

CERCLE DE MOHR ET CONIQUES D'ÉLASTICITÉ

par N. DEWULF

Chef du Service des Recherches aux Etablissements Bouchayer et Viallet

Les constructeurs de chaudronnerie ne peuvent plus maintenant, comme autrefois, se contenter du jugement de leur maîtrise et du savoir-faire de leurs ouvriers. Tout projet est appuyé sur des calculs de résistance des matériaux ; toute construction nouvelle doit être soumise à des essais de fatigue : emploi d'extensomètres, d'appareils sonores à corde vibrante, etc.

Les Bureaux d'Etudes ont donc fréquemment à utiliser le diagramme de Mohr. Mais un Ingénieur ne doit pas s'en tenir à l'application d'une méthode commode ; son travail devient plus intéressant s'il remonte parfois aux sources de ces méthodes. C'est ce que nous nous sommes efforcés de faire au cours de cet article.

Comme on le sait, le diagramme de Mohr dans le plan est basé sur les propriétés du cercle de la fig. 1 où δ_1 δ_2 sont les valeurs en un point des deux déformations principales de directions Ox et Oy : pour une direction radiale faisant un angle α avec Ox , le point M de ce cercle tel que :

$$x \widehat{CM} = 2 \alpha$$

détermine la déformation radiale $\delta = Om$

La déformation tangentielle γ , nommée glissement est $2mM$.

Au moyen de trois mesures δ δ' δ'' dans trois directions à 45° l'une de l'autre, on obtient les directions principales Ox , Oy et les valeurs de δ_1 et δ_2 avec leurs signes.

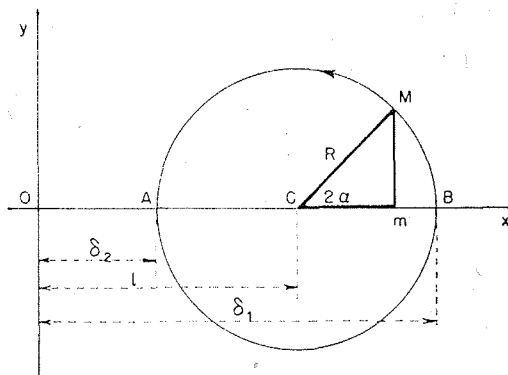


Fig. 1

Si δ_1 et δ_2 sont toutes deux positives, on adopte le tracé de la fig. 1.

Si δ_1 et δ_2 sont toutes deux négatives, on adopte le tracé de la fig. 4.

Si δ_1 est de signe contraire à δ_2 , on a à choisir entre les fig. 2 et 3.

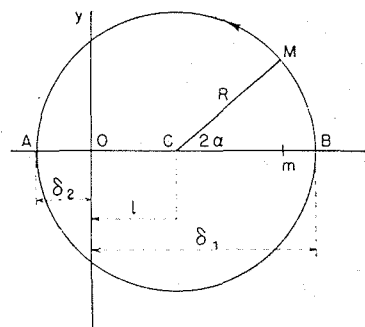


Fig. 2

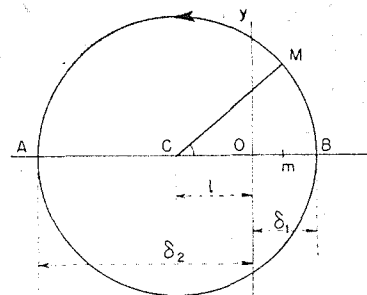


Fig. 3

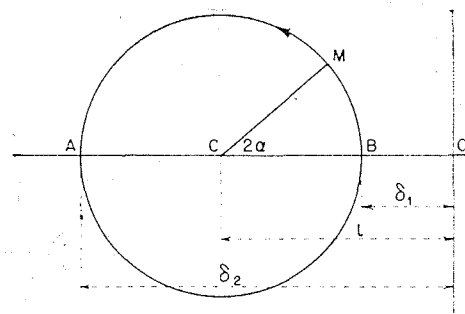


Fig. 4

Pour savoir si l'on n'a pas pris comme axe des x celui qui devrait être axe des y , il suffit de vérifier si, pour une quelconque des directions de δ δ' δ'' , le diagramme donne bien pour Om la valeur mesurée. Sinon, intervertir

Ox et Oy, c'est-à-dire modifier de $\frac{\pi}{2}$ tous les α déduits des 3 mesures.

