

# Étude de la mise en régime des écoulements sur les ouvrages à forte pente

## Application au problème de l'entraînement d'air

### Study of the setting up of the flow regime on high gradient structures

#### Application to air entrainment problem

PAR G. HALBRONN

INGÉNIEUR DES PONTS ET CHAUSSÉES

(Voir la Houille Blanche n° 1, p. 24 et n°3, 1952, p. 347.)

Etude théorique de l'écoulement à surface libre d'un fluide sur un coursier long, compte tenu de l'effet de la viscosité; calcul des vitesses locales et des profondeurs en régime laminaire et turbulent; existence d'un point critique où la turbulence commence à faire sentir son action en surface et à partir duquel l'entraînement d'air devient possible. — Vérifications expérimentales. — Etude schématique du critère d'apparition de l'eau blanche en aval du point critique.

*Theoretical study of free surface fluid flow over a long spillway, account being taken of viscosity.*

*Calculation of local velocities and depths in laminary and turbulent flow regimes. Existence of a critical point where turbulent action becomes noticeable on the surface and air entrainment becomes possible. Experimental verification. Schematic study of criterion of appearance of "white water" below critical point.*

#### INDEX DES NOTATIONS (suite)

NOTATION	DÉFINITION
$l$	Diamètre moyen des tourbillons superficiels.
$\sqrt{\bar{v}'^2}$	Vitesse moyenne des fluctuations normales à la surface libre.
$\Delta$	Ordonnée du sommet de la goutte.
$F_y$	Projection sur Oy des forces extérieures agissant sur la goutte.
$m$	Masse d'une goutte.
$\Delta_1$	Élévation maximum d'une goutte.
$d\mathcal{C}$	$d\mathcal{C} = F_y d\Delta$ . Travail élémentaire de la composante suivant Oy des forces extérieures.
$\alpha$	$\alpha = \frac{l}{Y}$
$\tau$	Tension tangentielle.
$u', v'$	Fluctuations longitudinales et transversales de la vitesse.
$\beta$	$\beta = \frac{\bar{v}'^2}{u_*^2}$
$\mathcal{R}$	Rayon de courbure de la surface libre.
$T$	Tension superficielle.
$\alpha$	$\alpha = \sqrt{\frac{2T}{\rho g}}$
$\theta, \varphi, \psi, \theta_1, \psi_1$	Angles définis figure 26.
$\lambda$	$\lambda = \frac{l}{2\alpha} \sqrt{\cos i}$

NOTATION	DEFINITION
$F_a$	Composante suivant $Oy$ de la force exercée sur une goutte par la tension superficielle.
$\tilde{G}_a$	Travail de la composante suivant $Oy$ des forces de capillarité.
$\gamma_a$	$\gamma_a = \frac{2}{\pi} \int_0^{\varphi_1} \sin \theta_1 \sin \varphi \, d\varphi.$
$F_p$	Composante suivant $Oy$ de la force exercée sur une goutte par la gravité et les pressions.
$\tilde{G}_p$	Travail de cette composante.
$\gamma_p$	$\gamma_p = \frac{1}{\pi} \int_0^{\varphi_1} (\theta_1 + \sin \theta_1 \cos \theta_1 - 2 \sin \theta_1 \cos \varphi) \sin \varphi \, d\varphi.$
$F_r$	Composante suivant $Oy$ de la force exercée sur une goutte par le vent relatif.
$\rho_a$	Masse spécifique de l'air.
$\tilde{V}$	Vitesse d'une goutte.
$\tilde{G}_r$	Travail de la composante suivant $Oy$ des forces exercées par le vent relatif.
$\gamma_r$	$\gamma_r = \frac{\tilde{G}_r}{\rho_a l^2 u_1^2}.$
$\nu_a$	Viscosité cinématique de l'air.
$M(\lambda, \pi)$	Travail des forces qui retiennent la particule liquide.
$N(\lambda, \pi)$	Travail des forces qui l'arrachent.
$t_1$	Temps au bout duquel l'altitude $\Delta_1$ est atteinte par la goutte.
$L$	Distance parcourue par la goutte entre les instants 0 et $t_1$ .
$\gamma$	$\gamma = \frac{16}{\pi} \frac{\rho_a}{\rho} \left( \frac{C}{\sqrt{g}} + \frac{1}{k} \right)^2 \frac{\gamma_r(\pi)}{\alpha} + \frac{2\beta}{\alpha}$
$i_l$	Angle limite tel que $\text{tg } i_l = \frac{2}{\gamma}$ .
$q_m$	Valeur du débit pour laquelle l'eau blanche apparaît en régime uniforme sur une pente $i$ .
$R_x$	Nombre de Reynolds $R_x = \frac{u_1 x}{\nu}$ .
$C_f$	Coefficient de frottement local $C_f = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2} \rho u_1^2}$ .
$a_0$	$a_0 = \frac{1}{k\sqrt{2} \log e} \log \frac{D'}{2c_1}.$
$b_0$	$b_0 = \frac{1}{k\sqrt{2} \log e}.$
$z_1$	$z_1 = z - \frac{2(2+n)}{3+n}.$
$\xi$	$\xi = \frac{5}{B} z^{1-n} e^z.$
$\sigma$	$\sigma = \frac{u_1^{2-n}}{\xi} - 1.$
$b_1, b_2, \dots, b_m$	Coefficients numériques.
$g(\eta)$	$g(\eta) = \frac{u}{u_1}.$
$h_{n1}, n_1$	Constantes.
$c_3$	$c_3 = \int_0^1 g(\eta) \, d\eta.$
$c_4$	$c_4 = \int_0^1 g^2(\eta) \, d\eta.$
$p$	$p = \frac{(1+n_1)(6-n_1)}{2-n_1}.$
$l'$	$l' = \frac{l}{2} \sin \varphi.$
$r$	$r = \frac{\pi}{\pi - \varphi}.$
$k_1, k_2$	Constantes.

## TROISIÈME PARTIE

## ESSAI SUR LA STABILITÉ D'UNE SURFACE LIBRE SOUMISE A DES FLUCTUATIONS TURBULENTES

Au cours de l'introduction, nous avons formulé l'hypothèse que, dans un écoulement où la turbulence se fait sentir en surface, l'eau blanche apparaît lorsque les vitesses transversales sont suffisantes pour projeter des gouttelettes hors de la masse liquide, en crevant la surface libre. Nous avons montré rapidement que cette explication rendait compte de l'apparition moins fréquente de l'entraînement d'air lorsqu'on réduit l'échelle d'un modèle; nous allons

essayer de préciser par le calcul ces considérations qualitatives, pour un canal rectangulaire large. Etant donné l'extrême complexité physique et mathématique du problème, qui est lié en particulier à la structure intime de la turbulence, que l'on connaît fort mal, la théorie qui va suivre est très schématique et ne saurait avoir qu'une valeur indicative : en particulier la valeur des coefficients numériques est largement hypothétique.

## CHAPITRE VII

### CALCUL DES DÉFORMATIONS SUPERFICIELLES CRITÈRE DE STABILITÉ

Afin de pouvoir effectuer les calculs, nous devons supposer que les phénomènes sont à deux dimensions : les photographies des planches I et II montrent bien qu'il n'en est pas ainsi en ce qui concerne les rugosités superficielles. Faute de mieux, nous nous contenterons de cette hypothèse qui doit simplement altérer la valeur des constantes intervenant dans le résultat.

Imaginons donc que des cylindres liquides d'axe perpendiculaire à l'axe de l'écoulement et de diamètre  $l$  égal au diamètre moyen des tourbillons superficiels sont animés d'une vitesse propre  $\sqrt{\bar{v}^2}$  normale à la surface libre moyenne. Nous supposons qu'au cours de leurs déplacements, ces cylindres conservent leur indépendance vis-à-vis du liquide ambiant, comme s'il s'agissait d'un solide. Avec cette hypothèse, nous étudions leur mouvement sous l'effet des différentes forces auxquelles ils sont soumis, et en particulier la condition à laquelle ils sont arrachés de la surface. Soit  $Oy$  un axe normal à la surface libre moyenne, dirigé vers le haut et passant par la position initiale du centre de la goutte, l'origine étant sur la surface (fig. 26). Soit  $\Delta$  l'ordonnée du sommet de la goutte. Au départ,  $\Delta = 0$ ; la goutte s'échappe de la masse lorsque  $\Delta = l$ . Si  $F_y$  est la projection sur  $Oy$  de la somme des forces extérieures agissant sur la

goutte, l'équation du mouvement de son centre de gravité projetée sur  $Oy$  s'écrit :

$$m \frac{d^2 \Delta}{dt^2} = F_y$$

$m$  étant la masse de la goutte. Celle-ci s'élèvera jusqu'à une hauteur  $\Delta_1$  où la vitesse sera nulle. D'après le théorème des forces vives :

$$-\frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \int_{\Delta=0}^{\Delta=\Delta_1} F_y d\Delta = \int_0^{\Delta_1} d\mathcal{E}$$

En particulier, le critère d'apparition de l'eau blanche sera vérifié si  $\Delta_1 \geq l$ .

$$\frac{1}{2} m \bar{v}^2 > - \int_0^l d\mathcal{E}$$

#### I. — Caractéristiques de la turbulence superficielle.

D'après PRANDTL [23], le diamètre des tourbillons peut être mesuré par la longueur de mélange. Les résultats de NIKURADSE reproduits par BAKHMETEFF [24] montrent que, dans l'axe d'une conduite en régime uniforme, on a sensiblement,

quels que soient les nombres de REYNOLDS de l'écoulement et la rugosité des parois :

$$l = \alpha Y \quad \text{avec } \alpha = 0,14$$

Y représentant le rayon de la conduite. Nous supposons ce résultat valable à la surface de l'écoulement en canal de profondeur Y.

