

# Similitude des usures causées par des mixtures liquide-solide

(Application aux roues de pompes centrifuges)

## Similitude of wear caused by liquids carrying solids in suspension

Application to centrifugal pump runners

PAR P. BERGERON

English synopsis p. 637

### AVANT-PROPOS

En faisant cette étude, nous n'avons pas eu l'ambition d'arriver à des résultats rigoureusement exacts qui seraient, dans la plupart des cas impossibles sans doute à obtenir étant donné la complexité physique du phénomène, mais simplement de prédéterminer, en partant de résultats d'essais d'usures relevées sur une machine fonctionnant avec une certaine mixture, l'ordre de grandeur des usures probables sur une machine semblable fonctionnant en un point hydrauliquement homologue, mais avec une autre mixture.

Pour arriver à un résultat pratique, il a fallu faire plusieurs approximations mathématiquement contestables, il a fallu simplifier les hypothèses de base. De ce fait, les conclusions ne sont que des approximations grossières. Elles nécessitent des coefficients de correction qui ne pourront vraisemblablement être qu'expérimentaux. Mais même cette approximation doit être industriellement intéressante car, à notre connaissance, on ne dispose actuellement d'aucune possibilité d'extrapolation, lorsque celle-ci devient importante.

En outre, nous n'avons poursuivi l'étude que pour les roues de machines qui sont les parties les plus sujettes à usure rapide. Il appartient de faire une étude analogue pour les écoulements le long de parois fixes parmi lesquels il faut considérer ceux à petits rayons de courbure (jet à son arrivée sur une plaque) et ceux à grands rayons de courbure.

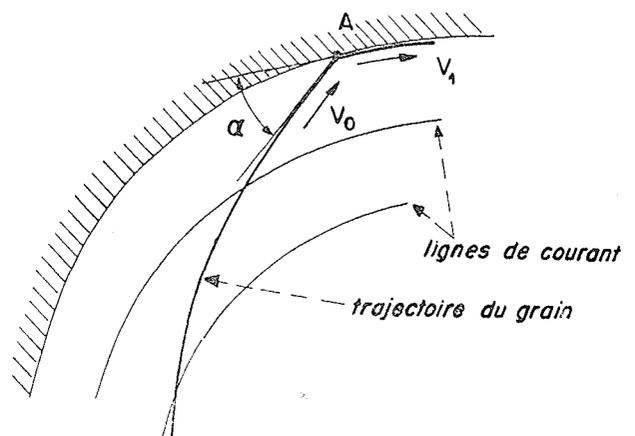


FIG. 1.

## MÉCANISME DU PHÉNOMÈNE D'USURE

Considérons un grain solide G dans un écoulement fluide par exemple courbe (fig. 1).

La trajectoire du grain coupe les trajectoires du fluide et rencontre en A la paroi. En A il y a *percussion*; mais au-delà de A, et tant que les accélérations auxquelles le grain est soumis ne changent pas de signe, il y a *frottement*.

On peut admettre que :

1° En A, si le grain est arrivé avec la vitesse  $V_0$  et qu'il reparte avec la vitesse  $V_1$ , la détérioration de métal est proportionnelle à la variation d'énergie cinétique du grain, soit proportionnelle à :

$$Pd^3 (V_0^2 - V_1^2)$$

ceci en supposant un grain sphérique de diamètre «  $d$  », de masse spécifique  $P$  dans un fluide de masse spécifique  $\rho$ ;

2° Au-delà de A, la détérioration est proportionnelle à la puissance développée par le frottement du grain sur la paroi, c'est-à-dire proportionnelle à :

$$(P - \rho) d^3$$

× accélération normale à la paroi

× vitesse × coefficient de frottement.

Cette hypothèse suppose, ce qui doit être exact, si le métal est bien homogène, que le métal est désagrégé intégralement en ses plus fins éléments, c'est-à-dire que la désagrégation d'un  $\text{cm}^3$  nécessitera toujours le même travail total quels que soient les efforts et les vitesses mis en jeu.

Dans un écoulement complexe, le dosage de ces deux catégories de cause d'usure serait difficile. L'expérience semble bien montrer que la détérioration par percussion ne se présente que lorsque A est au voisinage d'un point de vitesse nulle, soit pour  $\alpha = 90^\circ$  ou pour  $\alpha$  grand.

Dans tous les autres cas, la détérioration peut être considérée comme due exclusivement aux frottements, d'autant plus qu'en général le grain arrive sur une paroi déjà recouverte d'une couche de grain en cours de glissement, grains qui se sont déposés sur la paroi en amont et qui amortissent le choc dans une certaine mesure.

C'est ainsi que dans une pompe l'usure de l'extrémité des aubes à l'entrée et l'usure de la languette du colimaçon revêtent un caractère entièrement différent de celui de l'usure des parois des aubes ou de l'intérieur de la volute. Pour l'usure provoquée par le jet d'un liquide chargé sur une plaque (fig. 2), il faut certainement envi-

sager une première zone I où la détérioration est due en priorité à la percussion et aux grandes courbures des filets, tout au moins en son centre, une deuxième zone II où la détérioration est due aux frottements.

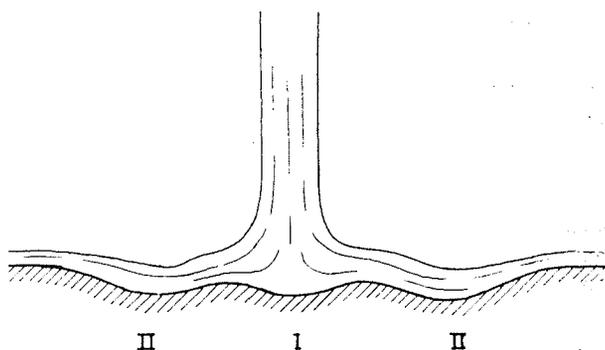


FIG. 2.

Dans l'étude qui nous intéresse ici, de l'usure des roues, nous ne retiendrons que l'usure par frottement, qui cause le rebut de la pièce avant celle causée par la percussion.

## EXPRESSION DES FACTEURS D'USURES PAR FROTTEMENT

Soit une pompe fonctionnant en mixture en un point déterminé de sa caractéristique. On supposera que tous les grains sont identiques, sphériques, de diamètre «  $d$  », que la répartition des grains avant l'entrée dans la roue est parfaitement uniforme et que les métaux utilisés sont identiques. Les filets fluides seront traversés par les trajectoires des grains qui glissent vers la face avant des aubes (fig. 3).

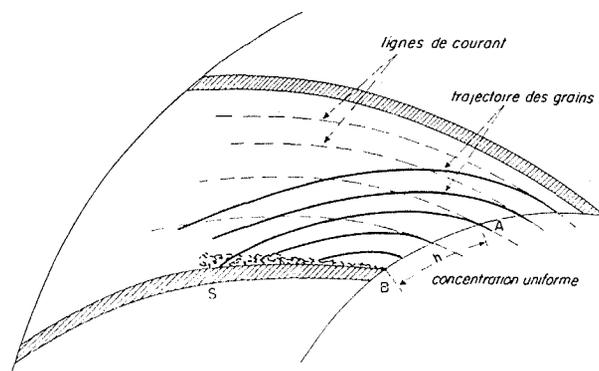


FIG. 3.

Sur l'unité de surface, autour d'un point S quelconque de la paroi, l'usure définie comme la vitesse de diminution d'épaisseur de la paroi au point considéré sera proportionnelle :

1° Comme déjà dit, pour chaque grain à la

puissance développée par le frottement, proportionnelle à :

$$(P - \varphi) d^3$$

× accélération normale à la paroi

× vitesse × coefficient de frottement.

La vitesse du grain au point considéré est égale à la vitesse de l'eau plus la vitesse de glissement du grain par rapport à l'eau.

L'accélération à laquelle est soumis le grain est également différente en grandeur et en direction de l'accélération à laquelle serait soumise la molécule d'eau en ce point puisque les vitesses sont différentes.

