

Interprétation mathématique de la "Harpe de Nikuradsé" à partir de quelques hypothèses physiques

Mathematical interpretation of "Nikuradse's Harp" from some physical hypotheses

PAR F. BIESEL

INGÉNIEUR AU LABORATOIRE DAUPHINOIS D'HYDRAULIQUE (NEYRPIIC)

Circonstances et portée exacte de l'étude. Hypothèses de base : les diverses tranches de l'écoulement obéissent soit à une loi laminaire, soit à une loi turbulente, lois caractérisées par la relation entre gradient de vitesse et effort de cisaillement. Critère pour la délimitation des zones d'application de ces lois. Cas des conduites lisses : discordance constatée aux faibles nombres de Reynolds; tentative d'ajustement à partir d'hypothèses physiques plausibles; intérêt des résultats obtenus; indétermination du raccordement au régime laminaire, validité de la droite de Blasius vers les grands nombres de Reynolds. Cas des conduites rugueuses, qui peut se ramener à celui d'une conduite lisse fictive. Écarts entre courbes trouvées et harpe de Nikuradse; leur signification possible.

Circumstances and implications of the study. Basic hypotheses : the various sections of the flow are governed either by a laminary law or by a turbulent law, both of which are distinguished by the relation between the velocity gradient and the shearing stress. Criterion for the delimitation of areas in which these laws can be applied. The case of smooth pipes; inconformity found at low Reynolds numbers; attempt at adjustment from plausible physical hypotheses; interest of the results obtained : indeterminateness of the passage to the laminary flow curve, validity of the Blasius straight line for high Reynolds numbers. Case of rough pipes which are compared to a fictitious smooth pipe. Differences between curves found and Nikuradse's harp, and their possible significance.

AVANT-PROPOS

Il n'est pas inutile, avant de présenter le calcul objet de ce rapport, d'en préciser le sens et la portée en indiquant l'esprit dans lequel je l'ai entrepris.

Il y a quelques années, peu versé dans les problèmes de turbulence en conduite cylindrique, je me plongeais dans un ouvrage bien connu traitant de cette question. Vite perdu dans le flot des nouvelles notions et des nouveaux symboles, j'essayai de reconstituer certains raisonnements ou calculs à livre fermé, puis, me reportant à l'ouvrage, de corriger les déductions obtenues. Soumettant à cette épreuve les conclusions de quelques hypothèses simples (hypothèses 1, 2, 3, 4 et 5 ci-dessous), j'eus la surprise d'obtenir une équation de forme modérément compliquée (équation n° 25) qui se trouvait représenter (en coordonnées logarithmiques) la droite de BLASIUS

(conduites lisses) avec une approximation inespérée et sans « ajustement » de constante.

Encouragé par ce résultat et par les conseils de M. DANIEL, je fus amené à compliquer un peu artificiellement les hypothèses de façon à améliorer encore les résultats obtenus, en particulier en ce qui concerne la transition entre le régime laminaire et le régime turbulent lisse.

Cette phase du calcul est évidemment très critiquable puisque, en introduisant suffisamment de paramètres et d'hypothèses de circonstances, on peut toujours arriver à représenter n'importe quelle loi.

Cependant, sans vouloir me défendre d'avoir orienté mes hypothèses nouvelles dans le sens indiqué par l'allure des courbes expérimentales, je crois que les résultats obtenus ont plus de valeur qu'une formule empirique pure et simple. Ce sentiment est basé sur deux faits :

1. Les hypothèses sont simples et ont toutes un sens physique raisonnable, un seul paramètre se trouvant déterminé d'une façon entièrement empirique;
2. Les résultats se prêtent à des interprétations qui n'étaient pas explicitement contenues dans les hypothèses ayant servi à les établir; ceci concernant en particulier l'indétermination foncière du passage du régime laminaire au régime turbulent, et le caractère fortuit de la forme de la loi de BLASIUS pour les conduites lisses.

En résumé, le calcul qui va être exposé n'est pas réellement un calcul empirique; il conduit d'ailleurs à des formules trop compliquées pour être facilement maniables. Ce n'est pas non plus un calcul théorique complet car les hypothèses en sont trop arbitraires. Il a donc uniquement la valeur d'un schéma qui peut servir de guide pour certaines vérifications expérimentales.

En terminant cet avant-propos, je remercie ici M. CARRY pour ses suggestions et pour les calculs numériques dont il a assumé l'exécution ou la vérification.

