NOTULES HYDRAULIQUES
HYDRAULIC BRIEFS

# Pour servir à l'édification d'une hydraulique géométrique

## Basis for setting up geometrical hydraulics

*Dans le cas simple d'une cheminée d'équilibre placée en tête d'une conduite à caractéristique unique l'auteur propose une transposition géométrique de l'évolution du coup de bélier d'onde ou de l'oscillation en masse.*

*For the simple case of a surge-tank at the head of a penstock with a single characteristic, the author proposes a geometrical transposition of the evolution of the wave waterhammer or of mass oscillation.*

L'analyste qui vient de mettre le point final à un long calcul pour démontrer une proposition quelconque est toujours très heureux lorsqu'il peut trouver une démonstration « par la géométrie pure », tellement les raisonnements nets et « sans bavure » de cette science surpassent les calculs longs et pénibles de l'analyse.

Il ne semble pas qu'il y ait en hydraulique beaucoup de place pour les démonstrations géométriques. Cependant, en cherchant bien, on pourrait peut-être en trouver.

Prenons par exemple le problème de la cheminée d'équilibre placée à l'origine d'une conduite à caractéristique unique.

Si $\tau = 2\,L/a$ est la période d'aller et retour, on connaît la construction classique qui, dans le diagramme hauteur-vitesse, permet de construire l'état à l'instant $t + \tau$ à partir de l'état connu à l'instant $t$.

Soient :

$A_t$ le point caractéristique à l'instant $t$,

et :

$B_{t+\tau}$ le point caractéristique à l'instant $t + \tau$.

$B_{t+\tau}$ est sur la droite caractéristique de pente $a/g$ réfléchie sur l'horizontale du réservoir d'extrémité.

De même $B_{t+\tau}$ se trouve sur la caractéristique de la cheminée qui est une droite de pente $-(L\,\omega)/(a\,s)$ ($\omega$ section de la conduite, $s$ section de la cheminée) passant par le symétrique A' par rapport à l'axe des vitesses du point A. Il revient au même de dire que B est sur une droite réfléchie sur l'axe des vitesses.

Ces droites gardent tout au long de l'épure des pentes constantes.

On peut fort bien fixer l'échelle des vitesses par rapport à celle des hauteurs de telle sorte que ces droites soient perpendiculaires, l'angle de réflexion étant alors égal pour les deux caractéristiques.

Examinons dans ce cas la construction :

Menons les normales aux axes MP et NP, ces normales se rencontrant en P.

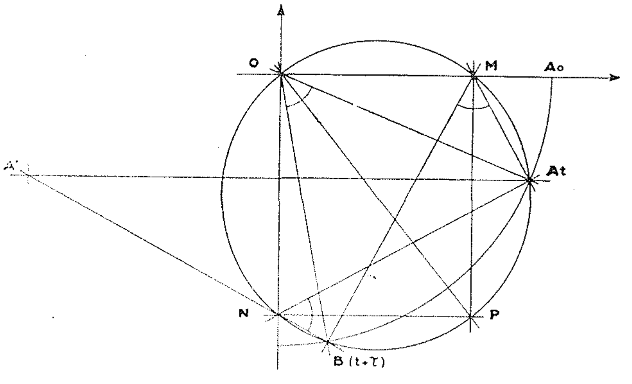
Les angles $\widehat{MBN}$ et $\widehat{MAN}$ étant droits, les six points O N B P A M sont sur un même cercle.

Joignons B O, P O et A O.

L'angle $\widehat{AOB}$ est égal à $\widehat{AMB}$ et P O est la bissectrice de $\widehat{AOB}$.

Par suite :

$$AO = OB$$




Le point $B_{t+\tau}$ se trouve donc sur un cercle de centre O et de rayon O A.

On en déduit donc que le lieu du point B pendant une période allant de $K\tau$ à $(K+1)\tau$ (K entier quelconque), se déduit du lieu de A pendant la période précédente allant de $(K-1)\tau$ à $K\tau$ par une rotation définie par l'angle A M B.

Notamment :

à l'instant 0, A est en $A_0$ tel que $OA_0 = v_0$

à l'instant 1, A est en $A_1$ tel que $OA_1 = v_0$

De l'instant 0 à l'instant 1, on sait que A reste sur la droite $A_0 A_1$.

Par conséquent, l'épure caractéristique de l'état en A est un polygone régulier de centre O inscrit dans un cercle de rayon $v_0$; chaque côté ayant pour angle au centre $\widehat{AMB}$, il en résulte que ce polygone ne sera fermé que si $\widehat{AMB}$ est un sous-multiple de $2K\pi$ (K entier quelconque).

La démonstration précédente n'est valable que dans la mesure où nous avons pu écrire pour l'équation de continuité :

$$-S(h_2 - h_1) = \omega\left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right)\tau = \frac{L\,\omega}{a}(v_1 + v_2)$$

c'est-à-dire que pour une valeur de la période $\tau$ suffisamment faible. D'autre part, il a été fait évidemment abstraction de toute perte de charge.

Si cette période diminue encore, nous voyons que le polygone tend vers le cercle de rayon $v_0$ et on retombe sur le résultat bien connu de l'oscillation en masse :

$$h = h_0 \sqrt{\frac{L}{g\,s}}\ \sin\sqrt{\frac{g\,s}{L}}\,t$$

$$v = v_0 \cos\sqrt{\frac{g\,s}{L\,\omega}}\,t$$

équations dont la représentation graphique pour une échelle convenable est bien un cercle.

Ceci confirme, dans le cas présent, ce que nous savons déjà, à savoir que l'oscillation en masse n'est qu'un cas particulier du coup de bélier d'onde correspondant à une célérité $a$ infinie .

C. DUBIN,
Ingénieur des Arts et Manufactures.