Le même procédé permet, dans le cas de δ_1, δ_2 de signes contraires, de faire le choix entre le 2^e et le 3^e diagramme.

I. — RETOUR A LA CONIQUE DES DEFORMATIONS DE CAUCHY

On sait que la double conique :

$$\delta_1 x^2 + \delta_2 y^2 = \pm 1$$

a comme rayon vecteur pour chaque angle α :

$$(1) \quad \rho = \pm \sqrt{\frac{1}{\pm \delta \alpha}}$$

$\delta \alpha$: déformation positive ou négative de direction α ; ρ est porté dans la direction α elle-même (signe +) quand $\delta \alpha$ est positif. Il est porté dans la direction opposée à α (signe -) quand $\delta \alpha$ est négatif.

$\delta \alpha$ peut aussi être considérée comme la déformation normale à un petit élément dont la normale fait un angle α avec Ox.

Pour faciliter et uniformiser le dessin, nous remplacerons cette conique par une autre :

$$(c) \quad \left| \begin{array}{l} X^2 + \frac{\delta_2}{\delta_1} Y^2 = \pm 1 \end{array} \right.$$

qui est homothétique à la précédente.

(Centre d'homothétie O, rapport d'homothétie $\sqrt{\delta_1}$).

$$\left| \begin{array}{l} X = x \sqrt{\delta_1} \\ Y = y \sqrt{\delta_1} \end{array} \right.$$

Rayon vecteur $\Gamma = e \sqrt{\delta_1} = \pm \sqrt{\frac{\delta_1}{\pm \delta \alpha}}$

Dans le même but, le cercle des figures précédentes sera remplacé par un cercle homothétique. Centre d'homothétie O, rapport d'homothétie $\frac{1}{\delta_1}$.

thétie $\frac{1}{\delta_1}$.

$$(2) \quad \left(\begin{array}{l} \delta_1 \text{ sera remplacé par } 1 = OB \\ \delta_2 \text{ — — — — — } \frac{\delta_1}{\delta_2} = OA \\ R \text{ — — — — — } \frac{R}{\delta_1} = R' \\ \delta = Om \text{ — — — — — } \frac{\delta}{\delta_1} = \frac{Om}{\delta_1} \\ \frac{Y}{2} = mM \text{ — — — — — } \frac{1}{2} \frac{\delta_1}{\gamma} = \frac{mM}{\delta_1} \end{array} \right.$$

Ces deux homothéties différentes ne changent pas les angles (propriété connue).

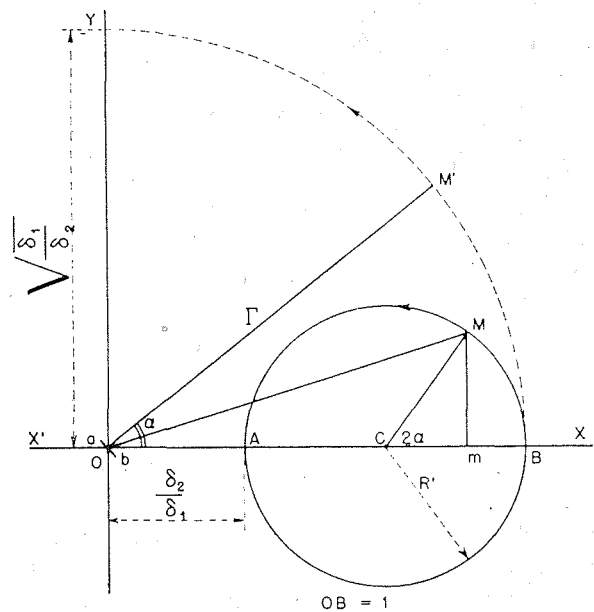


Fig. 5

1) Considérons le cas δ_1 et δ_2 de signes contraires qui est le plus intéressant (fig. 6).

On peut toujours supposer $\delta_1 > 0$ car il n'y a aucune distinction entre Ox et Oy.

