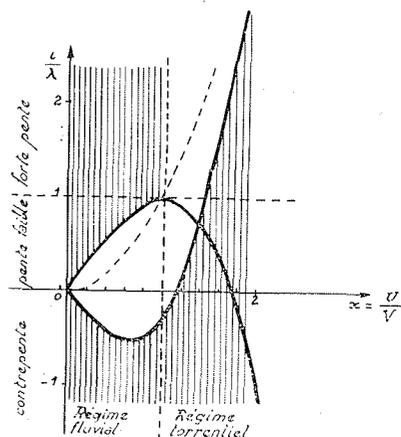


FIGURE 32

FORMATION D'ONDES DE CHOC A PARTIR D'UN FRONT PROGRESSIF

Nous voulons signaler en terminant une autre utilisation possible des résultats qui précèdent concernant le raidissement graduel d'un front d'onde progressif et sa transformation en onde de choc.

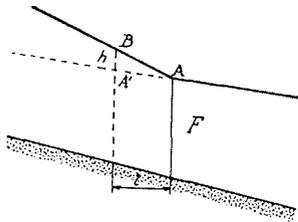


FIGURE 33

Soit à chercher (fig. 33) l'évolution de la pente superficielle du front d'onde AB ; nous considérons pour cela le régime en B comme constituant une petite onde élémentaire; celle-ci s'amortit ou s'amplifie suivant les cas en conformité avec ce qui précède.

D'autre part, le point B se propage avec une célérité $U_B + V_B$ (puisqu'il s'agit en fait d'un front continu), et le point A avec une célérité $U_A + V_A$.

Si nous appelons W pour alléger l'écriture la quantité $U + V$, la vitesse relative de B par rapport à A s'écrit :

$$W_B - W_A = (W_B - W_{A'}) + (W_{A'} - W_A)$$

où nous avons mis en évidence la célérité $W_{A'}$ du régime permanent dans la section à l'aplomb de B .

Mais nous avons vu que l'on a (loi d'une petite onde descendant le courant) :

$$W_B - W_{A'} = (U_B - U_{A'}) + (V_B - V_{A'}) = 3(V_B - V_{A'}) = 3v$$

D'autre part, si l est la distance AB

$$W_{A'} - W_A = -l \frac{dW}{dx}$$

Comme la vitesse relative $(W_B - W_A)$ mesure précisément la vitesse de raccourcissement de l , on a :

$$W_B - W_A = -\frac{dl}{dt} = -W \frac{dl}{dx}$$

c'est-à-dire :

$$W \frac{dl}{dx} - l \frac{dW}{dx} = -3v$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{l}{W} \right) = -\frac{3v}{W^2}$$

soit :

$$\frac{l}{W} = \frac{l_0}{W_0} - \int_{x_0}^x \frac{3v}{W^2} dx$$

On en déduit aisément la pente relative du front d'onde AB par rapport au niveau de régime permanent; si h est la surélévation $A'B$ cette quantité est liée à v par :

$$v = \sqrt{g h_B} - \sqrt{g h_{A'}} = \frac{g}{2V} h$$

et l'inverse de la pente relative s'écrit donc :

$$\frac{l}{h} = \frac{g}{2V} \frac{l}{v} = \frac{gW}{2V} \left[\frac{l_0}{W_0} - \int_{x_0}^x \frac{3v}{W^2} dx \right] \frac{1}{v}$$

nous rappelons que l'on a :

$$\frac{v}{v_0} = e^{\int_{x_0}^x f dx} = \varphi(x)$$

où $f(x)$ est le second membre de la formule (4).

On obtient en définitive, en appelant m la pente relative du front d'onde, comptée positivement pour une intumescence positive comme celle de la figure 33 :

$$\frac{1}{m} = \frac{g(U+V)}{2V} \left[\frac{2V_0}{g(U_0+V_0)} \frac{1}{m_0} - \int_{x_0}^x \frac{3\varphi(x)}{(U+V)^2} dx \right] \frac{1}{\varphi(x)}$$

L'apparition d'un front raide est à escompter à partir du moment où la distance l s'annule et, par conséquent, où la pente m devient très grande; l'expression précédente permet de discuter la possibilité de production du phénomène dans des cas très étendus (largeur et profondeur variables).

Pour une onde remontant le courant, il suffit dans la formule précédente de remplacer $U+V$ par $V-U$ et $\varphi(x)$ par le second membre de la formule (5).

Ce problème du mascaret a été d'abord étudié par M. MASSE dans le cas d'un régime initial uniforme, en utilisant des propriétés générales des caractéristiques; on voit que les considérations élémentaires de la présente étude permettent d'accéder très simplement à des cas où les méthodes générales de l'analyse conduiraient à des calculs pénibles et assez éloignés de l'intuition.