D'autre part, on sait depuis REYNOLDS que la tension tangentielle en un point de l'écoulement est liée aux fluctuations longitudinales et transversales  $u'$  et  $v'$  de vitesse par :

$$\tau = \rho \overline{u' v'}$$

Par ailleurs, si l'écoulement est uniforme,  $\tau$  varie linéairement entre sa valeur  $\tau_0$  pour  $y = -Y$  et 0 pour  $y = 0$ .

$$\tau = -\tau_0 \frac{y}{Y}$$

avec :

$$\tau_0 = \rho g Y \sin i = \rho u_*^2$$

On admet généralement qu'il existe une cor-

rélation entre  $u'$  et  $v'$ , de telle sorte que :

$$u' \sim v'$$

$$\tau = -\rho u_*^2 \frac{y}{Y} \sim \rho \overline{v'^2}$$

$$\overline{v'^2} \sim u_*^2 \frac{y}{Y}$$

$\overline{v'^2}$  serait nul à la surface, ainsi que  $u'^2$ . Les mesures en canal rectangulaire large ont montré qu'il n'en était pas ainsi, sans doute parce qu'il n'existe plus alors de corrélation entre  $u'$  et  $v'$ . D'après VON KARMAN [25] (fig. 24),  $u'^2$  serait à la surface proportionnel à  $u_*^2$ , le coefficient de proportionnalité étant à peu près indépendant du nombre de REYNOLDS de l'écoulement. On peut supposer qu'il en est de même pour  $\overline{v'^2}$ , et, d'après des mesures de PRANDTL [26] (fig. 25), on prendra :

$$\overline{v'^2} = \beta u_*^2$$

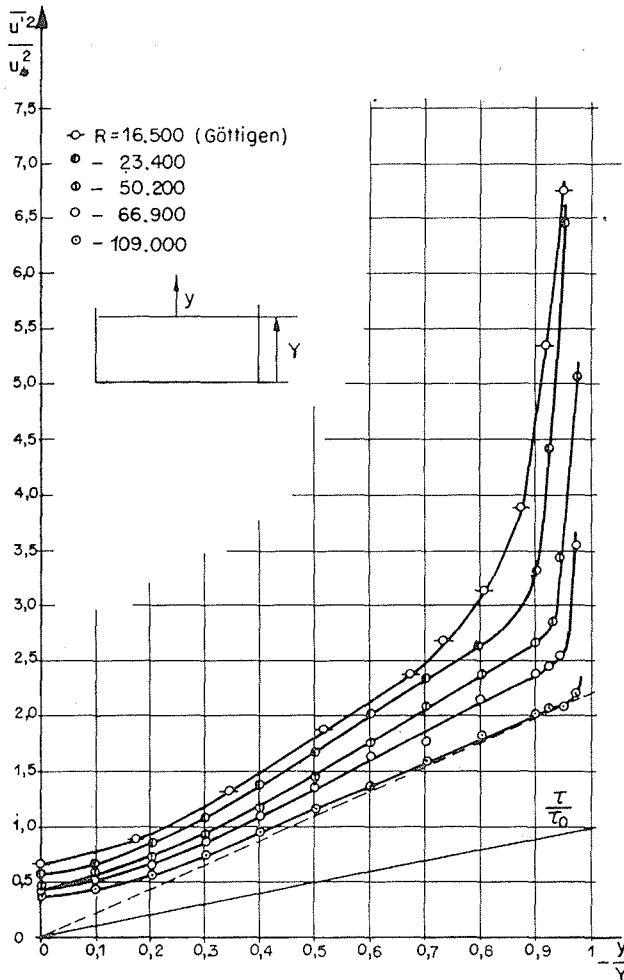


FIG. 24

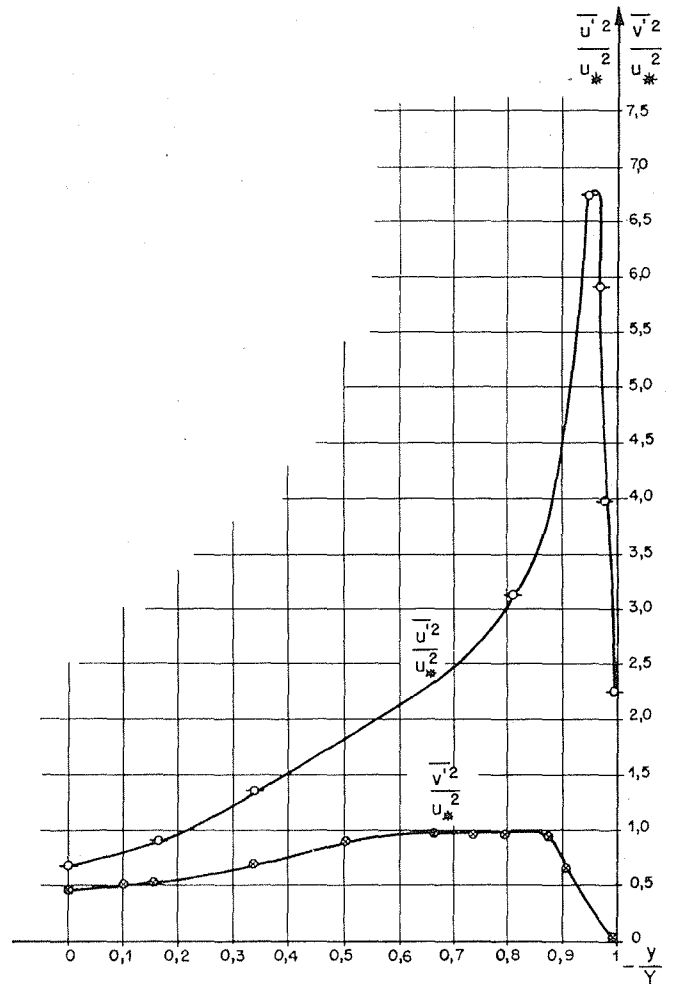


FIG. 25

avec :

$$\beta = 0,4$$

Nous admettrons que tous ces résultats restent valables en régime graduellement varié, ce qui est assez logique si la distribution des vitesses reste sensiblement la même qu'en régime uniforme. Alors, par unité de largeur de goutte cylindrique :

$$\frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{1}{2} \rho \pi \frac{l^2}{4} \beta u_*^2 = \frac{\pi}{8} x^2 \beta \rho Y^2 u_*^2$$

Les forces extérieures agissant sur la goutte supposée individualisée sont dues à :

- la tension superficielle,
- la gravité et les pressions,
- l'effet du vent relatif.

Nous examinerons successivement ces diverses actions.

## II. — Effet de la tension superficielle.

Nous étudions la déformation de la surface libre comme si la goutte était un solide indépendant, parfaitement mouillé par l'eau. Par entraînement à son voisinage, les particules liquides ont une composante de vitesse parallèle

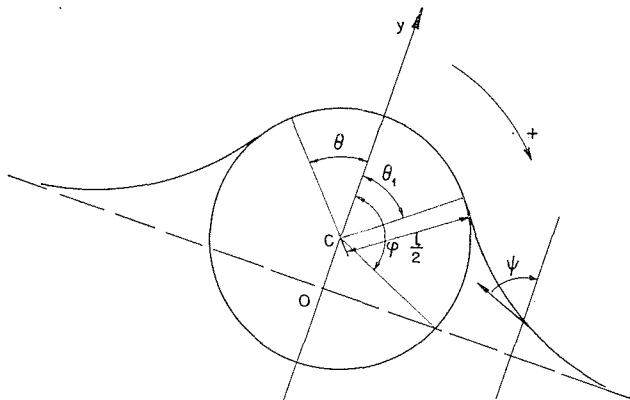


FIG. 26

à  $Oy$ ; cependant, cette vitesse reste très faible devant la vitesse générale d'entraînement, et on peut admettre que la répartition des pressions est pseudo-hydrostatique autour de la goutte. Soit  $\mathcal{R}$  le rayon de courbure de la surface libre en un point quelconque; avec l'origine choisie pour  $Oy$ , on doit avoir :

$$\rho g y \cos i = \frac{T}{\mathcal{R}}$$

$T$  désignant la tension superficielle; posons selon l'usage :

$$a^2 = \frac{2T}{\rho g}$$

Pour l'eau,  $T = 72,8$  dynes/cm,  $\rho = 1$  gr/cm<sup>3</sup> et  $a = 0,385$  cm.

Avec les notations et les conventions de signe de la figure :

$$y \cos i = - \frac{a^2}{2} \frac{d\psi \cos \psi}{dy}$$

Lorsque  $y = 0$ ,  $\psi = \frac{\pi}{2}$ , d'où :

$$y^2 \cos i = a^2 (1 - \sin \psi)$$

Sur la goutte :

$$y = \frac{l}{2} (\cos \theta - \cos \varphi)$$

Au point de contact entre la surface libre et la goutte, les deux surfaces sont tangentes. Soient  $\psi_1$  et  $\theta_1$  les valeurs de  $\psi$  et de  $\theta$  en ce point :

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \psi_1$$

Donc :

$$l^2 (\cos \theta_1 - \cos \varphi)^2 \cos i = - 4 a^2 (\cos \theta_1 - 1)$$

$$\text{Posons : } \lambda = \frac{l}{2a} \sqrt{\cos i} = \frac{x}{2} \sqrt{\cos i} \frac{Y}{a}$$

D'où :

$$\lambda^2 \cos^2 \theta_1 + (1 - 2\lambda^2 \cos \varphi) \cos \theta_1 + \lambda^2 \cos^2 \varphi - 1 = 0$$

$\cos \theta_1$  est donc donné par une équation du second degré dont une racine ne peut convenir que si  $\theta_1$  est compris entre 0 et  $\varphi$  :

$$\cos \varphi < \cos \theta_1 < 1$$

Le discriminant est  $1 + 4\lambda^2(1 - \cos \varphi)$ , toujours positif; d'autre part :

$$\lambda^2 f(1) = \lambda^4 (1 - \cos \varphi)^2 > 0$$

$$\lambda^2 f(\cos \varphi) = \lambda^4 (\cos \varphi - 1) < 0$$

La plus grande des racines convient seule et toujours :

$$\cos \theta_1 = \frac{2 \lambda^2 \cos \varphi - 1 + \sqrt{1 + 4 \lambda^2 (1 - \cos \varphi)}}{2 \lambda^2}$$

En particulier, si  $\lambda$  est petit :

$$\cos \theta_1 = 1 - \lambda^2 (1 - \cos \varphi)^2 + \dots$$

$\theta_1$  est petit. Donc :

$$\theta_1 = \lambda \sqrt{2} (1 - \cos \varphi) + \dots$$

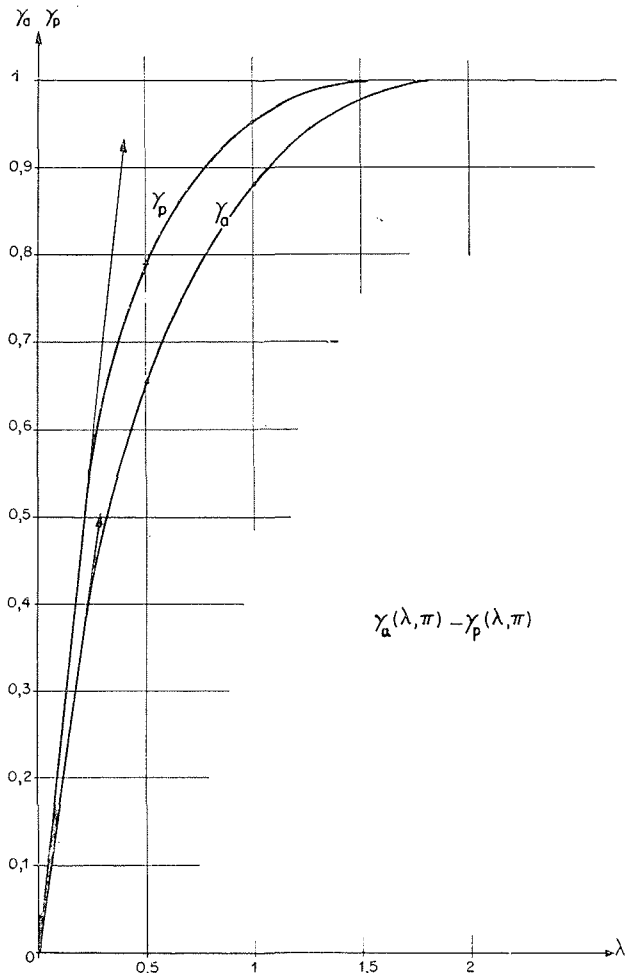


FIG. 27.