NOTATIONS (*) ET HYPOTHÈSES DE BASE

Soit un écoulement dans une conduite circulaire de rayon r_0 . Nous ne considérons, en chaque point, que les valeurs moyennes V des vitesses et nous admettons que celles-ci sont partout parallèles à l'axe de la conduite et ne dépendent que de leur éloignement « y » de cet axe (fig. 1).

L'eau dans la conduite se déplace sous l'influence d'un gradient de pression K :

$$K = - \frac{dp}{dx} \quad (1)$$

x étant mesuré le long de l'axe de la conduite dans le sens de l'écoulement. Dans le cadre de la schématisation adoptée, nous admettons que les efforts internes dans le fluide se réduisent à une tension de cisaillement τ , elle-même fonction de « y » seulement. On sait que des considérations simples permettent d'établir la relation :

$$\tau = - \frac{K y}{2} \quad (2)$$

Nous allons définir une loi liant les cisaillements et les vitesses V , en partant des hypothèses suivantes :

1. L'écoulement dans la conduite obéit à seulement deux types de lois que nous appellerons respectivement loi laminaire et loi turbulente.

2. Dans les zones où l'écoulement obéit à la loi « laminaire », le cisaillement est lié au gradient par la formule :

$$\tau = - \mu \frac{dV}{dy} \quad (3)$$

Dans les zones où l'écoulement obéit à la loi

(*) Nous utiliserons sans les définir certaines notations très classiques que l'on pourra retrouver dans l'ouvrage de A. BAKHMETEFF : *Mécanique de l'écoulement turbulent des fluides*.

« turbulente », τ est proportionnel au carré du gradient :

$$\tau = \varphi l^2 \left(\frac{dV}{dy} \right)^2 \quad (4)$$

On sait que, pour l'homogénéité des dimensions, on est amené à considérer l comme une longueur (longueur de mélange).

4. l varie paraboliquement (*) et il est nul sur les parois pour les conduites lisses :

$$l = \beta \frac{r_0^2 - y^2}{r_0} \quad (5)$$

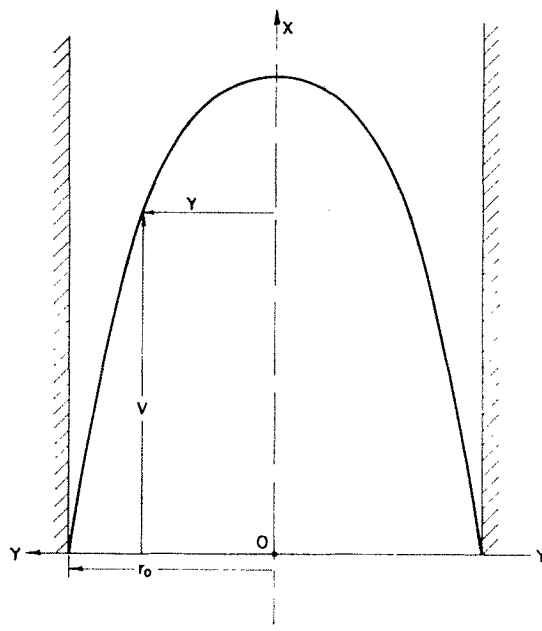


FIG. 1

(*) On peut trouver des formes de l plus proches des observations, par exemple : $l = \beta (r_0^4 - y^4) / r_0^3$. La théorie plus compliquée qui en résulte a été étudiée par M. CARRY. L'amélioration apportée aux formules finales ne semble pas justifier l'accroissement de longueur des calculs.

Ces lois permettant de déterminer, pour chaque type d'écoulement, les gradients de vitesse correspondant à une valeur de τ donnée on ne retiendra, en chaque point, que le plus faible,

en valeur absolue, des deux gradients obtenus. Ceci revient à supposer que le fluide a toujours une viscosité apparente globale au moins égale à μ :

ÉTUDES DES CONDUITES LISSES

Les hypothèses énoncées ci-dessus nous permettent de calculer entièrement les caractéristiques (moyennes) de l'écoulement en conduite.