Prenons d'abord

$$\delta_1 > -\delta_2 \quad (\text{comme fig. 2})$$

done : $\frac{\delta_2}{\delta_1}$ négatif et de valeur absolue < 1

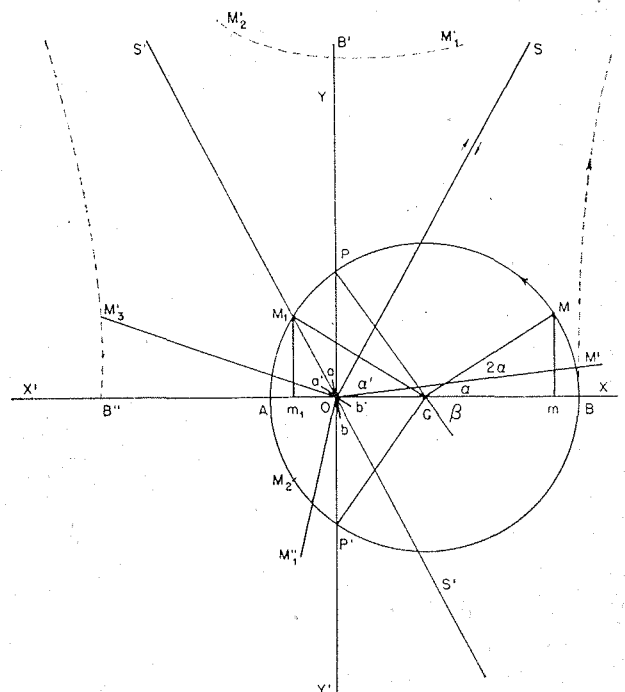


Fig. 6

Les courbes (c) sont des hyperboles ; leur 1/2 axe horizontal est égal à I, leurs asymptotes ont comme inclinaison

$$\frac{Y}{X} = \pm \sqrt{\frac{\delta_1}{-\delta_2}}$$

Au voisinage de $\alpha = 0$, point M du cercle de Mohr,

$$(3) \quad \Gamma = + \sqrt{\frac{\delta_1}{\delta\alpha}}$$

le point correspondant à M est M' sur l'hyperbole de signe +,

$$Om = \frac{\delta\alpha}{\delta_1} = \frac{1}{\Gamma^2} = \frac{1}{OM'^2}$$

La déformation normale à l'élément *ab* est une extension tant que α est petit.

Elle deviendra nulle pour une valeur α' de α telle que OM' devienne ∞ ; c'est donc la direction asymptotique.

$$(4) \quad \text{tg } \alpha' = \sqrt{\frac{\delta_1}{-\delta_2}}$$

Pour cette valeur α' , Om doit être nul, donc M est sur OY en P ; *ab* est venu en *a'b'* normal à OS ; il en résulte que :

$$\widehat{BCP} = 2 \quad \widehat{BOS} = 2\alpha'$$

Pour toutes les positions de l'élément *ab* comprises entre OY et *a'b'* les déformations normales sont des dilatations ; au delà de *a'b'* elles deviennent des contractions. L'hyperbole de signe + n'ayant aucun point dans l'angle SOY, il faut, à partir de la direction OS, la remplacer par :

$$X^2 + \frac{\delta_2}{\delta_1} Y^2 = -1$$

Puisque la déformation est devenue à gauche de OS une contraction, Γ doit être pris avec le signe - et porté sur OM''₁ opposé à OM'₁ ; la déformation normale à la nouvelle direction de *ab* est maintenant

$$\delta\alpha = -\delta_1 \frac{1}{OM_1'^2}$$

A M'₁ correspond M₁ sur la circonférence tel que $\widehat{PCM_1} = 2 \widehat{SOM_1}$

Pendant que M₁ ira de P en A, M'₁ ira de S en B', et - $\delta\alpha$ croîtra de zéro à δ_1 OA qui est la contraction normale maximum. Elle correspond à un élément *ab* normal à OP ; sa valeur

$$\delta_1 OA = -\delta_1 \frac{\delta_2}{\delta_1} = -\delta_2$$

Au delà de OS le vecteur représentant la déformation normale repasse du côté de l'autre face de *ab* puisque c'est une extension. Le vecteur Γ est donc entre OS' et OB'' ; M'₂ est venu en un point M''₂ de la seconde branche de l'hyperbole ; à M''₂ correspond M₂ entre P' et B.

Cette nouvelle extension croît de zéro (correspondant à Γ infini de direction OS'), jusqu'à celle correspondant à Γ minimum = OB'' = 1 ;

$$\delta\alpha_{min} = \delta_1 \frac{1}{OB''} = \delta_1$$

Puisque 2α est alors 2π le point M₂ est venu en B.

En continuant à faire tourner *ab*, l'extension normale passe par les mêmes valeurs que précédemment, mais son vecteur représentatif est maintenant dirigé vers le bas parce que l'élément *ab* a tourné de 180°.