Cependant, par simplification, nous supposons que dans la similitude accélération et vitesse de grain à la paroi varieront comme accélération et vitesse de l'eau, c'est-à-dire respectivement comme  $\frac{U^2}{D}$  et  $U$ ,

$U$  étant une vitesse caractéristique de l'écoulement liquide,

$D$  une dimension caractéristique de la machine.

On aura dans ces conditions l'usure proportionnelle à :

$$(P - \varphi) d^3 \frac{U^3}{D}$$

Cette simplification suppose que, à la paroi, la vitesse de glissement du grain par rapport à l'eau est faible, ce qui est d'autant plus acceptable que le grain est fortement freiné par le frottement. Il s'ensuit que les accélérations également différent peu. Il n'en reste pas moins que, dans la comparaison, cette simplification est défavorable aux grains plus petits ou de densités plus faibles;

2° Au nombre de grains  $p$  supporté par l'unité de surface,

3° A un coefficient  $K$ , coefficient caractéristique de la nature des grains, en particulier de leur dureté et du coefficient de frottement qui résulte de cette nature des grains,

soit au total :

$$\frac{U^3}{D} (P - \varphi) d^3 pK \quad (1)$$

(Si l'on considérait des métaux différents, il faudrait faire intervenir un nouveau coefficient  $K'$  caractérisant la résistance du métal à l'usure.)

En passant d'une machine d'essai à une machine géométriquement semblable fonctionnant en un point homologue, le rapport  $\frac{U^3}{D}$ , qui donne en tous les points la proportionnalité des accélérations × vitesse de l'eau, est connu, ainsi que  $(P - \varphi)$  et  $d$ .

$K$  est obligatoirement expérimental et ne peut être déterminé que par des essais comparatifs sur les différents produits, en se plaçant pour ces essais, si possible, dans des conditions de similitude exacte, ou en laissant constants tous les autres termes de l'expression (1), ce qui ne présente une difficulté que pour  $(P - \varphi)$  lorsque la comparaison porte sur deux matières de  $\varphi$  différent.

Il reste à déterminer les facteurs de variation relative de  $p$ , nombre de grains par unité de surface de la paroi, lorsqu'en un même point homologue, les autres conditions viennent à changer.

Soit (fig. 3) le point  $S$  sur la paroi et supposons un écoulement entre deux plans parallèles. Considérons le tube de grains aboutissant au point  $S$  et compris entre deux plans distants de l'unité. Il sera limité dans la vue en plan par la trajectoire  $AS$  et, d'autre part, par la paroi  $SB$ . Tous les grains passant par  $AB = h$  se retrouvent sur la paroi en  $S$ . En prenant  $AB$  à une distance à l'amont telle que les vitesses du fluide et des grains  $y$  soient encore uniformes et égales à  $W_A$ , le nombre de grains passant par  $AB$  pendant un temps  $dt$  est proportionnel à :

$$h W_A \frac{C}{P d^3} dt.$$

où  $C$  est la concentration en poids.

Si on appelle  $W_S$  la vitesse des grains en  $S$ , ces grains se retrouvent en  $S$  sur une surface égale à  $W_S dt$ , soit par unité de surface un nombre de grains  $p$  proportionnel à :

$$h \frac{W_A}{W_S} \frac{C}{P d^3}$$

Comme nous avons supposé qu'à la paroi la vitesse du grain variait comme celle de l'eau, aux points homologues  $\frac{W_A}{W_S} = C^{te}$  et  $p$  est finalement proportionnel à  $h \frac{C}{P d^3}$ .

L'expression (1) devient :

$$U^3 \frac{P - \varphi}{P} K C \left( \frac{h}{D} \right) \quad (2)$$

Il convient désormais d'essayer de déterminer

quelles sont les relations entre  $P \rho D d$  et  $U$  pour lesquelles  $\frac{h}{D}$  reste constant, ou comment varie

$\frac{h}{D}$  en fonction de ces valeurs, c'est-à-dire examiner les conditions de similitude des trajectoires des grains et des trajectoires fluides.

De toute manière, l'expression ci-dessus montre d'ores et déjà que, dans la limite où le nombre de grains par unité de volume ne modifie pas les trajectoires des grains par rapport aux trajectoires liquides, ni les trajectoires liquides, ni les vitesses des grains à la paroi, L'USURE EST PROPORTIONNELLE A LA CONCENTRATION, toutes autres conditions restant inchangées.

CONDITIONS DE SIMILITUDE EXACTE  
DES TRAJECTOIRES  
DES GRAINS ET DES TRAJECTOIRES LIQUIDES

Soit SS la ligne de courant et S'S' la trajectoire du grain (fig. 4) passant par le point M'.

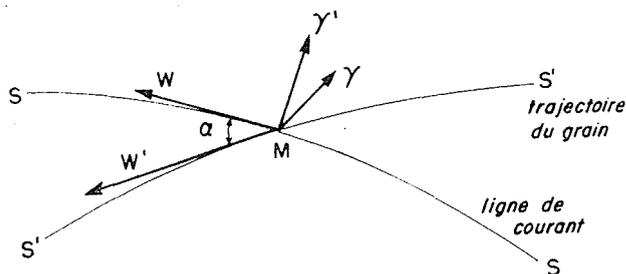


Fig. 4.

Supposons les grains sphériques, de diamètre  $d$  et de masse spécifique  $P$ , un liquide de masse spécifique  $\rho$ , et appelons  $\vec{\gamma}$  l'accélération à laquelle est soumise le grain et  $\vec{\gamma}$  l'accélération à laquelle serait soumis l'élément liquide qui serait à la place du grain considéré, mais suivant la ligne de courant SS.

$$+ \rho \frac{\pi d^3}{6} \vec{\gamma}$$

est égal à la résultante des différences de pression,

$$+ \rho \frac{\pi d^3}{6} \vec{\gamma}$$

s'appliquera au grain solide, ce dernier subissant d'autre part une force d'inertie :

$$- P \frac{\pi d^3}{6} \vec{\gamma}$$

Le grain sera donc soumis à une force de glissement :

$$\frac{\pi d^3}{6} (-P \vec{\gamma} + \rho \vec{\gamma})$$

qui sera équilibrée par la force de résistance qu'oppose le fluide au mouvement du corpuscule en déplacement relatif de vitesse  $u$  et qui peut s'exprimer sous la forme classique :

$$\vec{R} = - \frac{c}{2} \rho \frac{\pi d^2}{4} u \vec{u}$$

où  $c$  est une fonction du nombre de Reynolds :

$$R = \frac{u d}{\gamma}$$

On en déduit :

$$\frac{\pi d^3}{6} (-P \vec{\gamma} + \rho \vec{\gamma}) = \frac{c}{2} \rho \frac{\pi d^2}{4} u \vec{u}$$

soit :

$$-P \vec{\gamma} + \rho \vec{\gamma} = \frac{\rho}{d} u \vec{u} f \tag{3}$$

où  $f$  fonction du nombre de Reynolds =  $\frac{3}{4} c$ .

D'après les mesures effectuées à l'Etablissement Aérodynamique de Gottinger et cité par MM. BRUN, CARON et VASSEUR dans *Introduction à l'Etude de la Mécanique des Fluides*,  $c$  devient sensiblement constant et égal à 0,4 pour  $R > 2.000$ . Il n'est encore que 0,8 pour  $R = 200$ .

Partant du principe que dans une roue les zones où les vitesses  $u$  sont très faibles participent peu ou pas aux usures maximum qui font rebuter la pièce, et d'autre part en supposant que la théorie actuelle ne s'applique qu'à des grains de dimensions et à des liquides tels que les valeurs de  $R$  conduisent à des valeurs de  $c$  constantes ou peu variables, nous considérerons dans la suite  $f$  comme restant constant aux différents points homologues des machines identiques ou semblables lorsque  $P \rho \frac{d}{D}$  viennent à changer.

Dans le cas de similitude des écoulements du liquide et des grains, c'est-à-dire dans le cas où toutes les lignes de courant du fluide et toutes les trajectoires des grains restent géométriquement semblables, toutes les vitesses restent proportionnelles, les accélérations en tous points resteront proportionnelles à  $\frac{U^2}{D}$ ,  $U$  étant une vitesse quelconque prise comme référence et  $D$  une dimension de la machine prise également comme référence.

