

## NOTULE HYDRAULIQUE

# Remarque sur la théorie du premier ordre des ondes de translation

English text, p. 761.

La théorie des ondes de translation dans les canaux découverts a été étudiée avec beaucoup de succès par de nombreux auteurs, parmi lesquels doivent être cités : MM. MASSÉ<sup>1</sup>, DEYMIÉ<sup>2</sup> et CAGNIARD<sup>3</sup> (*ces chiffres se rapportent à la Bibliographie qui se trouve à la fin du texte anglais, p. 763*).

Les travaux de ces derniers revêtent une importance particulière, car, en employant des méthodes élégantes d'analyse, ils ont élaboré une théorie au premier ordre d'approximation qui donne une vue d'ensemble du phénomène des intumescences dans les cours d'eau.

Cette théorie se résume comme suit<sup>1</sup> :

Les équations de mouvement et de continuité d'un écoulement non permanent dans un canal découvert à largeur indéfinie, peuvent s'écrire de la façon suivante :

$$\left. \begin{aligned} \left(1 - \frac{Q^2}{gH^3}\right) \frac{\partial H}{\partial s} + \frac{2}{gH^2} Q \frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{1}{gH} \frac{\partial Q}{\partial t} = \sin I - \frac{CQ^2}{H^3} \\ \frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \end{aligned} \right\} (1)$$

Ici, nous désignons par :

- $g$ , l'accélération de la pesanteur,
- $s$ , la distance mesurée le long du canal (positivement vers l'aval),
- $t$ , le temps,
- $C$ , le coefficient de frottement de CHÉZY,

$H$ , la hauteur d'eau à un instant donné,

$I$ , la pente du fond du canal,  
et par

$Q$ , le débit.

Désignons maintenant par  $U$  la vitesse moyenne dans le canal, avant le passage de l'intumescence; nous supposons que l'écoulement initial est permanent et uniforme et qu'il s'effectue en régime fluvial.

Si  $h$ ,  $u$  et  $q$  représentent les perturbations, supposées petites, occasionnées aux valeurs primitives de  $H$ ,  $U$  et  $Q$  par le passage de l'onde, nous obtenons, au premier ordre d'approximation près :

$$\begin{aligned} - (gH - U^2) \frac{\partial^2 q}{\partial s^2} + 2U \frac{\partial^2 q}{\partial s \partial t} + \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} \\ + 3gI \frac{\partial q}{\partial s} + \frac{2gI}{U} \frac{\partial q}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Comme l'indique M. MASSÉ<sup>1</sup>, l'équation (2) peut s'écrire sous une forme plus exacte qui tient compte de la répartition non uniforme des vitesses sur une verticale :

$$\begin{aligned} - \frac{(gH - \alpha U^2)}{\beta} \frac{\partial^2 q}{\partial s^2} + \frac{\alpha + \beta}{\beta} U \frac{\partial^2 q}{\partial s \partial t} \\ + \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + \frac{3gI}{\beta} \frac{\partial q}{\partial s} + \frac{2gI}{\beta U} \frac{\partial q}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Les valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  s'identifient à :

$$\alpha = 1,096$$

$$\beta = 1,040$$

\*  
\*\*

L'analyse se trouve de beaucoup simplifiée si l'on exprime l'équation (3) sous une forme sans dimensions.

Ecrivant les symboles précédents avec un prime pour désigner les grandeurs habituelles (avec dimensions), nous effectuerons les transformations suivantes :

$$t' = \frac{\beta U}{g I} t$$

$$s' = \frac{\beta U}{g I} \sqrt{\frac{g H - \alpha U^2}{\beta}} s$$

$$u' = \sqrt{\frac{g H - \alpha U^2}{\beta}} u$$

$$q' = \frac{U}{g I} (g H - \alpha U^2) q$$

L'équation (3) devient alors :

$$-\frac{\partial^2 q}{\partial s^2} + 2b \frac{\partial^2 q}{\partial s \partial t} + \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + 3a \frac{\partial q}{\partial s} + 2 \frac{\partial q}{\partial t} = 0 \quad (4)$$

avec :

$$a = \frac{U}{\sqrt{\frac{g H - \alpha U^2}{\beta}}}$$

et :

$$2b = 2,054 a$$

Les méthodes d'analyse utilisées par les auteurs mentionnés diffèrent ensuite; néanmoins, elles sont toutes caractérisées par la recherche des solutions de (4) de la forme :

$$X_p(s) e^{pt}$$

suivant les notations de M. CAGNIARD<sup>3</sup>.