Affectons à la face considérée de l'élément *ab*, une normale de longueur I ; le lieu de l'extrémité de cette normale sera une circonférence de rayon I (fig. 7). Le point de cette circonférence correspondant à la position initiale de *ab* est 1 ; le point correspondant à sa position *a'b'* est 2 tel que

$$\begin{aligned} O2 // OS ; \\ \widehat{1O2} = \widehat{BOS} = \alpha' \end{aligned}$$

La position horizontale de *ab* correspond à 3 ; le point 4 correspond à *ab* \perp OS'.

O 5 est la normale à *ab* après rotation de 180° ; c'est 6 après rotation de 180° + α' ; 7 après rotation de 180° + 90° ; 8 après rotation de $2\pi - \alpha'$; 1 après rotation de 360°.

Les extrémités des normales aux positions successives de la face choisie de *ab* sont :

$$1 - a - 2 - 3 - 4 - e - 5 - g - 6 - h - 7 - j - 8 - k - I$$

Les extrémités correspondantes de Γ sur les hyperboles sont :

$$1 - a'' - S \text{ puis } S'' - 3'' - S''', S' - e'' 5 - g'' - S'', S - h'' - 7'' \dots J'' - S', S'' - K'' - 1.$$

Sur la courbe lieu des extrémités des vecteurs

$\frac{\delta\alpha}{\delta_1}$ les points correspondants sont :

$$1 - a' - O - 3' - O - e' - 5 - g' - O - h' - 7' - j' - O - k' - 1.$$

Les 1/2 glissements seront représentés par une surlongueur ou une sous-longueur du rayon du