I. — Détermination des limites des zones d'application des lois laminaires et turbulentes.

L'équation laminaire (3) donne, compte tenu de la valeur (2) de τ :

$$\frac{dV}{dy} = \frac{-Ky}{2\mu} \tag{6}$$

et (7)

$$\left(\frac{dV}{dy}\right)^2 = \frac{K^2 y^2}{4\mu^2}$$

Les équations turbulentes (4) et (5) donnent :

$$\left(\frac{dV}{dy}\right)^2 = \frac{Ky}{2\varphi l^2} = \frac{r_0^2 Ky}{2\beta^2 \varphi (r_0^2 - y^2)^2} \tag{8}$$

D'après l'hypothèse n° 5, on utilisera la loi laminaire si :

$$\frac{K^2 y^2}{4\mu^2} < \frac{r_0^2 Ky}{2\beta^2 \varphi (r_0^2 - y^2)^2} \tag{9}$$

soit :

$$y (r_0^2 - y^2)^2 < \frac{2 r_0^2 \mu^2}{K \varphi \beta^2} \tag{10}$$

ou encore :

$$\left| 1 - \left(\frac{y}{r_0}\right)^2 \right| \left(\frac{y}{r_0}\right)^{1,2} < \varphi \tag{11}$$

en posant :

$$\varphi = \frac{\mu}{\beta r_0} \sqrt{\frac{2}{K \varphi r_0}} \tag{12}$$

La figure 2 permet de discuter rapidement l'équation (11). Si φ est supérieur ou égal à $4 \times (5)^{-5/4} \approx 0,535$, seule la loi laminaire est utilisée. Si φ est inférieur à 0,535, il y a une zone annulaire où on utilise la loi turbulente (II) et deux zones où on utilise la loi laminaire; l'une de ces zones (I) se trouve le long de la paroi (couche laminaire), et l'autre (III) dans l'axe de la conduite.

Quelques remarques s'imposent à propos de cette dernière zone. Tout d'abord il est utile de préciser que le fait d'y supposer l'écoulement régi par la loi laminaire ne signifie pas que l'écoulement y soit effectivement laminaire (comme cela est parfois supposé pour la zone à la paroi).

Pour bien faire comprendre ce qui précède, et quitte à nous répéter, nous allons préciser le

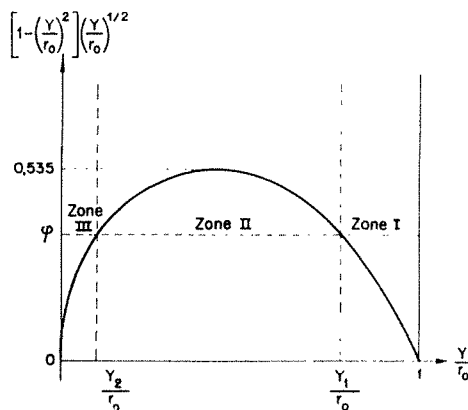


FIG. 2

sens physique d'une telle zone : bien que la turbulence soit maximum au voisinage du centre, le cisaillement dû aux transferts de masse y est cependant plus faible que celui dû à la viscosité, ceci étant une conséquence de la diminution du gradient de vitesse, et du fait que le premier cisaillement est, dans nos hypothèses, proportionnel au carré de ce gradient, alors que le second est simplement proportionnel au gradient lui-même; or, nous admettons que les efforts visqueux viennent remplacer les efforts dûs à l'Austausch lorsque ceux-ci leur deviennent inférieurs. En fait, si l'on ne tenait pas compte du « noyau laminaire », le calcul aboutirait, dans certains cas, à des écoulements turbulents présentant des pertes de charges inférieures à celles d'écoulements laminaires de même débit.

Notons d'ailleurs que l'influence de la zone III décroît très rapidement lorsque le nombre de Reynolds augmente puisque, lorsque φ décroît, la zone III devient très vite négligeable.

II. — Etude du régime mixte

Laisant de côté le cas purement laminaire bien connu, nous n'étudierons, dans ce qui suit, que le cas $\varphi < 0,535$ pour lequel il existe une zone turbulente limitée par des cylindres de rayon y_2 et y_1 ($y_2 < y_1$).