De telles solutions (5) sont cependant incomplètes, car il existe également des solutions singulières de la forme :

$$Y_p(s) t e^{pt} \quad (5)$$

En effet, si nous substituons cette expression dans l'équation (4), nous trouvons les deux équations suivantes :

La première en  $t e^{pt}$  s'écrit :

$$-Y'' + (2bp + 3a) Y' + (p^2 + 2p) Y = 0$$

et la deuxième, en  $e^{pt}$ , s'écrit :

$$2b Y' + (2p + 2) Y = 0$$

(ici,  $Y'$  et  $Y''$  désignent les dérivées de  $Y$  par rapport à  $s$ ).

On obtient finalement deux solutions possibles pour  $Y$  de la forme :

$$Y = K t e^{pt} e^{-s(p+1)/b} \quad (6)$$

où  $K$  est constant, et les valeurs de  $p$  (qui sont complexes) correspondent aux racines de l'équation :

$$x^2 (b^2 + 1) + (3a - 2b)x + 1 = 0$$

avec :

$$p = xb - 1$$

Il est bien entendu qu'on peut choisir les valeurs de  $K$  de façon à obtenir une seule solution réelle.

D'autre part, si nous considérons le front d'une intumescence, il existe une relation entre  $s$  et  $t$  :

$$s = (U \pm \sqrt{gH}) t$$

Le signe plus s'applique évidemment à une onde se dirigeant vers l'aval, et le signe moins, à une onde se dirigeant vers l'amont.

Cette dernière relation permet d'écrire l'équation (6) sous la forme :

$$Y = K t e^r \quad (7)$$

où la partie réelle de  $r$  est toujours négative (sa valeur dépend de la direction de propagation de l'onde).

Afin d'illustrer l'importance de cette remarque, nous avons étudié le cas d'une onde de translation de faible longueur se déplaçant dans un canal de largeur constante. L'onde, dont l'amplitude atteignait, au départ, environ 1 m, se propageait vers l'aval; la hauteur d'eau initiale  $H$  était de 8 m.

Après un temps de parcours de quinze minutes, l'intumescence (selon la théorie habituelle du premier ordre) subissait une réduction d'am-

plitude de 28 %, tout en conservant à peu près la même forme (voir fig. 1). D'après la théorie de BOUSSINESQ<sup>4</sup> (avec confirmation par une analyse approchée où l'intumescence est remplacée par des têtes d'onde), l'amortissement était net-

tement supérieur et le profil en long de l'intumescence subissait un *changement radical* (voir la fig. 2). Or, ce dernier résultat correspond bien à l'expérience; il peut également être justifié par la théorie exacte des intumescences, c'est-à-dire

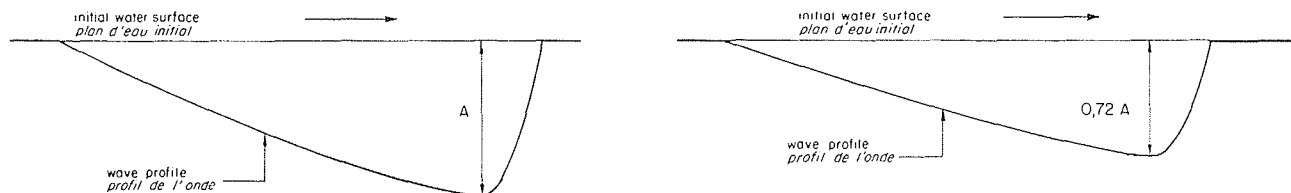


FIG. 1.