Au contraire, si  $\lambda$  est grand :

$$\cos \theta_1 = \cos \varphi$$

$$\theta_1 = \varphi$$

La goutte a un diamètre grand et la surface libre n'est pratiquement pas déformée à son voisinage.

A chaque valeur de  $\lambda$  et de  $\cos \varphi$  correspond une valeur de  $\theta_1$  ainsi déterminée. La composante  $F_a$  de la force due à la tension superficielle est alors, par unité de largeur du canal :

$$F_a = -2 T \cos \psi_1 = -2 T \sin \theta_1 = -g \varphi a^2 \sin \theta_1$$

et le travail effectué par cette force entre la position initiale où  $\Delta = 0$ ,  $\varphi = 0$  et la position finale où  $\Delta = \Delta_1$ ,  $\varphi = \varphi_1$  est :

$$\mathfrak{T}_a = \int_{\Delta=0}^{\Delta=\Delta_1} F_a d\Delta = -\frac{1}{2} g \varphi a^2 l \int_0^{\varphi} \sin \theta_1 \sin \varphi d\varphi$$

car :

$$\Delta = \frac{l}{2} (1 - \cos \varphi)$$

Ecrivons :

$$\mathfrak{T}_a = -\frac{\pi}{4} g \varphi a^2 l \gamma_a(\varphi_1, \lambda) = -\frac{\pi}{2} g \varphi \frac{a^3 \lambda}{\sqrt{\cos i}} \gamma_a$$

en posant :

$$\gamma_a(\varphi_1, \lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\varphi_1} \sin \theta_1 \sin \varphi d\varphi$$

En particulier, pour  $\lambda$  petit :

$$\gamma_a = \frac{2}{\pi} \int_0^{\varphi_1} \lambda \sqrt{2} (1 - \cos \varphi) \sin \varphi d\varphi = \frac{\lambda \sqrt{2}}{\pi} (1 - \cos \varphi_1)^2$$

et pour  $\lambda$  grand :

$$\gamma_a = \frac{2}{\pi} \int_0^{\varphi_1} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{\pi} \left( \varphi_1 - \frac{\sin 2 \varphi_1}{2} \right)$$

La figure 27 donne la variation de  $\gamma_a$  en fonction de  $\lambda$  pour  $\varphi_1 = \pi$ .

### III. — Effet de la gravité et de la pression hydrostatique

La résultante des pressions hydrostatiques sur le périmètre A P B A équilibre exactement le poids de la partie de la goutte qu'il circonscrit. On a donc immédiatement la résultante  $F_p$  des pressions et du poids :

$F_p$  = composante du poids de A B Q A — résultante des pressions sur A B.

$$= -g \varphi \cos i \frac{l^2}{4} (\theta_1 - \sin \theta_1 \cos \theta_1) - g \varphi \cos i \frac{l^2}{2} \sin \theta_1 (\cos \theta_1 - \cos \varphi)$$

$$F_p = g \varphi \cos i \frac{l^2}{4} (-\theta_1 - \sin \theta_1 \cos \theta_1 + 2 \sin \theta_1 \cos \varphi)$$

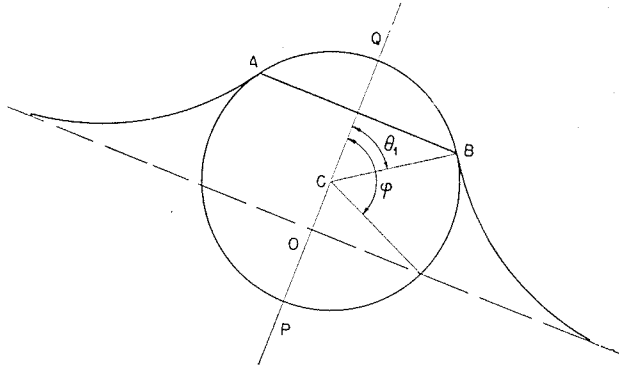


FIG. 28

Le travail effectué par cette résultante entre  $\Delta = 0$  et  $\Delta = \Delta_1$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_p &= \int_0^{\Delta_1} F_p d\Delta = \frac{1}{8} g \varphi \cos i l^3 \int_0^{\varphi_1} (-\theta_1 - \sin \theta_1 \cos \theta_1 + 2 \sin \theta_1 \cos \varphi) \sin \varphi d\varphi \\ &= -\frac{\pi}{8} g \varphi \cos i l^3 \gamma_p(\varphi_1, \lambda) = -\pi g \varphi \frac{a^3 \lambda^3}{\sqrt{\cos i}} \gamma_p \end{aligned}$$

en posant :

$$\gamma_p(\varphi_1, \lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\varphi_1} (\theta_1 + \sin \theta_1 \cos \theta_1 - 2 \sin \theta_1 \cos \varphi) \sin \varphi d\varphi$$

En particulier, pour  $\lambda$  petit :

$$\gamma_p = \frac{2\lambda\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\varphi_1} (1 - \cos \varphi)^2 \sin \varphi d\varphi = \frac{2\lambda\sqrt{2}}{3\pi} (1 - \cos \varphi)^3$$

et pour  $\lambda$  grand :

$$\begin{aligned} \gamma_p &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\varphi_1} (\varphi - \sin \varphi \cos \varphi) \sin \varphi d\varphi \\ &= \frac{1}{\pi} \left( -\varphi_1 \cos \varphi_1 + \frac{3}{4} \sin \varphi_1 + \frac{\sin 3\varphi_1}{12} \right) \end{aligned}$$

La figure 27 donne la variation de  $\gamma_p$  en fonction de  $\lambda$  pour  $\varphi_1 = \pi$ . On constate que  $\lambda$  peut être considéré comme petit lorsqu'il est inférieur à 0,2 et comme grand lorsqu'il est supérieur à 1,8.

IV. — Effet de l'air ambiant.

La goutte faisant protubérance au-dessus de la surface libre moyenne est soumise à l'action de l'air ambiant qui comprend en particulier une force  $F_r$  parallèle à  $Oy$ . Si  $\rho_a$  est la masse spécifique de l'air,  $V$  la vitesse de la goutte, l'analyse dimensionnelle montre que la force  $F_r$  par unité de largeur est proportionnelle à  $\rho_a l V^2$ . La vitesse transversale de la goutte étant très faible devant sa vitesse longitudinale  $u_1$ , on aura même sensiblement :

$$F_r \sim \rho_a l u_1^2$$

d'où :

$$\mathfrak{C}_r = \int_0^{\Delta_1} F_r d\Delta = \rho_a l^2 u_1^2 \gamma_r = 4 \rho_a \frac{a^2 \lambda^2}{\cos i} u_1^2 \gamma_r$$

$\gamma_r$  étant fonction de  $\varphi_1$  et peut être aussi de divers nombres sans dimension tels que  $\lambda$ , le nombre de REYNOLDS de l'écoulement dans l'air  $\frac{u_1 l}{\nu_a}$ , etc...

A titre indicatif, nous donnons à l'annexe IV le calcul de  $\gamma_r$  en supposant que la goutte est isolée, qu'elle se déplace à la vitesse  $u_1$  dans l'air immobile à une grande distance, que le mouvement de l'air est irrotationnel et que la remontée du niveau libre jusqu'à l'angle  $\theta_1$  est négligeable ( $\lambda$  grand par conséquent). On en déduit une courbe  $\gamma_r(\varphi_1)$ ; en particulier  $\gamma_r(\pi) = 0,900$ .

V. — Déformation de la surface libre.

D'après ce que nous avons vu au début de ce chapitre, les gouttes s'élèvent au-dessus de la surface libre à une altitude  $\Delta_1$ , telle que :

$$\frac{1}{2} m v^2 = -\mathfrak{C}_a - \mathfrak{C}_p - \mathfrak{C}_r$$

c'est-à-dire que :

$$\gamma_a(\lambda, \varphi_1) + 2 \lambda^2 \gamma_p(\lambda, \varphi_1) - \frac{16}{\pi} \frac{\rho_a}{\rho} \frac{\lambda^2}{\cos i} \frac{\gamma_r(\varphi_1)}{\alpha} \frac{u_1^2}{g Y} = \frac{2 \beta}{\alpha} \frac{\lambda^2}{\cos i} \frac{u_*^2}{g Y} \tag{48}$$

En particulier, la goutte s'échappe et l'eau blanche apparaît si :

$$\gamma_a(\lambda, \pi) + 2 \lambda^2 \gamma_p(\lambda, \pi) - \frac{16}{\pi} \frac{\rho_a}{\rho} \frac{\lambda^2}{\cos i} \frac{\gamma_r(\pi)}{\alpha} \frac{u_1^2}{g Y} < \frac{2 \beta}{\alpha} \frac{\lambda^2}{\cos i} \frac{u_*^2}{g Y} \tag{49}$$

Avec les notations de la première partie :

$$u_1 = z \frac{u_*}{k}$$

posons :

$$M(\lambda, \pi) = \gamma_a(\lambda, \pi) + 2 \lambda^2 \gamma_p(\lambda, \pi)$$

$$N(\lambda, \pi) = \left[ \frac{16}{\pi} \frac{\rho_a}{\rho} \frac{\gamma_r(\pi)}{\alpha} \frac{z^2}{k^2} + \frac{2 \beta}{\alpha} \right] \frac{\lambda^2}{\cos i} \frac{u_*^2}{g Y}$$

M est proportionnel au travail des forces qui retiennent la particule liquide, N au travail de cel-

les qui l'arrachent; l'eau blanche apparaît si :

$$M < N$$

Comparons :

$$\frac{16}{\pi} \frac{\rho_a}{\rho} \frac{\gamma_r(\pi)}{\alpha} \frac{z^2}{k^2} \text{ et } \frac{2 \beta}{\alpha}$$

Si :

$$z = 10 \quad \frac{\rho_a}{\rho} = 1,293 \cdot 10^{-3},$$

le premier vaut 26,5 et le second 5,72. Lorsque  $\varphi_1$  est petit,  $\gamma_r$  est petit (voir fig. 38) et l'effet de l'air ambiant sera négligeable devant l'énergie cinétique initiale.