(3) peut se mettre sous la forme :

$$\frac{U^2}{D} \left[ -\frac{P}{\rho} \left( \frac{D}{U^2} \vec{\gamma} \right) + \left( \frac{D}{U^2} \vec{\gamma} \right) \right] = \frac{1}{d} u \vec{u} f$$

$$-\frac{P}{\rho} \left( \frac{D}{U^2} \vec{\gamma} \right) + \left( \frac{D}{U^2} \vec{\gamma} \right) = \frac{D}{d} \frac{\vec{u} \vec{u}}{U^2} f$$

où  $\left( \frac{D}{U^2} \vec{\gamma} \right)$  et  $\left( \frac{D}{U^2} \vec{\gamma} \right)$  sont des vecteurs sans dimensions qui restent constants en valeur et direction. Comme pour réaliser cette similitude, il faut en outre que le rapport  $\frac{u}{U}$  reste constant en tous points, puisque  $u$  doit varier proportionnellement à  $U$ , on voit que la similitude ne peut être réalisée que si  $\frac{\rho}{P} = C^{te}$  et  $\frac{D}{d} = C^{te}$ .

Il n'y a donc similitude effective que si d'un modèle à l'autre ces deux conditions sont réalisées (1).

Il sera très rare de trouver les circonstances permettant de réaliser la première condition pour des mixtures de nature différente.

La deuxième, par contre, permet de mettre en évidence les propriétés intéressantes suivantes en tenant compte que lorsque la similitude est réalisée, le terme  $\frac{h}{D}$  de l'expression (2) reste constant :

*Pour une même mixture et des machines semblables, l'usure est la même lorsque la grosseur des grains varie proportionnellement aux dimensions de la machine.*

D'autre part, comme les résultats ci-dessus montrent que la similitude des trajectoires n'est pas influencée par  $U$ , et revenant à l'expression (2) ci-dessus donnant les facteurs proportionnels à l'usure, on en déduit que pour une même mixture constituée de grains de mêmes dimensions et une même machine, ou pour deux machines semblables, la grosseur des grains variant comme le rapport de similitude des deux machines, l'usure sera proportionnelle à  $U^3$ , c'est-à-dire au cube des vitesses, et de ce fait à la puissance 3/2 des hauteurs faites par la machine.

(1) Dans *Introduction à l'étude de la Mécanique des Suspensions*, MM. BRUN, CARON et VASSEUR établissent les conditions générales de la similitude dans la mécanique des suspensions qui sont :

$$\frac{ud}{\gamma} = C^{te} \quad \frac{D}{d} = C^{te} \quad \frac{P}{\rho} = C^{te}$$

Dans l'application qu'ils en font aux aérosols ils négligent logiquement les forces de pesanteur devant les forces d'inertie et le terme d'inertie dû au fluide devant celui dû au corpuscule.

Dans l'application présente, c'est le terme dû à la viscosité, soit  $f$ , que nous avons supposé constant.

Notons qu'il a été déjà constaté expérimentalement et encore signalé dernièrement dans un article de M. PUYO (*la Houille Blanche*, n° 4, août 1949) que l'usure des turbines fonctionnant avec eau chargée variait comme la hauteur à la puissance 3/2.

En conclusion de ce qui précède  $\left( \frac{h}{D} \right)$  de la formule (2) n'est constant que si  $\frac{P}{\rho}$  et  $\frac{d}{D}$  sont aussi constants. Si ces valeurs viennent à changer d'une machine à l'autre, ou sur une même machine, la similitude rigoureuse n'existe plus et pour établir un rapport d'usure, il faudra étudier comment varie  $\frac{h}{D}$  lorsque  $\frac{P}{\rho}$  et  $\frac{d}{D}$  varient.

Pour examiner la variation de  $\frac{h}{D}$  en fonction de  $\frac{P}{\rho}$  et de  $\frac{d}{D}$ , il ne peut s'agir que d'établir une relation très approximative car elle est fonction du tracé de la machine et que, pour être généralisée et simplifiée, on doit sacrifier la précision.

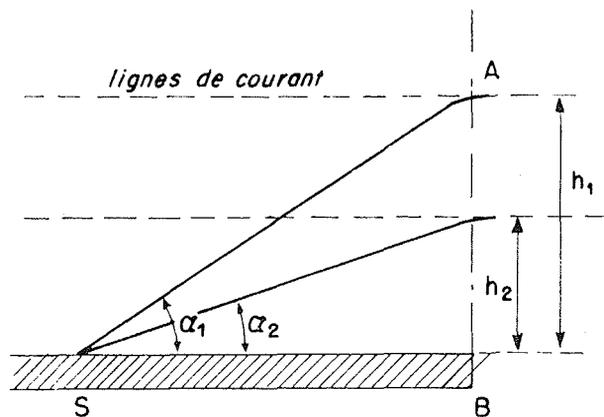


FIG. 5 a.

Dans ce qui suit, il sera étudié, en fonction de  $\frac{P}{\rho}$  et  $\frac{d}{D}$ , la variation des angles  $\alpha$  (voir fig. 4) que font en un point quelconque la trajectoire de liquide et celle du grain, puis il sera supposé que les rapports de  $\left( \frac{h}{D} \right)$  d'un cas à l'autre varient comme le rapport des  $\text{tg } \alpha$ .

Cette hypothèse serait rigoureusement exacte si, en reprenant les notations de la figure 3, on supposait (fig. 5 a) l'entrée AB perpendiculaire à l'aube BS elle-même rectiligne, et en outre que les trajectoires liquides sont des droites parallèles à BS, tandis que les trajectoires solides sont en tous points des droites inclinées de l'angle  $\alpha$  par rapport aux précédentes; on aurait alors :

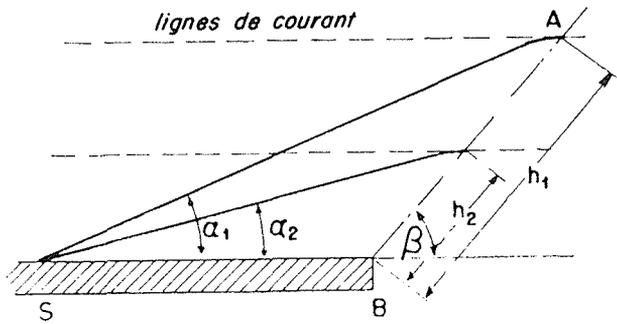


FIG. 5 b.

$$\frac{\frac{h_2}{BS}}{\frac{h_1}{BS}} = \frac{\text{tg } \alpha_2}{\text{tg } \alpha_1}$$

lorsque  $\alpha$  passe de  $\alpha_1$  à  $\alpha_2$ .

Si, partant des mêmes hypothèses que ci-dessus pour les trajectoires, on suppose par contre que l'entrée AB fait un angle  $\beta$  avec la paroi SB (fig. 5 b), on trouve :

$$\left( \frac{h_2}{BS} \right) = \frac{\text{tg } \alpha_2}{\text{tg } \alpha_1} \left[ \frac{1 - \frac{\text{tg } \alpha_1}{\text{tg } \beta}}{1 - \left( \frac{\text{tg } \alpha_2}{\text{tg } \alpha_1} \right) \frac{\text{tg } \alpha_1}{\text{tg } \beta}} \right] Z$$

D'où l'apparition d'un coefficient de correction Z affectant le rapport  $\frac{\text{tg } \alpha_2}{\text{tg } \alpha_1}$ .

Un certain nombre d'épures graphiques auxquelles nous avons procédé en prenant des réseaux présentant des analogies avec les écoulements dans les roues de pompes, ont montré que lorsqu'on faisait varier en tous points la valeur

de  $\text{tg } \alpha$  dans une même proportion,  $\frac{\frac{h_2}{BS}}{\frac{h_1}{BS}}$  pouvait

s'écarter du rapport des tangentes dans des proportions importantes pouvant atteindre 30 %. erreur pratiquement corrigée par un coefficient analogue à Z. Mais comme le coefficient Z est fonction en particulier des angles de la roue, qu'il est variable d'une machine à l'autre, nous avons maintenu en première approximation la proportionnalité de :

$$\frac{h}{D} \text{ à } \text{tg } \alpha$$

en nous bornant à signaler l'importance de l'erreur qui peut en résulter.