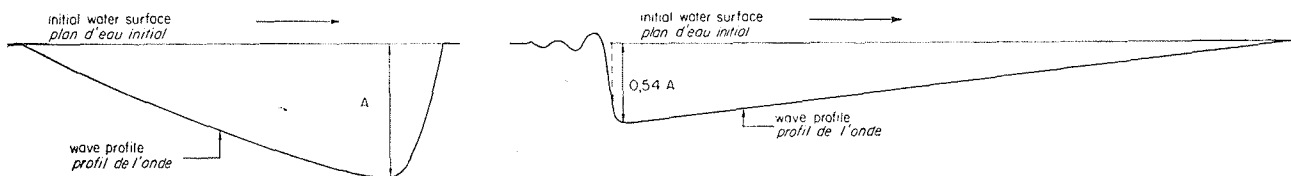


FIG. 2.

par la théorie des caractéristiques appliquée aux équations (1).

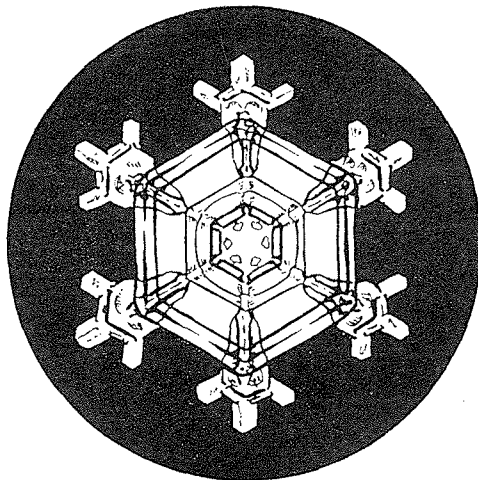
Autant que l'on puisse en juger d'après ces résultats, la théorie du premier ordre demanderait à être modifiée suivant les indications précisées ci-dessus. De fait, la théorie de BOUSSINESQ montre que la modification de forme du front de l'intumescence (sur ce point la formule de BOUSSINESQ est à peu près exacte) est surtout due à

un terme de la forme  $te^{vt}$ , comme le laisse supposer l'équation (7).

Nous espérons pouvoir publier dans un numéro ultérieur de plus amples détails sur cette théorie.

G. D. RANSFORD,

*Ingénieur au Laboratoire Dauphinois  
d'Hydraulique (Grenoble).*



HYDRAULIC BRIEF

## A contribution to the first-order theory of translation waves

*Texte français, p. 758.*

Illustrations can be seen in the French text, p. 758.

The theory of translation waves in open channels has been studied with much success by numerous authors, amongst whom MM. Massé<sup>1</sup>, Deymié<sup>2</sup>, and Cagniard<sup>3</sup> can be cited (superscripts refer to the list of references at the end).

In the writings of these authors, in particular, a first-order theory of translation waves has been developed, as follows (see Massé<sup>1</sup>) :

The equations of motion and continuity for varied flow in an open channel of large width can be put in the form :

$$\left. \begin{aligned} \left(1 - \frac{Q^2}{gH^3}\right) \frac{\partial H}{\partial s} + \frac{2}{gH^2} Q \frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{1}{gH} \frac{\partial Q}{\partial t} = \sin I - \frac{CQ^2}{H^3} \\ \frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \end{aligned} \right\} (1)$$

where :

- g* denotes the acceleration of gravity,
- s* the distance measured *down* the channel,
- t* the time,
- C* the Chezy friction coefficient,
- H* the depth of flow at any instant,
- I* the slope of the channel bottom,
- and :
- Q* the discharge.

Now let *U* denote the mean velocity in the channel

prior to the passage of the wave (the initial flow is supposed steady streaming and uniform).