Supposons l'écoulement peu profond;  $\lambda$  est petit et l'équation (48) s'écrit :

$$\frac{\lambda \sqrt{2}}{\pi} (1 - \cos \varphi_1)^2 + \frac{\lambda^3 \sqrt{2}}{3 \pi} (1 - \cos \varphi_1)^3 - \left[ \frac{16}{\pi} \frac{\rho_a}{\rho} \frac{\gamma_r}{\alpha} \frac{z^2}{k^2} + \frac{2 \beta}{\alpha} \right] \frac{\lambda^2}{\cos i} \frac{u_*^2}{g Y} = 0$$

Le second terme représentant l'effet de la gravité et des pressions est négligeable devant le premier représentant l'effet de la tension superficielle. Si la rugosité de la surface libre demeure faible ( $\varphi_1$  petit,  $\gamma_r$  petit) d'après ce que nous venons de voir, le troisième terme représentant l'effet de l'air ambiant est petit lui aussi devant le quatrième représentant l'énergie cinétique initiale due à la turbulence.

Alors :

$$\frac{\Delta_1^2}{l^2} = \frac{\pi}{2 \sqrt{2}} \frac{\beta}{\alpha} \frac{\lambda}{\cos i} \frac{u_*^2}{g Y} \quad (50)$$

Il est même possible, dans ce cas particulier, d'étudier plus en détail le mouvement de la goutte. La force due à la tension superficielle étant prépondérante :

$$m \frac{d^2 \Delta}{dt^2} = F_a = -g \rho a^2 \sin \theta_1$$

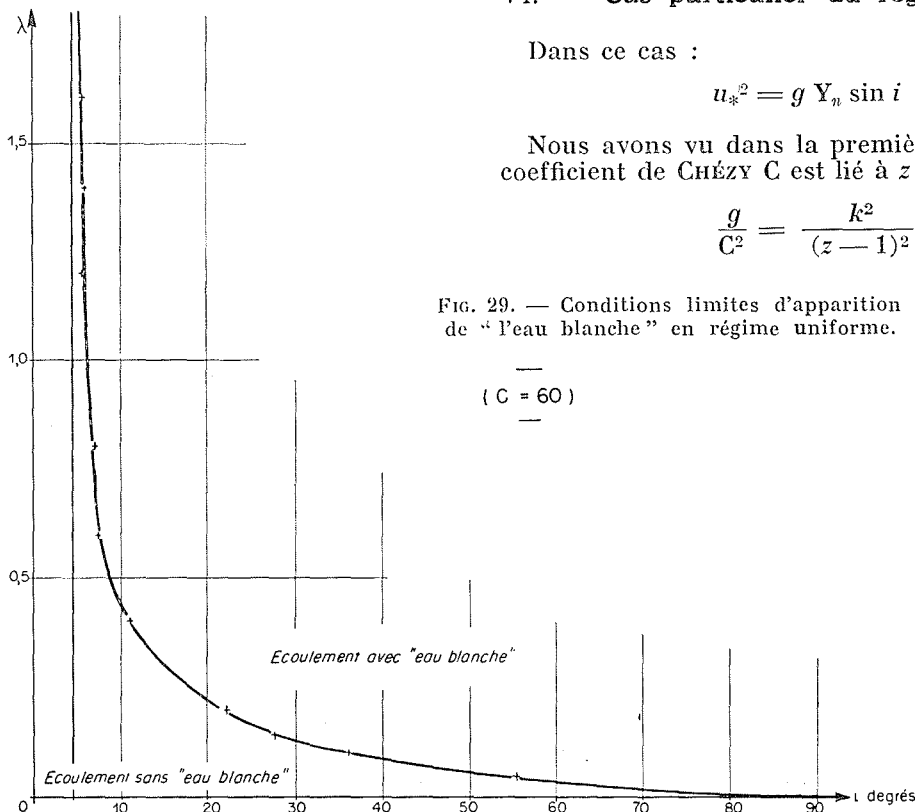


FIG. 29. — Conditions limites d'apparition de "l'eau blanche" en régime uniforme.

(C = 60)

et puisque  $\theta_1$  reste petit :

$$\sin \theta_1 \sim \theta_1 \sim \lambda \sqrt{2} (1 - \cos \varphi) = 2 \lambda \sqrt{2} \frac{\Delta}{l}$$

D'où :

$$\frac{d^2 \Delta}{dt^2} = - \frac{2 \sqrt{2}}{\pi} \frac{g \cos i}{\lambda} \frac{\Delta}{l}$$

Compte tenu de ce que  $\left(\frac{d\Delta}{dt}\right)^2 = \bar{v}^2 = \beta u_*^2$

et  $\Delta = 0$  pour  $t = 0$  :

$$\Delta = \Delta_1 \sin \left( \frac{\sqrt{\beta}}{\Delta_1} u_* t \right)$$

Le maximum  $\Delta_1$  est atteint au bout du temps  $t_1$  :

$$t_1 = \frac{\pi \Delta_1}{2 u_* \sqrt{\beta}}$$

La vitesse longitudinale  $u_1$  étant peu modifiée par les influences extérieures, la distance L parallèle à la surface parcourue par la goutte avant d'arriver au sommet de sa trajectoire sera :

$$L = u_1 t_1 = \frac{u_1}{u_*} \frac{\pi}{2 \sqrt{\beta}} \Delta_1 = \frac{k}{z} \frac{\pi}{2 \sqrt{\beta}} \Delta_1 \quad (51)$$

### VI. — Cas particulier du régime uniforme.

Dans ce cas :

$$u_*^2 = g Y_n \sin i$$

Nous avons vu dans la première partie que le coefficient de CHÉZY C est lié à z par l'égalité :

$$\frac{g}{C^2} = \frac{k^2}{(z - 1)^2}$$

Posons :

$$\frac{16}{\pi} \frac{\rho_a}{\rho} \left( \frac{C}{\sqrt{g}} + \frac{1}{k} \right)^2 \frac{\gamma_r(\pi)}{\alpha} + \frac{2\beta}{\alpha} = \gamma$$

L'eau blanche apparaît si :

$$\gamma_a(\lambda\pi) + 2\lambda^2 \gamma_p(\lambda, \pi) < \gamma \lambda^2 \operatorname{tg} i \tag{52}$$

où nous rappelons que :

$$\lambda = \frac{\alpha}{2} \sqrt{\cos i} \frac{Y_n}{a} \quad a = \sqrt{\frac{2T}{g\rho}}$$

Si  $\lambda$  est petit, la condition (52) s'écrit :

$$\operatorname{tg} i > \frac{1}{\gamma} \left[ \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \frac{1}{\lambda} + \frac{32\sqrt{2}}{3\pi} \lambda \right]$$

lorsque  $\lambda \rightarrow 0, i \rightarrow \frac{\pi}{2}$ .

Si  $\lambda$  est grand, elle s'écrit :

$$\operatorname{tg} i > \frac{2}{\gamma} + \frac{1}{\gamma \lambda^2}$$

Il existe donc un angle limite au-dessous duquel, quelle que soit la profondeur de l'écoulement, l'eau blanche n'apparaît jamais; il vérifie :

$$\operatorname{tg} i_l = \frac{2}{\gamma}$$

Prenons par exemple  $C = 60$ ; on trouve avec les valeurs admises pour les différents coefficients numériques :

$$\gamma \# 25$$

$$i_l = 4^\circ 30'$$

La figure 29 donne la variation de  $\lambda$  en fonction de  $i$ , lorsque l'égalité des deux membres de (52) est vérifiée.  $\lambda$  est proportionnel à la profondeur  $Y_n$  de l'écoulement uniforme homogène sur la pente  $i$ . Il croît donc avec le débit  $q$ .

Les points au-dessus de la courbe correspondent aux régimes où l'eau blanche apparaît. Par conséquent :

- Sur une pente  $i$  donnée, l'eau blanche se produit si le débit  $q$  atteint une valeur suffisante  $q_m$ ;
- Lorsque  $i = i_l, q_m$  est infini; pour  $i < i_l$ , l'eau blanche n'apparaît jamais;
- Lorsque  $i$  augmente,  $q_m$  diminue et s'annulerait pour un écoulement vertical;
- Comparant un modèle et un prototype,  $i$  est le même,  $q$  est divisé par  $\nu^{3/2}$ . Il peut donc être supérieur à  $q_m$  sur le prototype et inférieur sur le modèle, ce qui suffit à expliquer la différence d'aspect maintes fois signalée des deux écoulements.

## CHAPITRE VIII

### APPLICATIONS NUMÉRIQUES

Nous allons appliquer la théorie précédente aux expériences décrites dans la seconde partie.

#### I. — Expériences du Laboratoire Dauphinois d'Hydraulique.

Nous utilisons les données des tableaux XIV à XVI, pour le point critique et le point 10. Un premier calcul montre que  $\lambda$  est inférieur à 0,2 et l'équation (49) montre que l'eau blanche n'apparaît pas. Admettons donc provisoirement que  $\varphi_1$  demeure petit. Nous sommes alors dans le domaine d'application des formules (50) et (51). On trouvera au tableau XXV les valeurs de  $\Delta_1, \varphi_1$  et  $L$  qu'on en déduit.

TABLEAU XXV

POINT CRITIQUE					POINT 10		
$q \text{ cm}^2/\text{s}$	$\lambda$	$10^2 \Delta_1 \text{ cm}$	$\varphi_1$	$L \text{ cm}$	$\lambda$	$10^2 \Delta_1 \text{ cm}$	$\varphi_1$
186	0,111	3,34	72°	1,88	0,0895	3,37	81°30'
255	0,135	4,45	76°	2,6	0,114	4,50	84°
350	0,162	5,85	80°	3,5	0,148	5,90	85°

La figure 38 montre qu'avec ces valeurs de  $\varphi_1, \gamma_r$  est voisin de 0,1. D'après le paragraphe V du chapitre VII, l'approximation consentie est donc justifiée.

On constate :

Que les valeurs calculées de  $\Delta_1$  au point 10 coïncident de façon satisfaisante avec les écarts constatés entre  $Y$  mesuré et  $Y$  calculé en ce point, tels qu'ils apparaissent sur les figures 10, 11 et 12.