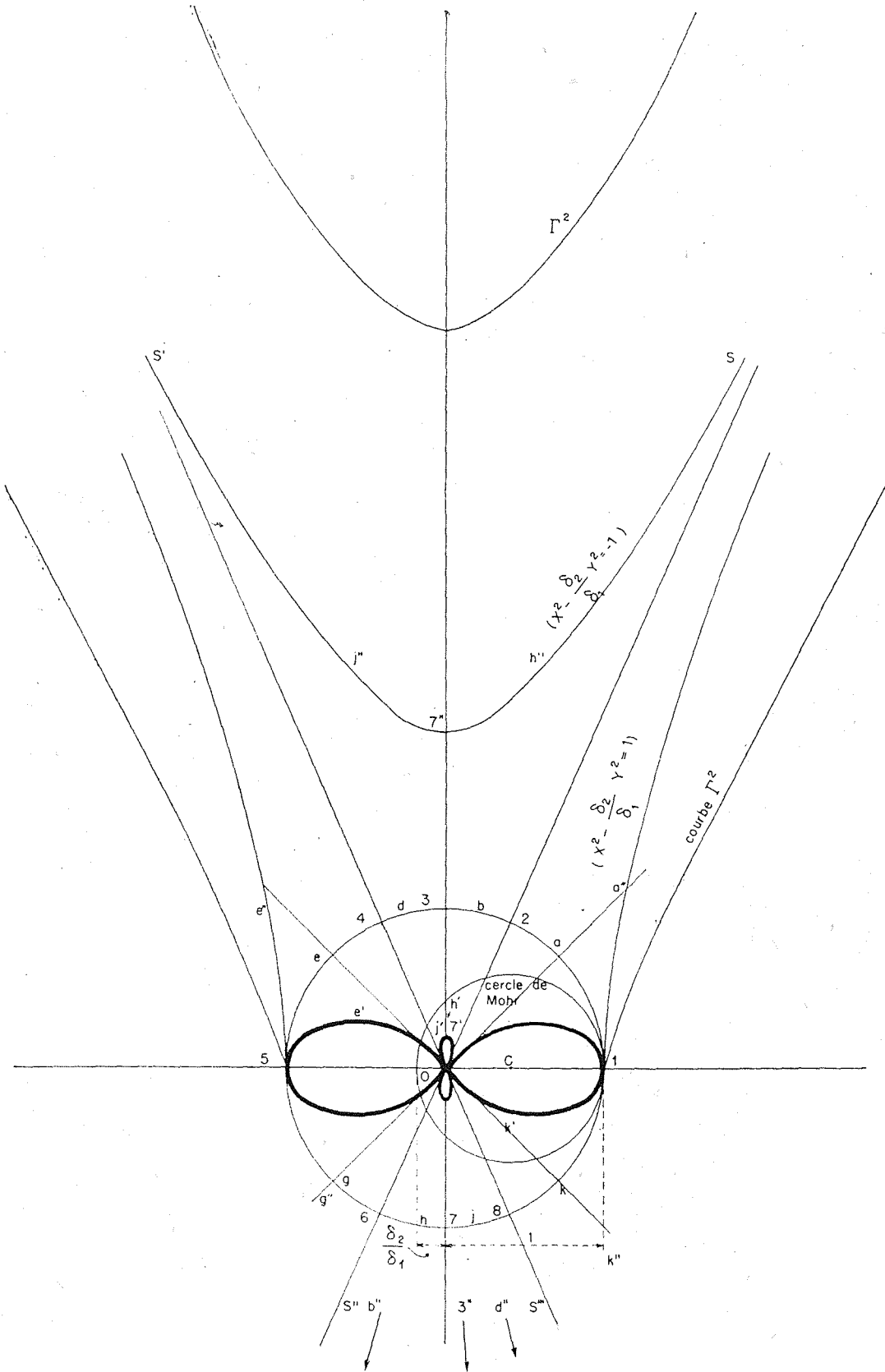


Fig. 7

Courbe représentant l'extrémité du vecteur $\frac{\delta\alpha}{\delta_1}$ en fonction de son angle α avec l'axe des x qui est la direction de δ_1 .

cercle (fig. 8), bien que leur direction réelle soit perpendiculaire à ce rayon, parce qu'on a ainsi une figure plus parlante.

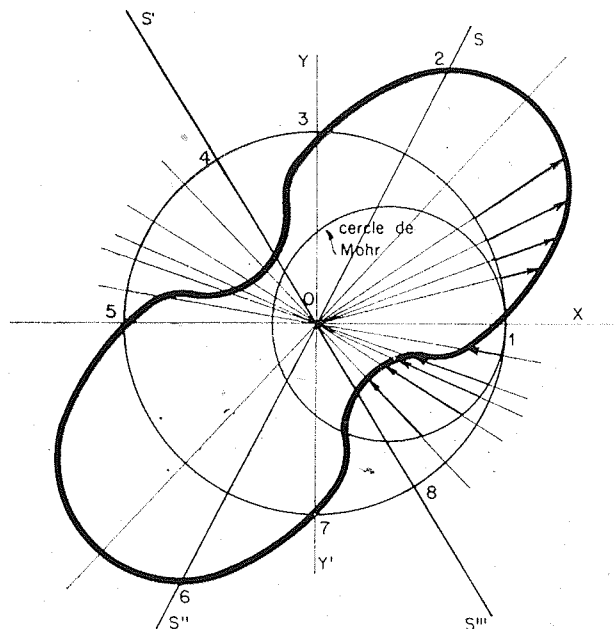


Fig. 8.

Les maxima correspondent aux valeurs suivantes de 2α (fig. 6) :

$$\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}$$

c'est-à-dire aux valeurs suivantes de α (fig. 8) :

$$\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, \pi + \frac{\pi}{4}, 2\pi - \frac{\pi}{4}$$

2) δ_1 et δ_2 de signes contraires avec $\delta_1 < 0$ et $\delta_2 < -\delta_1$.

Pour les mêmes raisons que précédemment, nous pourrions supposer que c'est δ_1 qui est négatif ; donc $\delta_2 < -\delta_1$ (fig. 3') qui est la fig. (3) avec interversion de δ_1 et δ_2 .

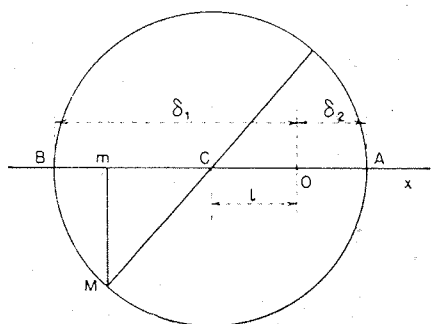


Fig. 3'

Le changement de variable est ici :

$$X = x \sqrt{-\delta_1}$$

$$Y = y \sqrt{-\delta_1}$$

la nouvelle équation de (c) sera :

$$-X^2 - \frac{\delta_2}{\delta_1} Y^2 = \pm 1$$

Pour α voisin de zéro, Y est très petit, le signe du second membre est donc —

En changeant tous les signes,

$$X^2 + \frac{\delta_2}{\delta_1} Y^2 = 1$$

Les asymptotes ont comme inclinaison

$$\frac{Y}{X} = \pm \sqrt{\frac{-\delta_1}{\delta_2}}$$

c'est donc la même conique que celle du cas précédent.