If now *h*, *u* and *q* denote the supposedly small perturbations of the original values of *H*, *Q* and *U* due to the passage of the wave, we find to the first order of approximation that :

$$\begin{aligned} - (gH - U^2) \frac{\partial^2 q}{\partial s^2} + 2U \frac{\partial^2 q}{\partial s \partial t} + \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} \\ + 3gI \frac{\partial q}{\partial s} + \frac{2gI}{U} \frac{\partial q}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

As Mr. Massé<sup>1</sup> points out, equation (2) can be put into a more accurate form so as to take the non-uniform velocity distribution in actual channel flow into account :

$$\begin{aligned} - \frac{(gH - \alpha U^2)}{\beta} \frac{\partial^2 q}{\partial s^2} + \frac{\alpha + \beta}{\beta} U \frac{\partial^2 q}{\partial s \partial t} \\ + \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + \frac{3gI}{\beta} \frac{\partial q}{\partial s} + \frac{2gI}{\beta U} \frac{\partial q}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

The values of  $\alpha$  and  $\beta$  adopted are :

$$\begin{aligned} \alpha &= 1.096 \\ \beta &= 1.040 \end{aligned}$$

\*  
\*\*

To handle equation (3), it proves convenient to express the variables *q*, *s*, *t*, and *u*, in non dimensional form. This is done as follows.

Writing the above symbols with a dash to denote that they are the usual (dimensional) variables, we apply the following transformations :

$$t' = \frac{\beta U}{g l} t$$

$$s' = \frac{\beta U}{g l} \sqrt{\frac{g H - \alpha U^2}{\beta}}$$

$$u' = \sqrt{\frac{g H - \alpha U^2}{\beta}} u$$

$$q' = \frac{U}{g l} (g H - \alpha U^2) q$$

Equation (3) now becomes :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 q}{\partial s^2} + 2b \frac{\partial^2 q}{\partial s \partial t} + \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} \\ + 3a \frac{\partial q}{\partial s} + 2 \frac{\partial q}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

where :

$$a = \frac{U}{\sqrt{\frac{g H - \alpha U^2}{\beta}}}$$

and :

$$2b = 2.054 a$$

The methods of analysis employed by the authors mentioned above vary from this point on, but all have one feature in common—the aim is to find solutions of (4) of the form :

$$X_p(s) e^{pt}$$

(this being the notation used by Cagniard<sup>3</sup>).

\*\*

These solutions are however incomplete, because there also exist singular solutions of the form

$$Y_p(s) t e^{pt} \quad (5)$$

In fact, if we substitute (5) in the original equation (4) we find the two following equations :

The first, in  $t e^{pt}$ , gives :

$$-Y'' + (2bp + 3a) Y' + (p^2 + 2p) Y = 0$$

and the second, in  $e^{pt}$ , gives :

$$2b Y' + (2p + 2) Y = 0$$

(Here  $Y'$  and  $Y''$  denote the derivatives of  $Y$  with respect to  $s$ .)

We thus have two solutions for  $Y$  of the form :

$$Y = K t e^{pt} e^{-s(p+1)/b} \quad (6)$$

where  $K$  is a constant, and the values of  $p$  (which turn out to be complex) correspond to the roots of the equation :

$$x^2 (b^2 + 1) + (3a - 2b)x + 1 = 0$$

with :

$$p = xb - 1$$

The constants  $K$  can of course be chosen so as to give a single real solution.

Moreover, if we consider the front of a wave, there is a relation between  $s$  and  $t$  :

$$s = (U \pm \sqrt{gH}) t$$

where the  $+$  sign is to be taken for a wave travelling downstream, and the  $-$  sign for a wave travelling upstream. This relationship can be used to write (6) in the form :

$$Y = K t e^{rt} \quad (7)$$

where the real part of  $r$  is always negative (the value of  $r$  differs according to the direction in which the wave moves).

\*\*

To illustrate the importance of this remark, the author has studied the case of a translation wave of short length travelling down a channel of constant width. The initial amplitude was approximately 1 metre, and the undisturbed depth of flow 8 metres.

After a 15 minutes' travel, the wave (according to the ordinary first-order theory) has suffered a 28% reduction in amplitude, though its form has practically remained unchanged (see fig. 1). According to the Boussinesq theory<sup>4</sup> (with confirmation by a wavelet analysis), the damping has been greater, and the wave form has *changed markedly* (see fig. 2). The latter result is known to be correct in practice and can indeed be justified by the exact theory of translation waves, i.e., by the theory of characteristics applied to equations (1).

As can be judged from these results, the first order theory needs to be modified along the lines already indicated. In fact, the Boussinesq<sup>4</sup> analysis shows that the change in form of the front of the wave (where the Boussinesq formula is quite accurate) is above all due to a term of the form  $t e^{rt}$ , as equation (7) suggests.