Par contre, au point critique, l'écart entre les valeurs de  $Y$  est bien inférieur à la valeur calculée de  $\Delta_1$ . En réalité, cette surélévation  $\Delta_1$  ne devrait pas se constater au point critique mais à la distance  $L$  en aval. Comme  $L$  est très faible, on n'explique pas ainsi la discordance. Une des explications possibles serait qu'au point critique la turbulence n'a pas encore atteint l'intensité que nous lui avons attribuée. La couche limite étant surmontée en amont par une tranche d'eau en écoulement non-turbulent, les fluctuations superficielles seraient plus faibles que lorsqu'il existe une surface libre; une diminution de  $\beta$  diminue effectivement  $\Delta_1$  et augmente  $L$ .

## II. — Expériences du Laboratoire National d'Hydraulique.

Lorsque :

$$\rho_a/\rho = 1,293 \cdot 10^{-3}; \quad \gamma_r(\pi) = 0,9; \quad k = 0,4,$$

on a :

$$N = (5,72 + 0,265 z^2) \frac{\lambda^2}{\cos i} \frac{u_*^2}{g Y}$$

Calculons les valeurs de  $M$  et  $N$  au point critique sur le modèle du coursier de Bort-les-Orgues, à l'aide du tableau XX. On est conduit au tableau XXVI.

TABLEAU XXVI

Ql/s	3,36	5,9	8,9	12,9	20,7
$\lambda$	0,083	0,108	0,140	0,202	0,338
$\gamma_a$	0,150	0,195	0,253	0,364	0,520
$\gamma_p$	0,199	0,259	0,335	0,485	0,665
$M$	0,153	0,201	0,266	0,404	0,672
$N$	0,072	0,155	0,268	0,440	0,814

La projection de gouttelettes paraîtrait donc possible, pour les débits les plus forts. Nous ignorons si le phénomène a été observé; d'ailleurs le coursier se relevant rapidement à l'aval, il est possible que le critère cesse très vite d'être vérifié.

## III. — Expériences de M. Hickox.

Le même calcul appliqué à ces expériences conduit au tableau XXVII pour le modèle et XXVIII pour le prototype.

TABLEAU XXVII

$q \text{ cm}^2/\text{s}$	66,0	76,5	107	133	153	202	255	305
$\lambda$	0,047	0,051	0,062	0,072	0,079	0,092	0,107	0,119
$\gamma_a$	0,084	0,092	0,112	0,129	0,141	0,166	0,193	0,214
$\gamma_p$	0,112	0,122	0,149	0,172	0,189	0,221	0,256	0,286
$M$	0,084	0,092	0,113	0,131	0,143	0,169	0,198	0,222
$N$	0,032	0,039	0,059	0,080	0,096	0,138	0,189	0,237

Sauf peut-être au plus fort du débit, l'eau blanche n'apparaît pas.

TABLEAU XXVIII

$q \text{ cm}^2/\text{s}$	12.100	40.000	65.000	81.000
$\lambda$	1,26	2,6	2,68	4,34
$\gamma_a$	0,945	1	1	1
$\gamma_p$	0,99	1	1	1
$M$	4,1	14,5	28,2	38,6
$N$	32,4	165	307	404

L'eau blanche apparaît toujours au point critique.

## IV. — Conclusion.

Ces vérifications sont très insuffisantes, cependant elles ne font pas apparaître de contradictions formelles. Des expériences actuellement en

cours sur un canal à pente variable permettront peut-être de préciser l'étude qui vient d'être faite.

ANNEXE I

ÉTUDE CRITIQUE DE LA VALEUR DES CONSTANTES D' ET c<sub>1</sub>

L'écoulement le long d'une plaque plane dans un courant uniforme peut être considéré comme un cas particulier du problème traité dans la première partie, en faisant  $\frac{du_1}{dx} = 0$ . Le long d'une plaque lisse,  $n = -1$  et l'équation (11) s'écrit :

$$A u_1 = e^z \left[ z^2 - \frac{kc_2}{c_1} z + \frac{kc_2}{c_1} \right] \frac{dz}{dx} \tag{53}$$

avec :

$$A = \frac{k^2 D'}{c_1 \nu}$$

Cette relation s'intègre sans difficulté :

$$\frac{k^2 D' u_1 x}{c_1 \nu} = z^2 e^z \left[ 1 - \left( 2 + \frac{kc_2}{c_1} \right) z^{-1} + 2 \left( 1 + \frac{kc_2}{c_1} \right) z^{-2} \right] + C'' \tag{54}$$

Comme  $\frac{kc_2}{c_1}$  est voisin de 2, (53) montre que  $\frac{dz}{dx}$  est toujours positif. Assez loin du bord d'attaque,  $z$  est grand et la constante d'intégration est négligeable dans (54); la configuration de la couche limite est alors indépendante des conditions initiales. KARMAN [27] remarque même que pour les grandes valeurs de :

$$R_x = \frac{u_1 x}{\nu}$$

la formule :

$$R_x = \frac{c_1}{k^2 D'} z^2 e^z \tag{55}$$

est une approximation de (54), de telle sorte que, en désignant par  $C_f$  le coefficient de frottement local :

$$C_f = \frac{\tau_0}{1/2 \rho u_1^2} = 2 \frac{k^2}{z^2}$$

$$C_f^{-1/2} = a_0 + b_0 \log (R_x C_f) \tag{56}$$

$$\text{avec : } \left\{ \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{k \sqrt{2} \log e} \log \frac{D'}{2 c_1} \\ b_0 &= \frac{1}{k \sqrt{2} \log e} \end{aligned} \right.$$

Ce résultat a été appliqué par VON KARMAN [28] à des mesures de KEMPF effectuées pour des

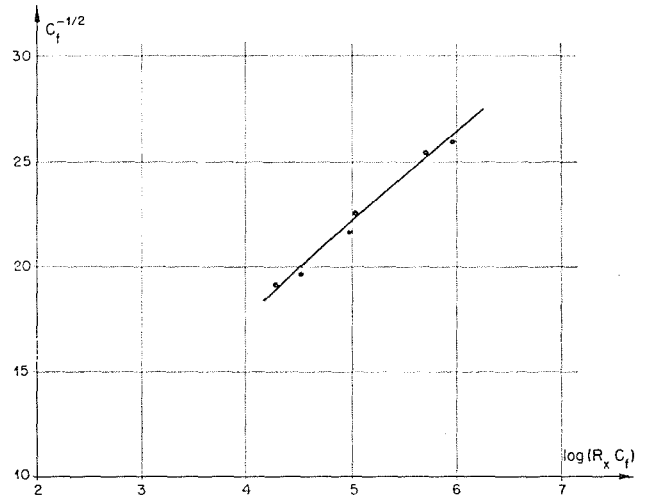


FIG. 30

nombres de REYNOLDS  $R_x$  compris entre  $7,4 \cdot 10^6$  et  $5,75 \cdot 10^7$ . La figure 30 montre qu'elles vérifient bien la relation linéaire (56) avec :

$$a_0 = 1,7$$

$$b_0 = 4,15$$

$$\text{soit : } \left\{ \begin{aligned} \log \frac{D'}{c_1} &= \frac{a_0}{b_0} + \log 2 = 0,710 \\ k &= \frac{1}{b_0 \sqrt{2} \log e} = 0,392 \end{aligned} \right.$$

Si la valeur de  $k$  est très voisine de celle de 0,4 que nous avons adoptée, la valeur de  $\log \frac{D'}{c_1}$  diffère de celle que l'on obtiendrait si la distribution des vitesses était la même dans la couche limite que dans un tuyau lisse :

$$\log \frac{D'}{c_1} = \log 9,01 - \log 2,5 = 0,556.$$

En réalité, KARMAN remarque lui-même que pour les valeurs modérées de  $R_x$  l'expression (55) omet un terme qui n'est pas négligeable. Pour  $C_f^{-1/2} = 20$ ,  $z$  est voisin de 10; si  $\left(1 + \frac{kc_2}{c_1}\right) z^{-2}$  est effectivement petit devant l'unité, par contre

$\left(2 + \frac{kc_2}{c_1}\right) z^{-1}$  est de l'ordre de 0,4. L'expression (55) doit être modifiée et devient :

$$R_x = \frac{c_1}{k^2 D'} z^2 e^z \left(1 - \frac{4}{z}\right) \quad (57)$$

car dans le terme correctif on peut donner *a priori* à  $\frac{kc_2}{c_1}$  une valeur approchée égale à 2; dans ce cas :

$$C_f^{-1/2} = a_0 + b_0 \left[ \log (R_x C_f) - \log \left(1 - \frac{4}{k\sqrt{2}} C_f^{1/2}\right) \right] \quad (58)$$

Dans les mesures de KEMPF,  $C_f^{1/2}$  varie peu, entre 0,04 et 0,05 environ. On a donc un aussi bon accord avec l'expérience en prenant :

$$\begin{cases} b_0 = 4,15 \\ a_0 - b_0 \log \left(1 - \frac{4}{0,4\sqrt{2}} 0,045\right) = 1,70 \end{cases}$$

D'où :  $a_0 = 1,00$ ,

$$\begin{cases} \log \frac{D'}{c_1} = \frac{a_0}{b_0} + \log 2 = 0,540 \\ k = \frac{1}{b_0 \sqrt{2} \log e} = 0,392 \end{cases}$$

L'écart apparent a disparu; ceci confirme les résultats obtenus par DRYDEN [29] pour  $R_x = 1,6 \cdot 10^6$  et  $2 \cdot 10^6$ ; lorsque  $7,4 \cdot 10^6 < R_x < 5,75 \cdot 10^7$ , la loi de distribution de la vitesse dans la couche plane est, aux erreurs de mesure près, la même que dans une conduite lisse en régime uniforme.

Le même calcul, conduisant à la même conclusion, pourrait être effectué dans le cas d'une couche limite turbulente le long d'une plaque rugueuse.

ANNEXE II

ÉTUDE QUALITATIVE DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE  
DE LA COUCHE LIMITE TURBULENTE  
SUR UN RADIER PLAN LOIN DE LA CRÊTE

$$\frac{du_1}{dz} = \frac{u_1 e^z [z^2 - (3+n)z + 2(2+n)]}{Bz^{1+n} u_1^{2-n} - e^z [(3+n)z^2 - 2(2+n)z]}$$

pour :

$$B > 0 \quad u_1 > 0 \quad z > 0$$

$$n = 0, -1 \text{ ou } 0,282.$$

*L'étude qui va suivre recoupe divers résultats classiques obtenus par H. POINCARÉ et ses continuateurs. Le lecteur désireux d'approfondir la question pourra se reporter par exemple à l'ouvrage de NIEMYTZKI et STEPANOFF — Théorie qualitative des équations différentielles — Moscou 1947 — mais pour la commodité de l'exposé nous reprendrons la question sous forme élémentaire et sans nous attacher à la rigueur des démonstrations. Dans une publication ultérieure, nous nous proposons de compléter cette question en l'envisageant à un point de vue plus général.*

Premier cas :  $n = 0$

$$\frac{du_1}{dz} = \frac{u_1}{z} \frac{e^z (z^2 - 3z + 4)}{Bu_1^2 - e^z (3z - 4)}$$

Le numérateur est toujours positif ou nul. Le dénominateur s'annule pour :

$$u_1^2 = \frac{e^z}{B} (3z - 4)$$

d'où le signe de  $\frac{du_1}{dz}$ .