EXPRESSION DE  $\text{tg } \alpha$

La formule (3) peut se mettre sous la forme :

$$-(P - \varphi) \vec{\gamma} - P (\vec{\gamma}' - \vec{\gamma}) = \frac{\rho}{d} u \vec{u} f \quad (4)$$

ce qui exprime que le glissement de vitesse  $u$  se fera sous l'effet de la composante de deux forces :

l'une proportionnelle à  $(P - \varphi)$  ne dépendant que de l'écoulement du liquide puisque  $\vec{\gamma}$  est l'accélération due à la trajectoire liquide;

l'autre proportionnelle à  $P$  et à la différence vectorielle de l'accélération due à la trajectoire du corpuscule et celle due à la trajectoire liquide (voir fig. 6).

$\vec{\gamma}$  est la somme des vecteurs  $\frac{dW}{dt}$ , accélération tangentielle,  $\frac{U^2}{R}$  accélération centripète dans

le mouvement d'entraînement,  $\frac{W^2}{r}$  accélération centripète dans le mouvement relatif,  $r$  étant le rayon de courbure de la trajectoire liquide, et enfin  $2\omega W$ , accélération de CORIOLIS, avec  $\omega$  vitesse angulaire,  $2\omega W$  et  $\frac{W^2}{r}$  étant perpendiculaires à  $W$ .

$\vec{\gamma}'$  est la somme des vecteurs analogues correspondant à la trajectoire du corpuscule.

L'accélération centripète d'entraînement  $\frac{U^2}{R}$  étant la même pour  $\vec{\gamma}$  et  $\vec{\gamma}'$ , disparaît dans la détermination du vecteur :

$$\vec{\gamma}' - \vec{\gamma}$$

Comme en général dans une pompe  $\frac{dW}{dt}$  est très faible, nous supposons nuls  $\frac{dW}{dt}$  et  $\frac{dW'}{dt}$

$\vec{\gamma}' - \vec{\gamma}$  est alors la différence de deux vecteurs de grandeur  $\left(2\omega - \frac{W'}{r'}\right) W'$  et  $\left(2\omega - \frac{W}{r}\right) W$  perpendiculaire respectivement à  $W'$  et  $W$ .

Pour la simplification, nous admettons :

$$\left(2\omega - \frac{W}{r}\right) = \left(2\omega - \frac{W'}{r'}\right)$$

Cette approximation introduit une erreur qui affecte la direction et la valeur du secteur  $-P(\vec{\gamma}' - \vec{\gamma})$ . Mais ce dernier se compose avec le vecteur  $-(P - \varphi)\vec{\gamma}$ , qui est bien déterminé, pour donner le vecteur final recherché. De ce fait, cette approximation ne doit pas modifier

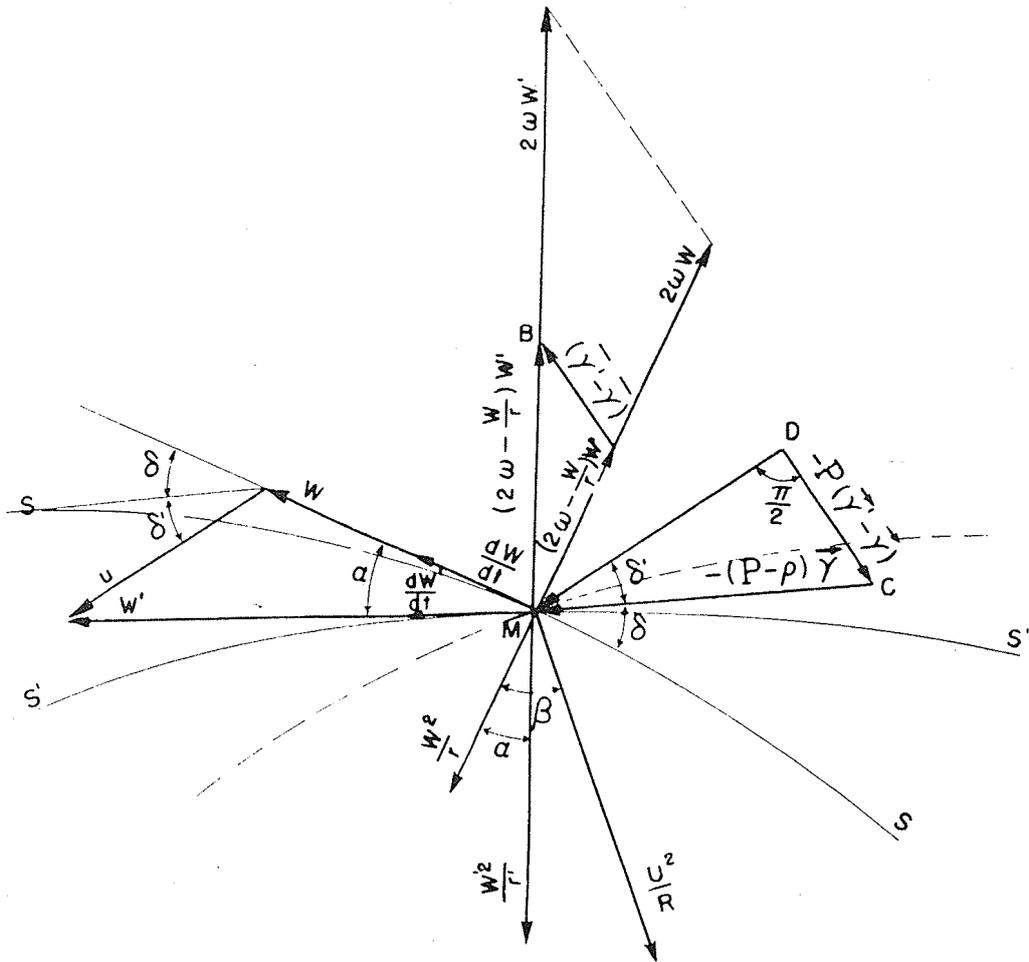


FIG. 6.

d'une manière importante les résultats approximatifs que l'on attend de ce calcul.

Dans ces conditions, le triangle MAB formé par les deux vecteurs de grandeur  $(2\omega - \frac{W}{r})W$  et  $(2\omega - \frac{W}{r})W'$  perpendiculaires respectivement à  $\vec{W}$  et  $\vec{W}'$  et proportionnels à ces valeurs, a comme troisième côté un vecteur résultant (fig. 6)  $AB = \vec{\gamma}' - \vec{\gamma}$  proportionnel à  $\vec{W}' - \vec{W} = \vec{u}$  dont la grandeur est donc  $(2\omega - \frac{W}{r})u$  et qui est perpendiculaire à  $\vec{u}$ .

D'où le triangle des forces MDC triangle rectangle dans lequel la composante des forces  $-P(\vec{\gamma}' - \vec{\gamma})$  vecteur DC, parallèle à AB, et  $-(P - \rho)\vec{\gamma}$  vecteur CM est la force vecteur DM qui crée le glissement du grain à la vitesse  $\vec{u}$  qui est dans la même direction.

On peut dès lors écrire l'expression finale :

$$-(P - \rho)\vec{\gamma} - P(\vec{\gamma}' - \vec{\gamma}) = \sqrt{(P - \rho)^2 \gamma^2 - P^2 u^2} \left(2\omega - \frac{W}{r}\right) = f \frac{\rho}{d} u^2$$

dont on peut tirer la valeur de  $u$  de l'équation :

$$\left(f \frac{\rho}{d}\right)^2 u^4 + P^2 u^2 \left(2\omega - \frac{W}{r}\right)^2 - (P - \rho)^2 \gamma^2 = 0$$

soit :

$$u^2 = \frac{1}{2} \frac{P^2}{\rho^2} \left(\frac{d}{f}\right)^2 \left(2\omega - \frac{W}{r}\right)^2$$

$$\left[ -1 + \sqrt{1 + 4 \left[ \frac{(P - \rho)\rho}{P^2} \frac{\gamma}{\left(2\omega - \frac{W}{r}\right)^2 \frac{d}{f}} \right]^2} \right]$$

et :

$$u^2 = \frac{d}{f} \left( \frac{P - \varphi}{\varphi} \right) \gamma A \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{1}{A^2}} \right] \quad (5)$$

avec :

$$A = \frac{P^2}{2} \frac{\left( 2\omega - \frac{W}{r} \right)^2 \frac{d}{f}}{(P - \varphi) \varphi \gamma}$$

soit :

$$A = \left[ \frac{\left( 2\omega - \frac{W}{r} \right)^2}{\gamma} \frac{D}{2f} \right] \frac{P^2}{(P - \varphi) \varphi} \frac{d}{D} \quad (6)$$

$$\frac{\left( 2\omega - \frac{W}{r} \right)^2}{\gamma} \frac{D}{2f}$$

est un terme sans dimension qui ne dépend que de l'écoulement du liquide et qui reste de ce fait constant en tous les points homologues de deux machines semblables fonctionnant à des régimes homologues.