The present writer hopes to publish the results of the foregoing wave analysis in greater detail subsequently.

G. D. RANSFORD.

## BIBLIOGRAPHIE — REFERENCES

- (1) *See either* : Consulter soit :  
 MASSÉ : « Thèses sur l'amortissement des intumescences qui se produisent dans les eaux courantes », Hermann & Co. Paris, 1935.  
 Or : Soit :  
 MASSÉ : « L'amortissement des intumescences », *Revue Générale de l'Hydraulique*, p. 300, 1935.
- (2) DEYMIÉ : « Propagation d'une intumescence allongée », *Revue Générale de l'Hydraulique*, p. 138, 1935.
- (3) CAGNIARD : « Hydrodynamique Fluviale. — Régimes variables », *Revue Générale de l'Hydraulique*, p. 128, 1937.
- (4) BOUSSINESQ : « Essai sur la théorie des eaux courantes », Mémoires de divers savants à l'Académie des Sciences, Vol. 23, 1877.  
 Pour les lecteurs de langue anglaise :  
*English readers should refer to* :  
 KEULEGAN, G. H., and PATTERSON, G. W. : "Effect of turbulence and channel slope on translation waves", Research paper RP 1544, *Journal of Research of National Bureau of Standards*, Vol. 30, June 1943.

## Errata

DETERMINATION GRAPHIQUE DE LA LIGNE D'EAU ET CALCUL DES REMOUS  
 GRAPHIC DETERMINATION OF BACKWATER CURVES

par FRANCIS F. ESCOFFIER

(N° 3, 1951; Texte français, p. 411. — *English text* : p. 412)

§ 4, au lieu de :  $f'' = \frac{fL_d/f'L_u}{L_d/L_u}$   
 for :

lire :  $f'' = \frac{fL_d + f'L_u}{L_d + L_u}$   
 read :

Les deux derniers § doivent se présenter comme suit :

*The last two § should be as follows :*

## FRANÇAIS

Pour déterminer si le tronçon représenté dans la figure 2 est à faible ou à forte pente, il suffit d'examiner la position relative des courbes  $f'_0$  et  $f_1$ . Si la courbe  $f'_0$  se maintient complètement au-dessus de la courbe  $f_1$  (comme sur la figure), le tronçon considéré est à forte pente. Si la position relative des deux courbes est inversée, le tronçon est à faible pente. Si les deux courbes coïncident, cas tout à fait rare, le tronçon est à la pente critique. Si, comme il est plus vraisemblable, les deux courbes se coupent, le tronçon appartient à un type au-dessus du point d'intersection, et à l'autre type en dessous de ce même point.

Le fait de se couper pour les courbes  $f'_0$  et  $f_1$  est plutôt une règle générale qu'une exception dans les canaux en pente. En fait, il arrive souvent que les deux courbes se coupent deux fois. Ceci se produit dans une conduite coulant partiellement en charge tant que la pente est assez raide. La conduite fonctionne comme un canal à faible pente, lorsqu'elle est presque pleine ou presque vide, et comme un canal à forte pente dans les états intermédiaires.

## ANGLAIS

Whether the reach represented in fig. 2 has mild-slope or steep-slope characteristics depends on the relative position of the  $f'_0$  and  $f_1$  curves. If the  $f'_0$  curve lies entirely above the  $f_1$  curve as shown in the diagram the reach has steep-slope characteristics. If the relative position of the two curves is reversed the reach has mild-slope characteristics. If the two curves coincide, a highly unusual case, the reach has critical-slope characteristics. If, as is more likely, the two curves intersect then the reach has one type of characteristics for stages above the point of intersection and the other type for stages below that point.

The intersection of the  $f'_0$  and  $f_1$  curves is the rule rather than the exception in steep channels. In fact it sometimes happens that the two curves intersect twice. This is the case in a closed conduit flowing partly full provided the slope is steep enough. The conduit functions as a mild-slope channel when it is nearly full or nearly empty and as a steep-slope channel at intermediate stages.