L'origine est un point singulier ainsi que P.

ETUDE AU VOISINAGE DE  $z = 0$

$$\frac{du_1}{dz} = \frac{u_1}{z} \frac{4}{Bu_1^2 + 4}$$

Comme  $B \neq 0$ , l'axe des  $u_1$  est la seule solution passant par un point de  $Ou_1$  distinct de O. En O :

$$\frac{du_1}{dz} = \frac{u_1}{z}$$

O est un nœud isotrope; il y passe une infinité d'intégrales dont la pente est arbitraire.

Deuxième cas :  $n = -1$

$$\frac{du_1}{dz} = \frac{u_1 e^z (z^2 - 2z + 2)}{Bu_1^3 - e^z (2z^2 - 2z)}$$

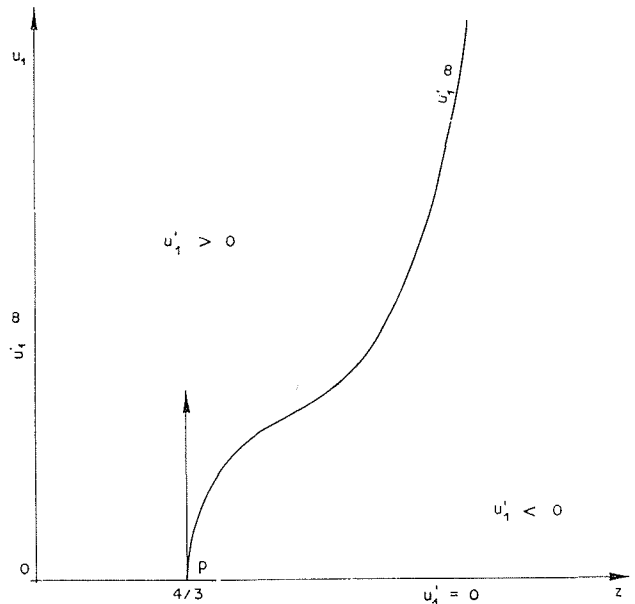


FIG. 31

$z^2 - 2z + 2$  est toujours positif. Le dénominateur s'annule pour :

$$u_1^3 = \frac{2z e^z}{B} (z - 1)$$

d'où le signe de  $\frac{du_1}{dz}$ . L'origine est encore un point singulier ainsi que P.

ETUDE AU VOISINAGE DE  $z = 0$ .

$$\frac{du_1}{dz} = \frac{2u_1}{Bu_1^3 + 2z}$$

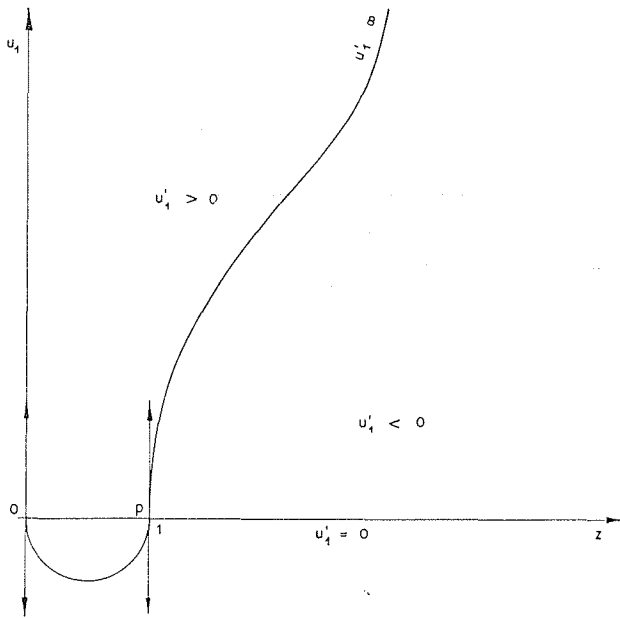


FIG. 32

Pour  $z = 0$  et  $u_1 \neq 0$ ,

$$\frac{du_1}{dz} = \frac{2}{Bu_1^2}$$

Il passe une intégrale par tout point de  $Ou_1$ . A l'origine passe une courbe tangente à  $Ou_1$  de la forme :

$$u_1 = \left(\frac{4}{B}\right)^{1/3} z^{1/3}$$

comme on le voit aisément en posant :

$$u_1 = cz^{1/3} [1 + a_0 z + \dots]$$

et une infinité de solution de tangente arbitraire, car si  $u_1$  est d'ordre inférieur à  $z^{1/3}$  :

$$\frac{du_1}{dz} = \frac{u_1}{z}$$

et  $u_1 = cz$  qui vérifie bien cette condition.

**Troisième cas :  $n = 0,282$**

$$\frac{du_1}{dz} = \frac{u_1}{z} \frac{e^z [z^2 - 3,282 z + 4,564]}{Bz^{0,282} u_1^{1,718} - e^z (3,282 z - 4,564)}$$

Le numérateur est toujours positif ou nul. Le dénominateur s'annule pour :

$$u_1^{1,718} = \frac{e^z}{Bz^{0,282}} [3,282 z - 4,564]$$

$u_1 = 0$  pour  $z = 1,39$  et n'est défini que pour  $z > 1,39$ .

$$u_1^{1,718} \frac{du_1}{dz} = \frac{e^z}{Bz^{1,282}} [3,282 z^2 - 2,204 z + 1,29]$$

expression qui est positive.

D'où un graphique analogue à celui de  $n = 0$ ; O est encore un point singulier ainsi que P.

**Etude au voisinage de P**

Dans tous les cas, P d'abscisse  $\frac{2(2+n)}{3+n}$  est un point singulier. Posons :

$$z_1 + \frac{2(2+n)}{3+n} = z$$

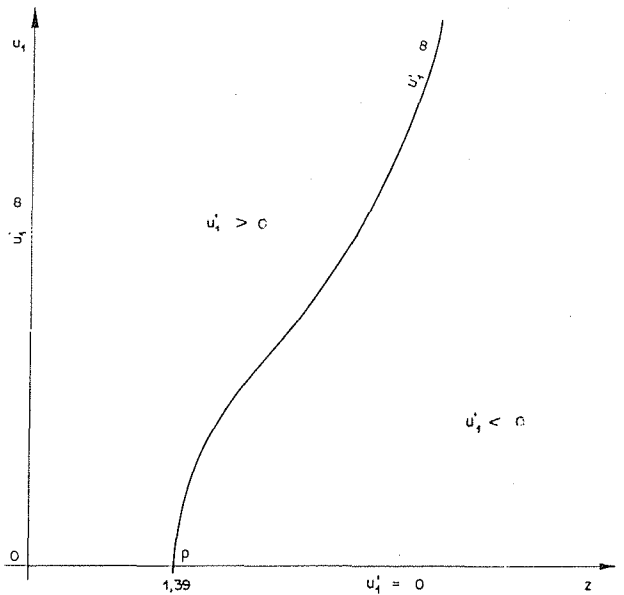


FIG. 33

et faisons tendre  $z_1$  vers O :

$$\frac{du_1}{dz_1} = \frac{u_1 e^{\frac{2(2+n)}{3+n}} \left[ \frac{4(2+n)^2}{(3+n)^2} \right]}{B \left[ \frac{2(2+n)}{3+n} \right]^{1+n} u_1^{2-n} - 2(2+n) z_1 e^{\frac{2(2+n)}{3+n}}}$$

Comme  $2 - n > 1$  :

$$\frac{du_1}{dz_1} \sim - \frac{u_1}{z_1} \frac{2(2+n)}{(3+n)^2}$$

P est un col où ne passent que deux intégrales à tangentes, l'une horizontale, l'autre verticale.

**Etude des branches infinies**

En tout point de Oz autre que P,  $\frac{du_1}{dz}$  est nul. Donc Oz est une ligne intégrale qui ne peut être traversée par une autre (sauf en O et P). Dans la zone où  $u_1 < 0$ , cherchons alors si  $u_1$  peut tendre vers une limite lorsque  $z \rightarrow \infty$  :

$$\frac{du_1}{dz} \sim - \frac{u_1}{3+n}$$

$$u_1 \sim - Ke^{-\frac{z}{3+n}}$$

$u_1$  tend vers 0 exponentiellement.

Dans la zone où  $u_1 > 0$ ,  $u_1$  et  $z$  tendent simultanément vers  $+\infty$ , on a alors :

$$\frac{du_1}{dz} \sim \frac{u_1 z^2 e^z}{Bz^{1+n} u_1^{2-n} - (3+n) z^2 e^z}$$

Si  $z^{1+n} u_1^{2-n}$  est d'ordre inférieur à  $z^2 e^z$  :

$$\frac{du_1}{dz} \sim - \frac{u_1}{3+n}$$

il s'agit de la branche infinie étudiée ci-dessus.

Si  $z^{1+n} u_1^{2-n}$  est d'ordre supérieur à  $z^2 e^z$  :

$$u_1^{1-n} \frac{du_1}{dz} \sim e^z z^{1-n}$$

$$u_1^{2-n} \sim e^z z^{1-n}$$

$$z^{1+n} u_1^{2-n} \sim z^2 e^z$$

et l'hypothèse précédente n'est pas vérifiée. Donc  $z^{1+n} u_1^{2-n}$  est de l'ordre de  $z^2 e^z$ . Posons :

$$Bz^{1+n} u_1^{2-n} = cz^2 e^z$$

L'identification montre que  $c = 5$ ; par conséquent, lorsque  $z$  est grand :

$$u_1^{2-n} = \xi(1 + \sigma)$$

où  $\sigma$  est une fonction de  $z$  qui tend vers zéro lorsque  $z \rightarrow \infty$  et où :

$$\xi = \frac{5}{B} z^{1-n} e^z$$

$u_1(z)$  admet donc une branche parabolique dans la direction  $Ou_1$ . Sur la figure 34, on voit que :