Dans ces conditions, les valeurs de A, bien que différentes aux différents points de la machine, varient de la même proportion en fonction de  $P\varphi$  et  $\frac{d}{D}$  indépendamment du tracé des aubes.

Les équations (5) et (6) donnent la valeur de la vitesse du glissement du grain en fonction de  $P, \varphi, \frac{d}{D}$ . Pour sa direction par rapport à la vitesse du liquide au point considéré, on voit sur la figure 6 que l'angle de  $u$  par rapport à  $W$  est la somme de deux angles :

L'un,  $\delta$ , qui est l'angle entre l'accélération et la vitesse du liquide. Il reste donc constant pour des fonctionnements et des points homologues et est, de ce fait, indépendant de  $P\varphi$  et  $\frac{d}{D}$ .

L'autre,  $\delta'$ , fonction des caractéristiques des corpuscules et du liquide. En se reportant aux triangles des forces, on voit que :

$$\cos \delta' = \frac{\sqrt{[(P - \varphi) \gamma]^2 - [P(\vec{\gamma}' - \vec{\gamma})]^2}}{(P - \varphi) \gamma}$$

soit :

$$\cos \delta' = \frac{f \frac{\varphi}{d} u^2}{(P - \varphi) \gamma}$$

et, en remplaçant  $u^2$  par sa valeur (5) :

$$\cos \delta' = A \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{1}{A^2}} \right] \quad (7)$$

Enfin, l'expression de  $\text{tg } \alpha$ , angle entre la trajectoire liquide et solide, dont la variation entraîne la variation du nombre de grains à la paroi, est :

$$\text{tg } \alpha = \frac{u \sin(\delta + \delta')}{W + u \cos(\delta + \delta')}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{u}{W} \sin(\delta + \delta') \frac{1}{1 + \frac{u}{W} \cos(\delta + \delta')} \quad (8)$$

Si, en des fonctionnements homologues de machines semblables les valeurs de A varient bien dans les mêmes proportions en tous points de la machine lorsque  $P\varphi$  et  $\frac{d}{D}$  varient, et ceci indépendamment du tracé des aubes, par contre, les variations des valeurs de  $u$  et de  $\cos \delta'$  en chaque point cessent d'être proportionnelles entre elles à cause du deuxième membre entre parenthèses des équations (5) et (7) dont le rapport sera fonction de la valeur A dans lequel :

$$\frac{\left( 2\omega - \frac{W}{r} \right)^2}{\gamma} \frac{D}{2f}$$

est variable en chaque point.

D'autre part, l'expression (8) montre que les variations de  $\text{tg } \alpha$  en chaque point, lorsque les conditions varient, seront fonction non seulement de  $u$  et  $\delta'$ , mais encore de  $\delta$ , variables eux-mêmes en chaque point.

Il faut donc écarter la possibilité de trouver des relations de similitude exactes valables pour toutes les machines et rechercher des limites maximum et minimum de variations, compte tenu des tracés extrêmes rencontrés pratiquement pour les machines considérées.

SIMILITUDE APPROCHÉE DANS LE CAS OU LES CONDITIONS VARIENT DANS DES RAPPORTS TELS QUE LES ANGLES  $\delta'$  SONT CONSERVÉS.

Pour que les angles  $\delta'$  restent inchangés en tous les points de la machine lorsque  $P\varphi$  et  $\frac{d}{D}$  changent, il faut, d'après (7), que  $A = C^{te}$ , c'est-à-dire :

$$\frac{P^2}{(P - \varphi) \varphi} + \frac{d}{D} = C^{te} \quad (9)$$

En passant d'un fonctionnement avec indice « 1 » à un fonctionnement avec indice « 2 »,

comme en tous points  $\delta + \delta'$  reste inchangé, on aura :

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{\frac{u_2}{W_2} \left[ 1 + \frac{u_1}{W_1} \cos(\delta + \delta') \right]}{\frac{u_1}{W_1} \left[ 1 + \frac{u_2}{W_2} \cos(\delta + \delta') \right]}$$

En considérant les équations (5) et (7), on peut écrire :

$$u = \sqrt{\frac{P - \varphi}{\rho} \frac{\gamma}{f} d \cos \delta'}$$

d'où :

$$\frac{\frac{u_2}{W_2}}{\frac{u_1}{W_1}} = \sqrt{\left( \frac{P_2 - \varphi_2}{\rho_2} \right) \left( \frac{\rho_1}{P_1 - \varphi_1} \right) \frac{\frac{\gamma_2}{W_2^2} D_2 \frac{d_2}{D_2}}{\frac{\gamma_1}{W_1^2} D_1 \frac{d_1}{D_1}}}$$

Aux points homologues :

$$\frac{\gamma_1 D_1}{W_1^2} = \frac{\gamma_2 D_2}{W_2^2}$$

D'après la condition (9) :

$$\frac{\frac{d_2}{D_2}}{\frac{d_1}{D_1}} = \frac{P_1^2 (P_2 - \varphi_2) \rho_2}{P_2^2 (P_1 - \varphi_1) \rho_1}$$

d'où :

$$\frac{\frac{u_2}{W_2}}{\frac{u_1}{W_1}} = \left( \frac{P_2 - \varphi_2}{\rho_2} \right) \left( \frac{P_1}{P_1 - \varphi_1} \right) \quad (10)$$

et :

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \left[ \left( \frac{P_2 - \varphi_2}{\rho_2} \right) \left( \frac{P_1}{P_1 - \varphi_1} \right) \right] \left[ \frac{1 + \frac{u_1}{W_1} \cos(\delta + \delta')}{1 + \frac{u_2}{W_2} \cos(\delta + \delta')} \right]$$

Pour les écoulements habituels dans une roue de pompe  $\frac{u}{W} \cos(\delta + \delta')$  est toujours nettement

inférieur à 1. On aura donc des valeurs sûrement extrêmes de  $\frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1}$  en prenant successivement :

$$\frac{u}{W} \cos(\delta + \delta') = 1 \text{ et } 0$$

et en se plaçant dans les conditions les plus dé-

favorables, ce qui implique de considérer deux cas :

$$1^\circ \quad \frac{P_2 - \varphi_2}{\rho_2} > \frac{P_1 - \varphi_1}{\rho_1}$$

Dans ce cas on trouve :

$$\left( \frac{P_2 - \varphi_2}{\rho_2} \right) \left( \frac{P_1}{P_1 - \varphi_1} \right) \left[ 1 + \frac{\left( \frac{P_1 - \varphi_1}{\rho_1} \right) \left( \frac{P_2 - \varphi_2}{\rho_2} \right)}{2} \right] < \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} < \left( \frac{P_2 - \varphi_2}{\rho_2} \right) \left( \frac{P_1}{P_1 - \varphi_1} \right)$$

en prenant pour le terme de droite :

$$\frac{u_2}{W_2} \cos(\delta + \delta') = 0$$

ce qui entraîne, d'après (10)

$$\frac{u_1}{W_1} \cos(\delta + \delta') = 0$$

et pour le terme de gauche :

$$\frac{u_2}{W_2} \cos(\delta + \delta') = 1$$

ce qui entraîne, d'après (10) :

$$\frac{u_1}{W_1} \cos(\delta + \delta') = \left( \frac{P_1 - \varphi_1}{\rho_1} \right) \left( \frac{P_2}{P_2 - \varphi_2} \right)$$

$$2^\circ \quad \frac{P_2 - \varphi_2}{\rho_2} < \frac{P_1 - \varphi_1}{\rho_1}$$