On retombe sur les raisonnements précédents, mais le facteur $\frac{1}{\delta_1}$ étant négatif, il y a changement de signe pour les déformations.

3) δ_1 et δ_2 négatifs.

On peut toujours supposer

$$-\delta_1 > -\delta_2$$

même raisonnement qu'au § 2.

(C) est une ellipse.

$$X^2 + \frac{\delta_2}{\delta_1} Y^2 = + 1$$

Par suite du rapport d'homothétie négatif $\frac{1}{\delta_1}$ on est dans le cas de la figure 5, où la courbe en traits interrompus est l'ellipse ci-dessus :

Avec le même mode de représentation qu'au § 1 on obtient la fig. 9 dans laquelle, pour une direction α , Oa , représente le vecteur $\frac{\delta\alpha}{\delta_1}$ et Oa'' le vecteur $1/2$ glissement décalé de 90° .

Mais δ_1 étant < 0 , le vecteur $\delta\alpha$ est dirigé en sens inverse du vecteur $\frac{\delta\alpha}{\delta_1}$.

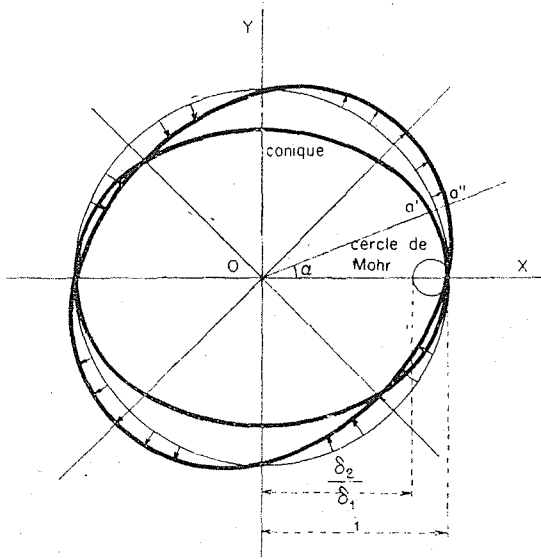


Fig. 9

RESUME

La planche placée en fin de rédaction montre comment varie la forme de la courbe décrite par l'extrémité du vecteur $\frac{\delta x}{\delta_1}$ en fonction du rapport $\frac{\delta_2}{\delta_1}$.

La deuxième figure de cette planche correspond aux figures 1, 5 et 9 du texte.

La cinquième figure correspond aux fig. 6 et 7 du texte.

II. — CONTRAINTES

On sait que, ayant obtenu δ_1 et δ_2 , les tensions principales σ_1 σ_2 sont calculées par les formules :

$$\sigma_1 = \frac{E}{1 - \eta^2} (\delta_1 + \eta \delta_2)$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1 - \eta^2} (\delta_2 + \eta \delta_1)$$

où E : module d'élasticité
 η : coefficient de Poisson.

On sait aussi que, pour un élément dont la normale fait un angle α avec la direction de σ_1 prise pour axe des x , les contraintes normale et tangentielle sont données par un diagramme de Mohr analogue à celui des déformations.

Contrainte normale : $n = OC + Cm$
 » tangentielle : $t = mM$

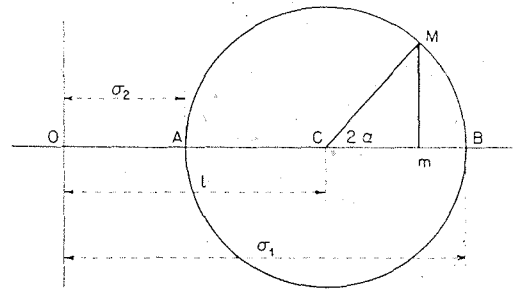


Fig. 10

On aura des courbes analogues aux précédentes. Les directions asymptotiques étant

$$\lg \alpha'_1 = \pm \sqrt{\frac{\sigma_1}{\pm \sigma_2}}$$

il y aura décalage par rapport aux précédentes puisque vu (5) :

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\delta_1 + \eta \delta_2}{\delta_2 + \eta \delta_1}$$

Les considérations exposées dans cet article sont élémentaires ; il se peut que ces résultats figurent dans des ouvrages spéciaux ; en tout cas, on ne les trouve pas, à notre connaissance, dans les traités classiques.