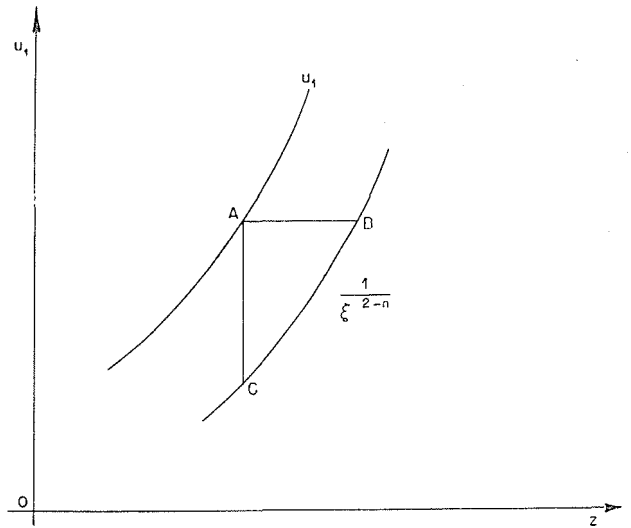


FIG. 34

$$AB \sim \frac{u_1 - \xi^{1/(2-n)}}{\frac{d}{dz} \xi^{1/(2-n)}}$$

$$= \frac{1}{2-n} \sigma \xi^{1/(2-n)}$$

$$= \frac{1}{2-n} \frac{5}{B} e^z [z^{1-n} + (1-n) z^{-n}] \xi^{1/(2-n)}$$

$$AB \sim \sigma$$

Cette distance tendant vers zéro, toutes les solutions admettent  $\xi^{1/(2-n)}$  comme asymptote. De manière plus précise, en reportant dans l'équation différentielle initiale, on trouve la relation vérifiée par  $\sigma$ .

$$2(6-n)z^2 - 2(2+n)z$$

$$+ [5z^3 + (17-7n)z^2 - 2(2+n)z] \sigma$$

$$+ 5[z^3 + z^2(1-n)] \sigma^2$$

$$+ [(2-n)z^3 + 2(2+n)z^2] \frac{d\sigma}{dz} + 5z^3 \sigma \frac{d\sigma}{dz} = 0$$

Cherchons alors un développement de  $\sigma$  de la forme :

$$\sigma = -2 \frac{6-n}{5z} [1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m} + z^{-m-1} f(z)]$$

On trouve par identification :

$$b_1 = -\frac{4}{10} \frac{(2-n)(7-2n)}{6-n}$$



et la relation de récurrence :

$$\begin{aligned} & \frac{4}{25} (6 - n) [-214 + 121n - 22n^2 + 5p(6 - n)] b_p \\ & + \frac{2}{5} (6 - n) [11 + n + p(2 - n)] b_{p+1} - 2(6 - n) b_{p+2} \\ & + \frac{4}{5} (6 - n)^2 \sum_{q=1}^{q=p-1} b_q b_{p-q} (n - p + q) \\ & + \frac{4}{5} (6 - n)^2 \sum_{q=1}^{q=p-1} b_q b_{p-q+1} = 0 \end{aligned}$$

qui montre que lorsque  $p$  est grand :

$$\begin{aligned} \frac{b_{p+2}}{b_{p+1}} & \sim p \frac{2-n}{5} \\ b_{p+2} & \sim p! \left(\frac{2-n}{5}\right)^p \end{aligned}$$

La série entière en  $1/z$  qui représente  $\sigma$  n'est pas convergente puisque le rapport de deux termes consécutifs est :

$$p \frac{2-n}{5} \frac{1}{z}$$

qui augmente avec  $p$ . Cependant, tant que  $p < \frac{5z}{2-n}$ , les termes successifs décroissent et

en limitant la série à cette valeur de  $p$ , on a une excellente représentation de  $\sigma$ .

Toujours par identification, on trouve :

$$-\frac{2-n}{5} f' - f + c = 0$$

$c$  étant une constante qu'il est inutile d'écrire; d'où :

$$f(z) = c'e^{-\frac{5}{2-n}z} + c$$

où  $c'$  est une constante arbitraire. En conséquence, toutes les intégrales peuvent être représentées par le même développement limité en  $1/z$  jusqu'au terme en  $(1/z)^{m+1}$  et n'en diffèrent que par un terme :

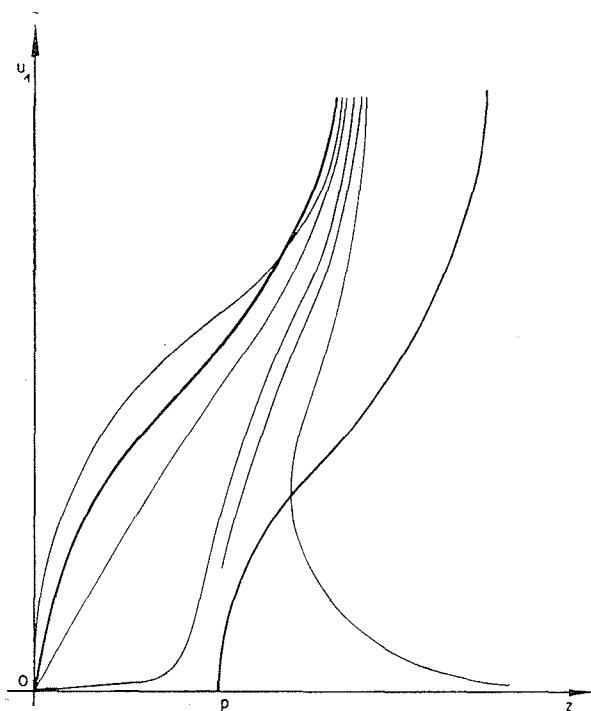
$$\frac{c'e^{-\frac{5}{2-n}z}}{z^{m+1}}$$

très petit lorsque  $z$  est grand.

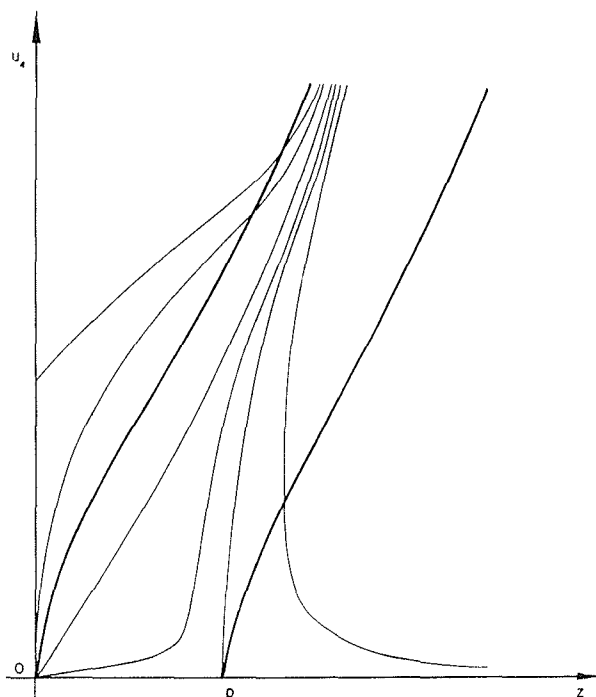
En conservant les trois premiers termes, on aura simplement :

$$\begin{aligned} u_1^{2-n} & = \frac{5}{B} z^{1-n} e^z \left[ 1 - 2\frac{6-n}{5} z^{-1} \right. \\ & \left. + \frac{4}{5} (2-n)(7-2n) z^{-2} \right] \end{aligned}$$

Finalement, l'aspect du réseau de lignes intégrales est le suivant (fig. 35) :



$n = 0$   
 $n = 0,282$



$n = -1$

FIG. 35

## ANNEXE III

**ÉTUDE DE LA COUCHE LIMITE  
LORSQUE LA VITESSE VÉRIFIE UNE LOI DE PUISSANCE**

Supposons que la distribution des vitesses dans la couche limite soit de la forme :

$$\frac{u}{u_1} = g(\eta)$$

avec :

$$u_*^2 = h_{n_1} \left( \frac{v}{u_1 \delta} \right)^{n_1} \quad 0 < n_1 < 1$$

où  $h_{n_1}$  est une constante numérique ainsi que  $n_1$ .

L'équation (7) s'écrit alors :  $u_*^2 = \delta u_1 (1 - c_3) \frac{du_1}{dx} + \frac{d}{dx} [\delta u_1^2 (c_3 - c_4)]$

où  $c_3$  et  $c_4$  sont deux constantes numériques :  $c_3 = \int_0^1 g(\eta) d\eta$   $c_4 = \int_0^1 g^2(\eta) d\eta$

Développons :

$$(c_3 - c_4) u_1^2 \delta^{n_1} \frac{d\delta}{dx} + u_1 \frac{du_1}{dx} (1 - c_3 - 2c_4) \delta^{n_1+1} = h_{n_1} v^{n_1} u_1^{2-n_1}$$

D'où l'on tire :

$$\delta^{n_1+1} = h_{n_1} v^{n_1} \frac{n_1 + 1}{c_3 - c_4} u_1^{-(n_1+1)} \frac{1+c_3-2c_4}{c_3-c_4} \int_a^x u_1^{1+\frac{1-c_4}{c_3-c_4}(n_1+1)} dx$$

Si, en particulier,

$$u_1 \frac{du_1}{dx} = g \sin i :$$

$$\delta^{n_1+1} = \frac{h_{n_1} v^{n_1} (n_1 + 1)}{g \sin i [1 + 3c_3 - 4c_4 + n_1(1 - c_4)]} u_1^{2-n_1} + c u_1^{-(n_1+1)} \frac{1+c_3-2c_4}{c_3-c_4}$$

où  $c$  est une constante à déterminer par les conditions initiales.

Si  $g(\eta)$  est une loi de puissance du type de celle de BLASIUS :

$$\frac{u}{u_1} = \eta^m$$

il est facile de voir [30] que :

$$m = \frac{n_1}{2 - n_1}$$

Alors :

$$c_3 = \frac{2 - n_1}{2}$$

$$c_4 = \frac{2 - n_1}{2 + n_1}$$

et l'on trouve finalement :

$$\delta^{n_1+1} = \frac{2(1+n_1)(2+n_1)}{n_1(10+n_1)} \frac{h_{n_1} v^{n_1}}{g \sin i} u_1^{2-n_1} + \left[ \delta_i^{n_1+1} - \frac{2(1+n_1)(2+n_1)}{n_1(10+n_1)} \frac{h_{n_1} v^{n_1}}{g \sin i} u_{1i}^{2-n_1} \right] \left( \frac{u_{1i}}{u_1} \right)^p$$

avec :

$$p = \frac{(1+n_1)(6-n_1)}{2-n_1}$$

Or,  $n_1$  varie de la valeur 1 pour le régime laminaire à la valeur 0 pour le régime rugueux,  $p$  décroît donc de 10 à 3; dans tous les cas,  $\left( \frac{u_{1i}}{u_1} \right)^p$  décroît très vite lorsque  $u_1$  augmente et le second terme devient négligeable devant le premier; la configuration de la couche limite est alors indépendante des conditions initiales.