Dans ce cas, on trouve :

$$\left( \frac{P_2 - \varphi_2}{\rho_2} \right) \left( \frac{P_1}{P_1 - \varphi_1} \right) < \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} < \left( \frac{P_2 - \varphi_2}{\rho_2} \right) \left( \frac{P_1}{P_1 - \varphi_1} \right) \left[ \frac{2}{1 + \left( \frac{P_2 - \varphi_2}{\rho_2} \right) \left( \frac{P_1}{P_1 - \varphi_1} \right)} \right]$$

en prenant pour le terme de gauche :

$$\frac{u_1}{W_1} \cos(\delta + \delta') = 0$$

et pour le terme de droite :

$$\frac{u_1}{W_1} \cos(\delta + \delta') = 1$$

ce qui entraîne, d'après (10) :

$$\frac{u_2}{W_2} \cos(\delta + \delta') = \left( \frac{P_2 - \varphi_2}{\rho_2} \right) \left( \frac{P_1}{P_1 - \varphi_1} \right)$$

Le rapport des vitesses d'usure est donné par l'équation (2) où  $\left(\frac{h}{D}\right)$  est remplacé par  $\text{tg } \alpha$ , soit :

rapport des vitesses d'usure ou inverse du rapport des temps nécessaires pour user la même épaisseur de métal

$$= \left(\frac{U_2}{U_1}\right)^3 \left(\frac{P_2 - \varphi_2}{P_2}\right) \left(\frac{P_1}{P - \varphi_1}\right) \frac{\text{tg } \alpha_2}{\text{tg } \alpha_1} \frac{C_2}{C_1} \frac{K_2}{K_1}$$

En remplaçant  $\frac{\text{tg } \alpha_2}{\text{tg } \alpha_1}$  par les valeurs trouvées ci-dessus, on arrive à la conclusion suivante :

Connaissant la vitesse d'usure d'une machine de dimension caractéristique  $D_1$ , fonctionnant à une vitesse caractéristique  $U_1$  avec une mixture

constituée d'un liquide de masse spécifique  $\varphi_1$  et de grains sphériques de diamètre  $d_1$  de masse spécifique  $P_1$ , avec une concentration en poids  $C_1$ , la vitesse d'usure d'une machine semblable de dimension  $D_2$ , fonctionnant au point homologue de la machine connue avec une vitesse caractéristique  $U_2$  et une mixture constituée d'un liquide de masse spécifique  $\varphi_2$  et de grains sphériques de masse spécifique  $P_2$ , de concentration en poids  $C_2$ , mais de diamètre tel que :

$$\frac{\frac{d_2}{D_2}}{\frac{d_1}{D_1}} = \frac{P_1^2}{\varphi_1 (P_1 - \varphi_1)} \frac{\varphi_2 (P_2 - \varphi_2)}{P_2^2}$$

est dans un rapport avec la vitesse d'usure de la machine connue compris entre les valeurs suivantes :

si 
$$\frac{P_2 - \varphi_2}{P_2} < \frac{P_1 - \varphi_1}{P_1}$$

$$\left(\frac{U_2}{U_1}\right)^3 \left(\frac{P_2 - \varphi_2}{P_2}\right)^2 \frac{C_2}{C_1} \frac{K_2}{K_1} < \text{rapport vitesse d'usure} < \left(\frac{U_2}{U_1}\right)^3 \left(\frac{P_2 - \varphi_2}{P_1}\right)^2 \left[ \frac{2}{1 + \left(\frac{P_2 - \varphi_2}{P_2}\right) \left(\frac{P_1}{P_1 - \varphi_1}\right)} \right] \frac{C_2}{C_1} \frac{K_2}{K_1} \quad (11)$$

si 
$$\frac{P_2 - \varphi_2}{P_2} > \frac{P_1 - \varphi_1}{P_1}$$

$$\left(\frac{U_2}{U_1}\right)^3 \left(\frac{P_2 - \varphi_2}{P_1}\right)^2 \left[ \frac{1 + \left(\frac{P_1 - \varphi_1}{P_1}\right) \left(\frac{P_2}{P_2 - \varphi_2}\right)}{2} \right] \frac{C_2}{C_1} \frac{K_2}{K_1} < \text{rapport vitesse d'usure} < \left(\frac{U_2}{U_1}\right)^3 \left(\frac{P_2 - \varphi_2}{P_1}\right) \frac{C_2}{C_1} \frac{K_2}{K_1} \quad (12)$$

SIMILITUDE APPROCHÉE DES USURES LORSQUE LE RAPPORT  $\frac{d}{D}$  VARIE, P ET  $\varphi$  RESTANT CONSTANTS.

La variation de  $\frac{d}{D}$ , même lorsque P et  $\varphi$  res-

tent constants, entraîne la variation non seulement des vitesses de glissement  $u$ , mais aussi de l'angle  $\delta'$ , d'où une complexité du phénomène encore plus grande que dans le cas précédent.

Il a été établi précédemment la relation suivante :

$$u = \sqrt{\frac{P - \varphi}{\varphi} \frac{\gamma}{f} d \cos \delta'}$$

soit :

$$\frac{u}{W} = \sqrt{\frac{P - \varphi}{f \varphi} \left(\frac{\gamma D}{W^2}\right) \frac{d}{D} \cos \delta'} = \sqrt{B \frac{d}{D} \cos \delta'}$$

en appelant :

$$B = \frac{P - \varphi}{f \varphi} \left(\frac{\gamma D}{W^2}\right)$$

qui ne dépend que de l'écoulement de l'eau en un point considéré quand P et  $\varphi$  sont inchangés et qui reste constant lorsque  $\frac{d}{D}$  varie.

L'expression de  $\text{tg } \alpha$  éq. (8) devient :

$$\text{tg } \alpha = \sqrt{B \frac{d}{D}} \frac{\sqrt{\cos \delta'} \sin (\delta + \delta')}{1 + \sqrt{B \frac{d}{D}} \sqrt{\cos \delta' \cos (\delta + \delta')}}}$$

L'angle  $\delta'$  est une fonction de  $\frac{d}{D}$  qui s'établit en partant d'une part de l'équation (6) :

$$A = A_1 \frac{d}{D}$$

en appelant :

$$A_1 = \frac{\left(2\omega - \frac{W}{r}\right)^2}{\gamma} \frac{D}{2f} \frac{P^2}{(P - \rho)\rho}$$

$A_1$  comme  $B$  restant constant en deux points homologues de deux machines semblables fonctionnant à des régimes homologues lorsque  $P$  et  $\rho$  restent constants, et d'autre part de l'équation (7) donnant  $\cos \delta'$  en fonction de  $A$ .

On en tire :

$$\frac{d}{D} = \frac{\sin^2 \delta'}{2 A_1 \cos \delta'} \quad (13)$$

D'où :

$$\text{tg } \alpha = \sqrt{B} \frac{d}{D} \left( \frac{\sqrt{\cos \delta'} \sin(\delta + \delta')}{1 + \underbrace{\sqrt{\frac{B}{2A_1}} \cos(\delta + \delta') \sin \delta'}_y} \right)$$

qui est proportionnel à  $\sqrt{\frac{d}{D}}$  et à une valeur  $y$  exprimée en fonction de  $\delta'$ , dont il faut étudier la variation lorsque  $\frac{d}{D}$  varie.

Remarquons tout d'abord, en se reportant à l'équation (7), que :

$$\begin{aligned} \frac{d(\cos \delta')}{d\left(\frac{d}{D}\right)} &= \frac{d(\cos \delta')}{dA} \frac{dA}{d\left(\frac{d}{D}\right)} \\ &= \left(-1 + \frac{1}{1 + A^2}\right) A_1 \end{aligned}$$

est toujours  $< 0$ , c'est-à-dire, ce qui était à prévoir, que  $\delta'$  croît avec  $\frac{d}{D}$  et réciproquement.