La répartition des vitesses dans les zones où s'applique la loi laminaire satisfait à l'équation (7) dont on déduit par intégration :

$$V = - \frac{K y^2}{4 \mu} + C^{1a} \quad (13)$$

Dans la zone turbulente, on a de même, par intégration de (8), après extraction d'une racine carrée :

$$V = - \frac{r_0}{\beta} \sqrt{\frac{K}{2 \varphi}} \int \frac{y^{1/2}}{r_0^2 - y^2} dy = - \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{K r_0}{2 \varphi}} \left[\arg \operatorname{th} \left(\frac{y}{r_0} \right)^{1/2} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{y}{r_0} \right)^{1/2} \right] + C^{1b}$$

$$V = - \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{K r_0}{2 \varphi}} \Delta(y) + C^{1b} \quad (14)$$

en posant :

$$\Delta(y) = \arg \operatorname{th} \left(\frac{y}{r_0} \right)^{1/2} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{y}{r_0} \right)^{1/2} \quad (15)$$

La vitesse devant être nulle à la paroi, la vitesse dans la zone laminaire I est donnée, d'après (13), par :

$$V_I = \frac{K}{4 \mu} (r_0^2 - y^2) \quad (16)$$

Partant de la vitesse pour $y = y_1$ qui est, d'après (16),

$$V_I = \frac{K}{4 \mu} (r_0^2 - y_1^2), \quad (17)$$

on a dans la zone II, d'après (14) :

$$V_{II} = \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{K r_0}{2 \varphi}} [\Delta(y_1) - \Delta(y)] + \frac{K}{4 \mu} (r_0^2 - y_1^2) \quad (18)$$

V_{III} se détermine d'une manière analogue. Elle répond à l'équation (13) et V_2 est donné par (18). On obtient :

$$V_{III} = \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{K r_0}{2 \varphi}} [\Delta(y_1) - \Delta(y_2)] + \frac{K}{4 \mu} (r_0^2 - y_1^2) + \frac{K}{4 \mu} (y_2^2 - y^2) \quad (19)$$

A partir des vitesses, on peut calculer les débits passant dans les trois zones :

$$Q_I = 2 \pi \int_{y_1}^{r_0} y V_I dy = \frac{2 \pi K}{4 \mu} \left[\frac{r_0^2 y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \right]_{y_1}^{r_0}$$

$$Q_I = \frac{K \pi}{2 \mu} \left[\frac{r_0^4}{4} - \frac{r_0^2 y_1^2}{2} + \frac{y_1^4}{4} \right] \quad (20)$$

$$Q_{II} = 2 \pi \int_{y_2}^{y_1} y V_{II} dy \quad (21)$$

$$Q_{II} = \frac{2 \pi}{\beta} \sqrt{\frac{K r_0}{2 \varphi}} \left\{ \Delta(y_1) \frac{y_1^2 - y_2^2}{2} + \left[\frac{r_0^2 - y^2}{2} \Delta(y) - \frac{1}{3} r_0^{1/2} y^{3/2} \right]_{y_2}^{y_1} \right\} + \frac{K \pi}{2 \mu} (r_0^2 - y_1^2) \frac{y_1^2 - y_2^2}{2}$$

$$Q_{III} = 2 \pi \int_0^{y_2} y V_{III} dy = \frac{2 \pi}{\beta} \sqrt{\frac{K r_0}{2 \varphi}} \left[\Delta(y) \right]_{y_2}^{y_1} \times \frac{y_2^2}{2} + \frac{K \pi}{2 \mu} (r_0^2 - y_1^2 + y_2^2) \frac{y_2^2}{2} - \frac{K \pi}{2 \mu} \times \frac{y_2^4}{4} \quad (22)$$

Le débit total est en définitive :

$$Q = Q_I + Q_{II} + Q_{III} = \frac{K \pi}{8 \mu} (r_0^4 - y_1^4 + y_2^4) + \frac{\pi}{\beta} \sqrt{\frac{K r_0}{2 \varphi}} \left[r_0^2 \Delta(y) - \frac{2}{3} r_0^{1/2} y^{3/2} \right]_{y_2}^{y_1} \quad (13)$$

La vitesse moyenne vaut :

$$u = \frac{Q}{\pi r_0^2} = \frac{K}{8 \mu} \left(r_0^2 - \frac{y_1^4 - y_2^4}{r_0^2} \right) + \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{K r_0}{2 \varphi}} \left[\Delta(y) - \frac{2}{3} \left(\frac{y}{r_0} \right)^{3/2} \right]_{y_2}^{y_1} \quad (24)$$

III. — Relation λ (\mathcal{R})

En introduisant le nombre de Reynolds $\mathcal{R} = (2 u r_0 / \nu)$ et en utilisant l'équation (12), la relation (24) s'écrit :

$$\mathcal{R} = \frac{1}{\beta^2 \varphi^2} \left\{ \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{y_1}{r_0} \right)^4 + \left(\frac{y_2}{r_0} \right)^4 \right] + 2 \varphi \left[\Delta(y) - \frac{2}{3} \left(\frac{y}{r_0} \right)^{3/2} \right]_{y_2}^{y_1} \right\} \quad (25)$$