ANNEXE IV

ÉCOULEMENT POTENTIEL AUTOUR D'UN SECTEUR CIRCULAIRE

Il s'agit de résoudre un problème de représentation conforme classique : représenter le domaine extérieur à deux arcs de cercle sur un plan. Pour la commodité du lecteur, nous reproduisons la solution explicite obtenue par des procédés élémentaires qui lui permettront un contrôle immédiat des résultats.

Imprimant à l'ensemble de la figure une vitesse  $u_1$ , le problème que nous posons revient à étudier en mouvement plan irrotationnel l'écoulement parallèle dérangé par une paroi plane indéfinie présentant une saillie de hauteur  $\Delta$  ( $0 \leq \Delta \leq l$ ) découpée dans un cercle de diamè-

tre  $l$ . La vitesse de l'écoulement à l'infini est égale à  $u_1$  et parallèle au plan.

Nous conserverons les notations de la troisième partie rappelée dans la figure 36. Soit  $2l' = l \sin \varphi$  la longueur de la corde AB. Faisons une inversion du pôle B et de puissance  $4l'^2$  :

$$(z - l) z' = 4l'^2$$

On obtient le champ de la figure 36 :

Un éventail de pôle  $A'$  et de raison  $r = \frac{\pi}{\pi - \varphi}$ ,

soit :

$$z'' = (z' + 2l')^r$$

le transforme en un doublet de pôle  $B''$ .

$$Z = \frac{k_1}{z'' - (2l')^r} + k_2$$

D'où le champ initial :

$$Z = \frac{k_1}{(2l')^r} \frac{(z - l)^r}{(z + l)^r - (z - l)^r} + k_2$$

Le champ devant être à l'infini équivalent à  $Z = u_1 z$  :

$$\frac{k_1}{(2l')^r} = 2r l' u_1$$

Faisons, pour rendre l'expression de  $Z$  plus symétrique,  $k_2 = -r l' u_1$  :

$$Z = a l' u_1 \frac{(z + l)^r + (z - l)^r}{(z + l)^r - (z - l)^r}$$

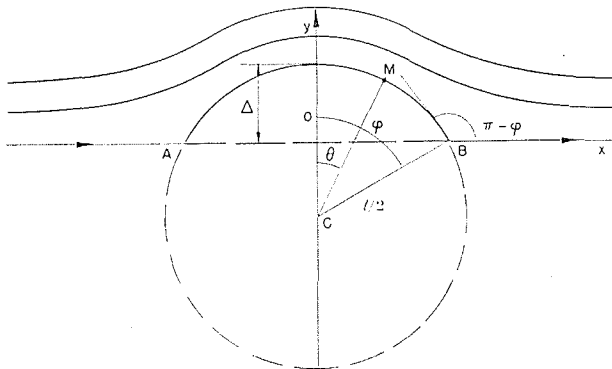


FIG. 36

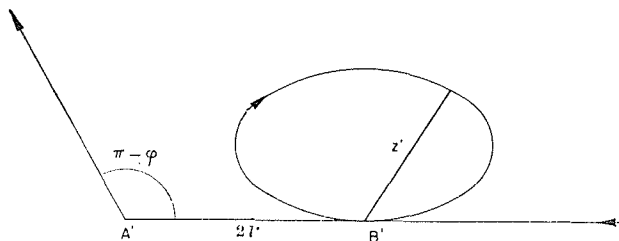


FIG. 37

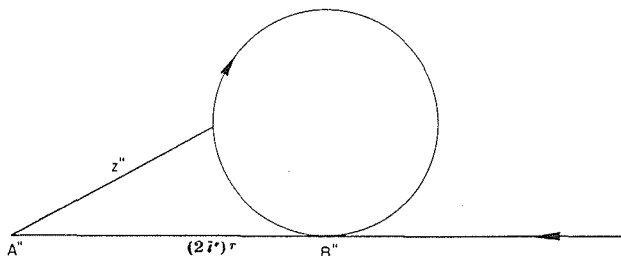


FIG. 38

CAS PARTICULIERS

$$\begin{aligned} \varphi = 0 \quad l' = 0 \quad r = 1 & \text{ (écoulement parallèle) } & Z = u_1 z \\ \varphi = \pi/2 \quad l' = 1/2 \quad r = 2 & \text{ (écoulement autour d'un} & Z = u_1 \left( z + \frac{l'^2}{z} \right) \\ & \text{ cercle) } \\ \varphi = \pi \quad l' = 1 \quad r \rightarrow \infty & \text{ (écoulement autour de} & Z = \frac{\pi l u_1}{2 \operatorname{th} \frac{\pi l}{2 z}} \\ & \text{ deux cercles tangents) } \end{aligned}$$

CALCUL DE LA VITESSE

$$\frac{dZ}{dz} = 4 l'^2 r^2 \frac{(z + l')^{r-1} (z - l')^{r-1}}{[(z + l')^r - (z - l')^r]^2}$$

$$F_r = -2 \int_{\theta=0}^{\theta=\varphi} \rho \frac{l}{2} \cos \theta d\theta = -\rho_a \frac{l}{2} \int_0^\varphi (u_1^2 - V^2) \cos \theta d\theta$$

Soit M le point courant sur l'arc AB;  $\theta$  désigne l'angle Oy avec CM compté positivement de Oy vers Ox.

Sur l'arc AB, la vitesse V est tangente à cet arc :

$$\frac{dZ}{dz} = V \cos \theta + i V \sin \theta = V e^{i\theta}$$

Or :

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \frac{l}{2} \cos \theta \\ y &= \frac{l}{2} (\cos \theta - \cos \varphi) \\ z + l' &= l \sin \frac{\varphi + \theta}{2} e^{i \frac{\varphi - \theta}{2}} \\ z - l' &= l \sin \frac{\varphi - \theta}{2} e^{i \left( \pi - \frac{\varphi + \theta}{2} \right)} \end{aligned} \right.$$

On en tire facilement :

$$V = u_1 \frac{r^2 \sin^2 \varphi}{2^{n-1}} \frac{(\cos \theta - \cos \varphi)^{r-1}}{\left[ \left( \sin \frac{\varphi + \theta}{2} \right)^r + \left( \sin \frac{\varphi - \theta}{2} \right)^r \right]^2}$$

CAS PARTICULIERS

$$\begin{aligned} \varphi = 0 \quad r = 1 \quad V &= u_1 \\ \varphi = \pi/2 \quad r = 2 \quad V &= 2 u_1 \cos \theta \\ \varphi = \pi \quad r \rightarrow \infty \quad V &= \frac{\pi^2 u_1}{4} \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2} \operatorname{ch}^2 \left( \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right)} \end{aligned}$$

RÉSULTANTE DES PRESSIONS SUR L'ARC AB

En un point de l'arc, la pression est donnée par l'équation de BERNOULLI :

$$\frac{p}{\rho_a} + \frac{V^2}{2} = \frac{u_1^2}{2}$$

où  $\rho_a$  représente la masse spécifique de l'air.

La résultante parallèle à Oy a pour valeur :

Le calcul numérique donne les valeurs suivantes :

TABLEAU XXIX

$\varphi$	$\frac{F_r}{\rho_a l u_1^2}$	$\varphi$	$\frac{F_r}{\rho_a l u_1^2}$
0°	0	90°	0,835
7°5	-0,027	105°	1,094
15°	0,004	120°	1,350
30°	0,075	135°	1,625
45°	0,210	150°	1,905
60°	0,385	165°	2,160
75°	0,600	180°	2,250

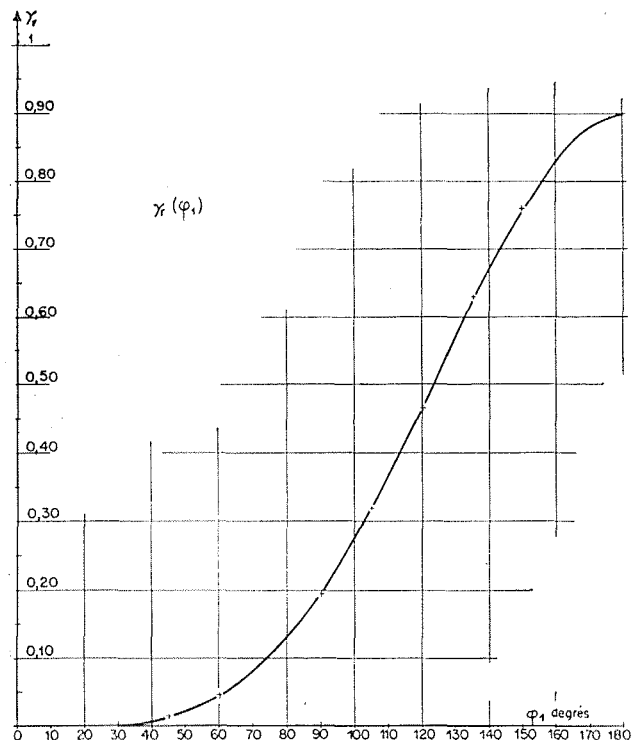


FIG. 39

Pour les très petites excroissances, le vent relatif enfonce les gouttes dans la masse; lorsqu'elles sortent davantage, il les arrache.

#### TRAVAIL D'EXTRACTION

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_r &= \int_{\Delta=0}^{\Delta=\Delta_1} F_r d\Delta \\ &= l \int_0^{\varphi_1} \frac{F_r}{2} \sin \varphi d\varphi = \varphi_0 l^2 u_1^2 \gamma_r(\varphi_1) \end{aligned}$$

D'où le tableau XXX et la figure 39.

#### TABLEAU XXX

$\varphi_1$	$\gamma_r$	$\varphi_1$	$\gamma_r$
0°	0	90°	0,196
7°5	— 0,00015	105°	0,320
15°	— 0,000285	120°	0,467
30°	0,0018	135°	0,630
45°	0,013	150°	0,760
60°	0,044	165°	0,860
75°	0,103	180°	0,900

#### BIBLIOGRAPHIE

23. PRANDTL (L.). — *Précis de mécanique des Fluides*. Paris, Dunod 1940, p. 44.
24. BAKHMETEFF (B.). — *Op. cit.*, p. 59 et 60.
25. VON KARMAN (T.). — *Some Remarks on the statistical theory of turbulence*. Proc. of the fifth International Congress for applied mechanics, Cambridge (Mass.), 1938. London, Chapman and Hall Ltd., 1939, p. 349.
26. PRANDTL (L.). — *Beitrag zum Türbülrenz Symposium*, *id.*, p. 345.
27. VON KARMAN (T.). — *Proc. 3rd International Congress for applied mechanics*. Stockholm, 1930, pp. 90-92.
28. VON KARMAN (T.). — *Journal of the Aeronautical Sciences*, vol. I, n° 1, janvier 1934 p. 12.
29. DRYDEN. — *N.A.C.A. Report*, n° 562, 1936.
30. GOLDSTEIN. — *Op. cit.*, p. 339.