D'autre part, l'étude de

$$\frac{dy}{d\delta'}$$

montre que :

$$\frac{dy}{d\delta'} > 0$$

dans la limite où :

$$\delta < 35^\circ \quad \delta' < 30^\circ \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{B}{2A_1}} < 2$$

conditions pouvant être considérées comme admissibles pour les roues d'un tracé habituel. Donc  $y$  croît avec  $\delta'$ , c'est-à-dire avec  $\frac{d}{D}$  et réciproquement.

On en déduit que si :

$$\frac{d_2}{D_2} < \frac{d_1}{D_1}$$

$$\frac{\text{tg } \alpha_1}{\text{tg } \alpha_2} = \frac{\sqrt{\frac{d_2}{D_2}} y_2}{\sqrt{\frac{d_1}{D_1}} y_1} < \frac{\sqrt{\frac{d_2}{D_2}}}{\sqrt{\frac{d_1}{D_1}}}$$

puisque  $\frac{y_2}{y_1} < 1$ , ce qui va permettre de déterminer une valeur maximum de l'usure dans ce premier cas,

et que si :

$$\frac{d_2}{D_2} > \frac{d_1}{D_1}$$

$$\frac{\text{tg } \alpha_2}{\text{tg } \alpha_1} > \frac{\sqrt{\frac{d_2}{D_2}}}{\sqrt{\frac{d_1}{D_1}}}$$

d'où se déduira la valeur minimum de l'usure dans ce dernier cas.

Il faut encore déterminer l'autre valeur limite de  $\frac{\text{tg } \alpha_2}{\text{tg } \alpha_1}$  dans les deux cas considérés ci-dessus.

Pour ceci, multiplions le numérateur du deuxième membre de l'équation (14) par  $\left(\frac{d}{D}\right)^n$  et le dénominateur par la valeur équivalente tirée de l'équation (13) :

$$\frac{\sin^{2n} \delta'}{(2A_1)^n \cos^n \delta'}$$

Il vient :

$$\operatorname{tg} \alpha = \left( B \frac{d}{D} \right)^{0,5+n} \frac{1}{\left( \frac{B}{2A_1} \right)^n} \left[ \frac{(\cos \delta')^{1/2+n} \sin(\delta + \delta')}{\left[ 1 + \left( \frac{B}{2A_1} \right)^{1/2} \cos(\delta + \delta') \sin \delta' \right] \sin^{2n} \delta'} \right] \quad (15)$$

$\operatorname{tg} \alpha$  est proportionnel à :

$$\left( \frac{d}{D} \right)^{0,5+n}$$

et à la valeur X exprimée en fonctions de  $\delta'$ .

On trouve que dans les limites déjà considérées de  $\delta < 35^\circ$ ,  $\delta' < 30^\circ$  et  $\left( \frac{B}{2A_1} \right)^{1/2} < 2$ ,

$$\frac{dX}{d\delta'} \text{ est toujours } < 0 \\ \text{pour } n \geq 0,5.$$

Cette valeur maximum de  $n$  étant atteinte pour  $\delta = 0$ ,  $\delta' = 0$  et  $\left( \frac{B}{2A_1} \right)^{1/2} = 0$ , c'est-à-dire lorsque le grain ne se dirige plus vers la paroi, puisque lorsque  $\delta = 0$  le grain glisse dans la direction du fluide.

La valeur maximum de  $n$ , par contre, décroît rapidement lorsque  $\delta$  croît et lorsque  $\left( \frac{B}{2A_1} \right)^{1/2}$  augmente; pour  $\delta > 5^\circ$  elle reste inférieure à 0,35, même en admettant  $\left( \frac{B}{2A_1} \right) = 0$ .

En se reportant à l'expression de l'usure (formule 2) dans laquelle  $\left( \frac{h}{D} \right)$  est remplacée par  $\operatorname{tg} \alpha$  et où  $\frac{P - \rho}{P} \approx$  constante, on arrive à la conclusion suivante :

Connaissant la vitesse d'usure d'une machine de dimensions caractéristiques  $D_1$ , fonctionnant à une vitesse caractéristique  $U_1$ , avec une cer-

Sous réserve de vérification par l'expérience, il doit être possible d'adopter :

$$n \leq 0,35 \text{ et peut-être même } 0,3.$$

En introduisant  $n = 0,35$  dans l'équation (15), on en déduit que :

$$\text{si } \frac{d_2}{D_2} < \frac{d_1}{D_1}$$

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} \left( \frac{\frac{d_2}{D_2}}{\frac{d_1}{D_1}} \right)^{0,85} \frac{X_2}{X_1} > \left( \frac{\frac{d_2}{D_2}}{\frac{d_1}{D_1}} \right)^{0,85}$$

et que si :

$$\frac{d_2}{D_2} > \frac{d_1}{D_1}$$

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} < \left( \frac{\frac{d_2}{D_2}}{\frac{d_1}{D_1}} \right)^{0,85}$$

*taine mixture constituée de grains sphériques de diamètre  $d_1$ , leur concentration en poids étant  $c_1$ , la vitesse d'usure, d'une machine semblable de dimensions  $D_2$ , fonctionnant au point homologue de la machine connue à une vitesse caractéristique  $U_2$ , avec une mixture dont liquide et solide ont la même masse spécifique que pour la machine connue, mais constituée de grains sphériques de diamètre  $d_2$ , leur concentration en poids étant  $c_2$  est dans un rapport avec la vitesse d'usure de la machine connue, tel que*

si

$$\frac{d_2}{D_2} < \frac{d_1}{D_1}$$

$$\left( \frac{U_2}{U_1} \right)^3 \frac{c_2}{c_1} \left( \frac{\frac{d_2}{D_2}}{\frac{d_1}{D_1}} \right)^{0,85} \frac{K_2}{K_1} < \text{rapport des vitesses d'usure} < \left( \frac{U_2}{U_1} \right)^3 \frac{c_2}{c_1} \left( \frac{\frac{d_2}{D_2}}{\frac{d_1}{D_1}} \right)^{0,5} \frac{K_2}{K_1} \quad (16)$$

et si :

$$\frac{d_2}{D_2} > \frac{d_1}{D_1}$$

$$\left( \frac{U_2}{U_1} \right)^3 \frac{c_2}{c_1} \left( \frac{\frac{d_2}{D_2}}{\frac{d_1}{D_1}} \right)^{0,5} \frac{K_2}{K_1} < \text{rapport des vitesses d'usure} < \left( \frac{U_2}{U_1} \right)^3 \frac{c_2}{c_1} \left( \frac{\frac{d_2}{D_2}}{\frac{d_1}{D_1}} \right)^{0,85} \frac{K_2}{K_1} \quad (17)$$

## REMARQUES SUR L'UTILISATION DES RÉSULTATS

1° Pour déterminer le rapport maximum des vitesses d'usure, entre celles constatées sur un modèle réduit et celles à prévoir sur une machine pour laquelle dimensions et nature des matériaux et même de liquide, sont différentes, il faut tout d'abord appliquer les inégalités (11) ou (12) qui donnent le rapport des usures pour une valeur :

$$\frac{d'_2}{D_2} = \frac{d_1}{D_1} \frac{P_1^2}{P_2^2} \frac{(P_2 - \varphi_2) \varphi_2}{(P_1 - \varphi_1) \varphi_1}$$

c'est-à-dire, pour une certaine dimension  $d'_2$ , des grains différents de la dimension  $d_2$  finale.

Il faudra ensuite affecter le résultat obtenu pour le rapport des vitesses d'usure, du coefficient qui se déduit de (16) ou (17), soit respectivement :

$$\left(\frac{d_2}{d'_2}\right)^{0,5} \quad \text{ou} \quad \left(\frac{d_2}{d'_2}\right)^{0,85}$$

suivant que  $d_2 < d'_2$  ou  $d_2 > d'_2$ .

2° Pour la comparaison entre deux machines semblables, il sera pratique de remplacer :

$$\frac{U_2}{U_1} \quad \text{par} \quad \sqrt{\frac{H_2}{H_1}} \quad \text{ou} \quad \text{par} \quad \frac{Q_2}{Q_1} \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2$$

$\frac{H_2}{H_1}$  étant le rapport des hauteurs,

$\frac{Q_2}{Q_1}$  étant le rapport des débits,

$\frac{D_2}{D_1}$  étant le rapport des similitudes.