Nous conseillons de s'habituer à faire ces figures ; elles évitent toute incertitude pour le tracé des isostatiques, particulièrement au voisinage des points singuliers.

1	γ
2	δ_1

— $\frac{1}{2}$ plan supérieur
 - - - $\frac{1}{2}$ plan inférieur

δ
δ_1

$\gamma = 0$ uniformément

a) $\delta_2 = \delta_1$
 (extension isotrope)

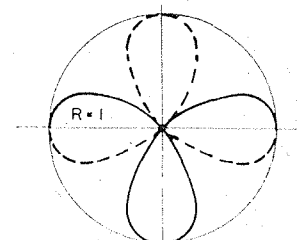
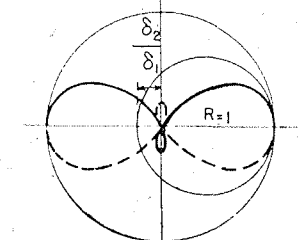
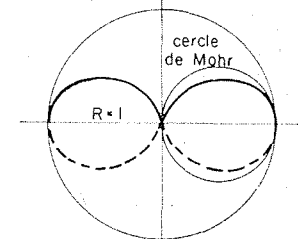
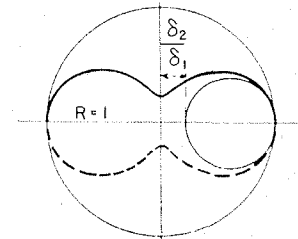
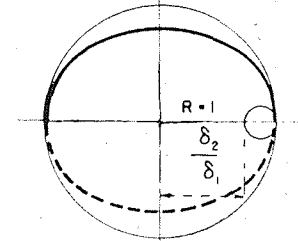
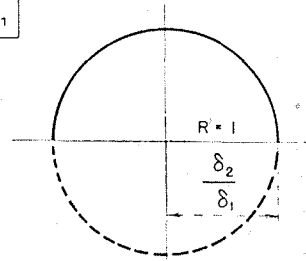
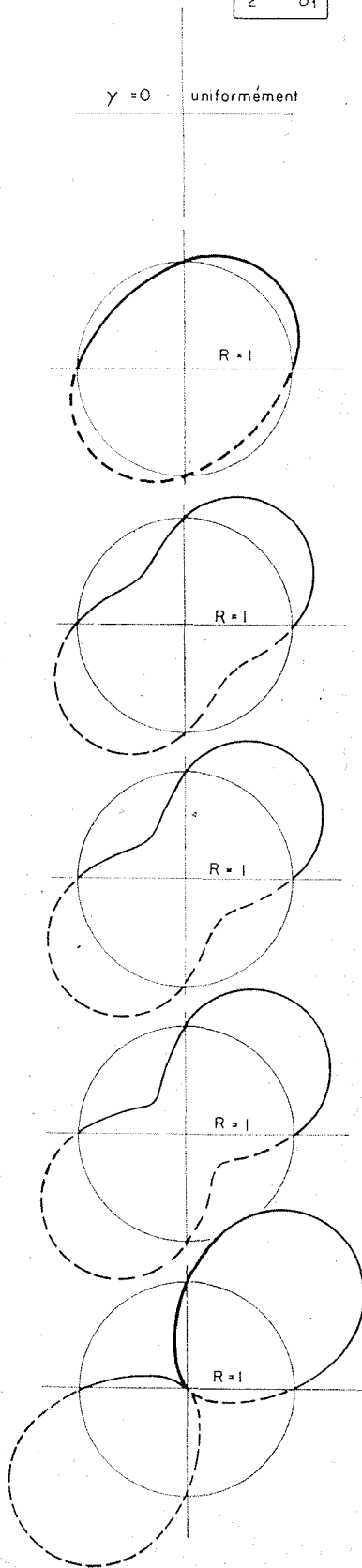
b) $\delta_2 = 0,8 \delta_1$

c) $\delta_2 = 0,21 \delta_1$

d) $\delta_2 = 0$

e) $-\delta_2 = 0,21 \delta_1$

f) $-\delta_2 = \delta_1$
 (distorsion pure)



NOTA: Pour $\frac{\delta_2}{\delta_1} > 1$, on retrouverait les mêmes courbes en permutant les axes et en remplaçant $\frac{\delta_2}{\delta_1}$ par $\frac{\delta_1}{\delta_2}$