3° Le rapport des vitesses d'usure est égal à l'inverse du rapport des temps nécessaire à l'obtention de la même usure sur l'épaisseur des parois.

En passant d'une pompe d'essai à une pompe  $m$  fois plus grosse,  $m$  étant égal à  $\frac{D_2}{D_1}$ , on

pourra donc tenir compte de l'augmentation des épaisseurs des aubes, le temps trouvé pouvant être majoré d'un coefficient proche de  $m$  ou même égal à  $m$  si les usures sont bien régulières, et inversement.

4° Dans la comparaison de plusieurs solutions industrielles, il peut être intéressant de comparer non plus les temps, mais les poids du matériau pompé; dans ce cas, il faudra multiplier le rapport des temps :

$$\frac{t_1}{t_2} \quad \text{par} \quad \frac{Q_1 c_1}{Q_2 c_2}$$

5° En vue de généraliser les résultats, il a été adopté pour  $\delta, \delta', \sqrt{\frac{B}{2A_1}}, \frac{u}{W} \cos(\delta + \delta')$  des valeurs extrêmes qui ont conduit à trouver des écarts qui peuvent être importants entre les maxima et les minima des vitesses d'usure. Pour une machine déterminée et bien connue, on peut donner à  $\delta, \delta', \sqrt{\frac{B}{2A_1}}, \frac{u}{W} \cos(\delta + \delta')$  des limites beaucoup plus étroites qui réduiront les écarts entre maximum et minimum.

On pourra, de plus, apporter un terme correctif important à l'approximation du début consistant à écrire la proportionnalité entre  $\text{tg } \alpha$  et  $\frac{h}{D}$ .

## DISCUSSION

M. le Président remercie M. BERGERON, rappelle que la question qu'il a exposée et étendue aux mixtures liquides solides avec application aux pompes, se rattache à une étude dont la forme générale est due à M. BRUN, et souhaite que l'on puisse l'appliquer aussi aux turbines. Il demande à M. BERGERON s'il existe des termes pratiques de comparaison au sujet de deux pompes à caractéristiques un peu différentes et agissant dans la même mixture ainsi que cela existe pour les turbines.

M. BERGERON répond que la question de l'usure peut être traitée pour les turbines de la même façon que pour les pompes; compte tenu de la différence qu'il y a entre les limites des forces et les accélérations, d'une part pour les pompes, d'autre part dans les turbines. Il pense toutefois que la question présente moins d'intérêt pratique pour les turbines où les usures sont généralement moins importantes que dans les pompes par suite des mixtures beaucoup plus chargées que celles-ci sont susceptibles d'écouler.

La comparaison des résultats d'une pompe à une autre

semblable ne peut être faite qu'au bout de temps de fonctionnement assez longs, et sur des machines dont les caractéristiques ne s'écartent pas trop des conditions de similitude. Mais M. BERGERON indique que les résultats obtenus avec les formules qu'il propose ont été vérifiés avec une précision industrielle acceptable dans un cas où deux pompes semblables marchaient en série. Enfin, il pense pouvoir étendre les résultats aux écoulements le long de parois fixes et, éventuellement, aux usures causées par un jet sur une plaque, moyennant certaines corrections.

L'étude de ces cas offrirait un contrôle plus facile de la théorie que pour les pompes car il permettrait des essais systématiques avec grande vitesse d'usure et homogénéité des matériaux.

Cependant, M. le Président remarque que dans les turbines le matériau mixture est plus homogène que celui des pompes à déblai, que d'autre part l'usure est loin d'être négligeable et que, de ce fait, les turbines peuvent présenter, au point de vue contrôle des résultats, un intérêt peut-être plus grand que les pompes. Il pense aussi qu'il

serait intéressant de faire des essais pour voir quelle est la répartition de la partie solide dans les jets de sortie de la roue entre deux aubes.

M. REMENIÉRAS demande à M. BERGERON si on pourrait tirer de sa théorie de la similitude des enseignements pour la mise au point d'une méthode d'essai qui permettrait de caractériser un matériau de revêtement donné au point de vue de la résistance à l'usure : le Service des Etudes et Recherches Hydrauliques de l'E.D.F. tente de réaliser un « appareil d'usure » qui serait constitué soit par une éprouvette cylindrique tournant en eau calme, soit par un tunnel hydrodynamique contenant les éprouvettes et dans lequel on ferait circuler une mixture, soit encore par un jeu de mixture frappant une éprouvette. M. REMENIÉRAS demande à M. BERGERON s'il juge l'une de ces trois solutions préférable aux deux autres.

M. BERGERON estime que la théorie qu'il vient de présenter permet de calculer les limites d'usure dans les cas envisagés par M. REMENIÉRAS, sous réserve d'introduire les accélérations et les conditions résultant des écoulements réalisés. Il pense qu'on pourrait essayer les matériaux en mesurant l'usure d'éprouvettes constituant les parois déviant un écoulement plan simple pour lequel courbures et accélérations seraient bien définies en tous points, ce qui faciliterait l'établissement des formules des rapports d'usure.

M. le Président félicite M. Bergeron de son exposé.

✱

En ce qui concerne la question de M. REMENIÉRAS relative à l'usure par jet, M. BERGERON a rédigé la réponse suivante :

L'essai au jet de mixture sur une éprouvette de métal ou de matériau de revêtement, pour en déterminer sa résistance à l'usure, est déjà appliqué. Dans ce cas précis, l'essai au jet est à notre avis intéressant, sous condition que le jet de mixture soit pour tous les essais rigoureusement identique tant en ce qui concerne diamètre, vitesse, distance à l'éprouvette que pour la nature de la mixture, nature des grains, diamètre, concentration. Il permet de conclure qu'un métal ou un matériau s'use dans une certaine proportion par rapport à un autre lorsqu'ils sont

soumis aux mêmes conditions d'usure bien qu'il ne faille voir dans cette proportion qu'une indication sur l'ordre de grandeur. En effet, pour n'examiner qu'un cas des causes d'erreurs, si la forme de l'usure diffère d'une éprouvette à l'autre, les écoulements s'en trouvent modifiés le long de la paroi; les deux éprouvettes ne sont dès lors plus soumises aux mêmes efforts provoquant l'usure. Le rapport des pertes de poids des éprouvettes dans le même temps ne peut donc être étendu aux durées d'un revêtement en place par rapport à un autre qu'avec beaucoup de prudence, en critiquant en particulier la forme des usures des éprouvettes en essayant si possible d'analyser séparément l'usure par choc au centre, de l'usure par frottement sur le pourtour et en assimilant ces résultats aux écoulements effectivement réalisés.

Par contre, à notre avis, l'essai au jet devient tout à fait contestable lorsqu'il s'agit de comparer la valeur abrasive de différentes mixtures sur des éprouvettes identiques si l'on veut en déduire par exemple qu'une usure double des éprouvettes conduit à une usure double de la roue ou de la bêche d'une machine. En effet, bien que les filets liquides restent identiques (si l'on suppose évidemment la constance de cet écoulement), les trajectoires des grains à l'intérieur du jet varient avec la nature des grains, leur densité et leur grosseur. Pour pouvoir tirer une conclusion pratique des essais, il faudrait donc faire pour le jet une étude de similitude analogue à celle que nous avons essayé de faire pour les roues en déterminant en particulier la variation du nombre de grains à la paroi lorsque les conditions varient. De plus, il faudrait tenir compte qu'il s'agit d'un écoulement de révolution alors que les écoulements rencontrés en général dans la pratique peuvent plus normalement être assimilés à des écoulements plans. Ce dernier point est important car il est à remarquer que l'équation (2) du mémoire qui est :

$$U \propto \frac{P - \rho}{P} KC \left( \frac{h}{D} \right)$$

pour un écoulement plan, devient :

$$U \propto \frac{P - \rho}{P} KC \left( \frac{h}{D} \right)^2$$

pour un écoulement de révolution.