D'autre part, si l'on introduit le coefficient de frottement classique :

$$\lambda = \frac{8 \tau_0}{\rho U^2} = \frac{4 K r_0}{\varphi U^2} \quad (26)$$

on obtient, à partir de (12), et en tenant compte de ce que $\mu = \varphi \nu$:

$$\lambda \mathcal{R}^2 = \frac{32}{\beta^2 \varphi^2} \quad (27)$$

Rappelons l'inégalité (11) : y_1 et y_2 sont racines de l'équation :

$$\left| 1 - \left(\frac{y}{r_0} \right)^2 \right| \left(\frac{y}{r_0} \right)^{1/2} = \varphi \quad (28)$$

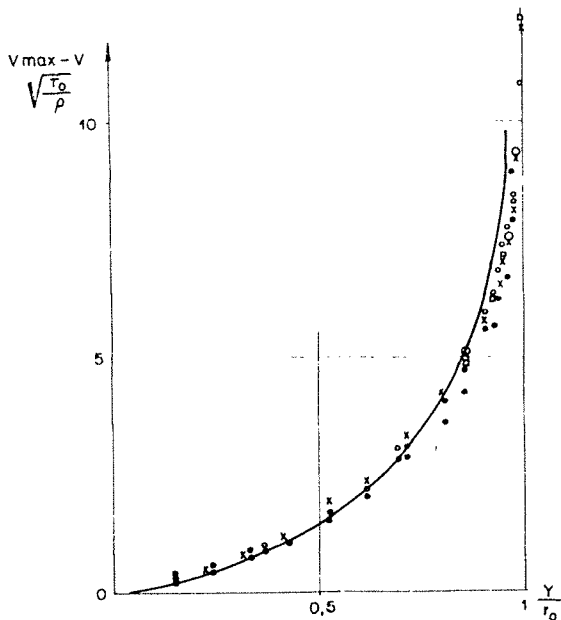


Fig. 3. — En trait plein la courbe théorique correspond à $\beta = 1/7$.

Les relations (25), (27) et (28) donnent paramétriquement la relation liant λ et \mathcal{R} pour les

conduites lisses, à condition de connaître la valeur de β .

Pour les grands nombres de Reynolds, les mesures des vitesses déficitaires peuvent permettre de déterminer approximativement la valeur de β assurant la meilleure concordance avec les points expérimentaux.

Si l'on se donne β , l'équation (19) permet de calculer V_{max} en posant $y_2 = 0$ (grands nombres de Reynolds). De même V est donné par (18). La figure 3 reproduit la courbe des vitesses déficitaires ainsi obtenues en supposant $\beta = 1/7$. On voit que cette valeur semble la meilleure possible. Rappelons, ce qui fait son intérêt, qu'elle se trouve ainsi déterminée *en toute indépendance des résultats expérimentaux concernant les pertes de charge* (harpe de NIKURADSE).

Étudions alors le calcul de la courbe $\lambda(\mathcal{R})$:

PREMIER ESSAI.

Nous supposons tout d'abord que β conserve, quel que soit l'écoulement, une valeur fixe que nous prendrons par conséquent égale à $1/7$.

On pourra alors adopter le processus de calcul suivant :

- a) On se donne une valeur précise de y_1 ;
- b) On calcule à l'aide de (28), la valeur correspondante de φ ;
- c) On détermine y_2 approximativement à l'aide de la figure 2, et on ajuste sa valeur par tâtonnements jusqu'à ce qu'elle vérifie l'équation (28);
- d) On calcule \mathcal{R} par la formule (25), en tenant compte de ce que $\beta = 1/7$;
- e) On calcule λ par la formule (27).

On obtient ainsi la courbe (1) de la planche I. On constate immédiatement que cette courbe ne

rend qu'imparfaitement compte des résultats expérimentaux relatifs aux conduites lisses. Cependant l'accord est bon pour les grands nombres de Reynolds et en particulier la courbe longe de très près la droite de Blasius. Par contre, l'accord est médiocre pour les petits nombres de Reynolds; en particulier, le retour au laminaire se fait d'après l'équation (25) et compte tenu de la valeur déjà signalée de φ correspondant à $y_1=y_2$, pour :

$$\mathcal{R} = \frac{49 \times 25 \times \sqrt{5}}{32} \# 86$$

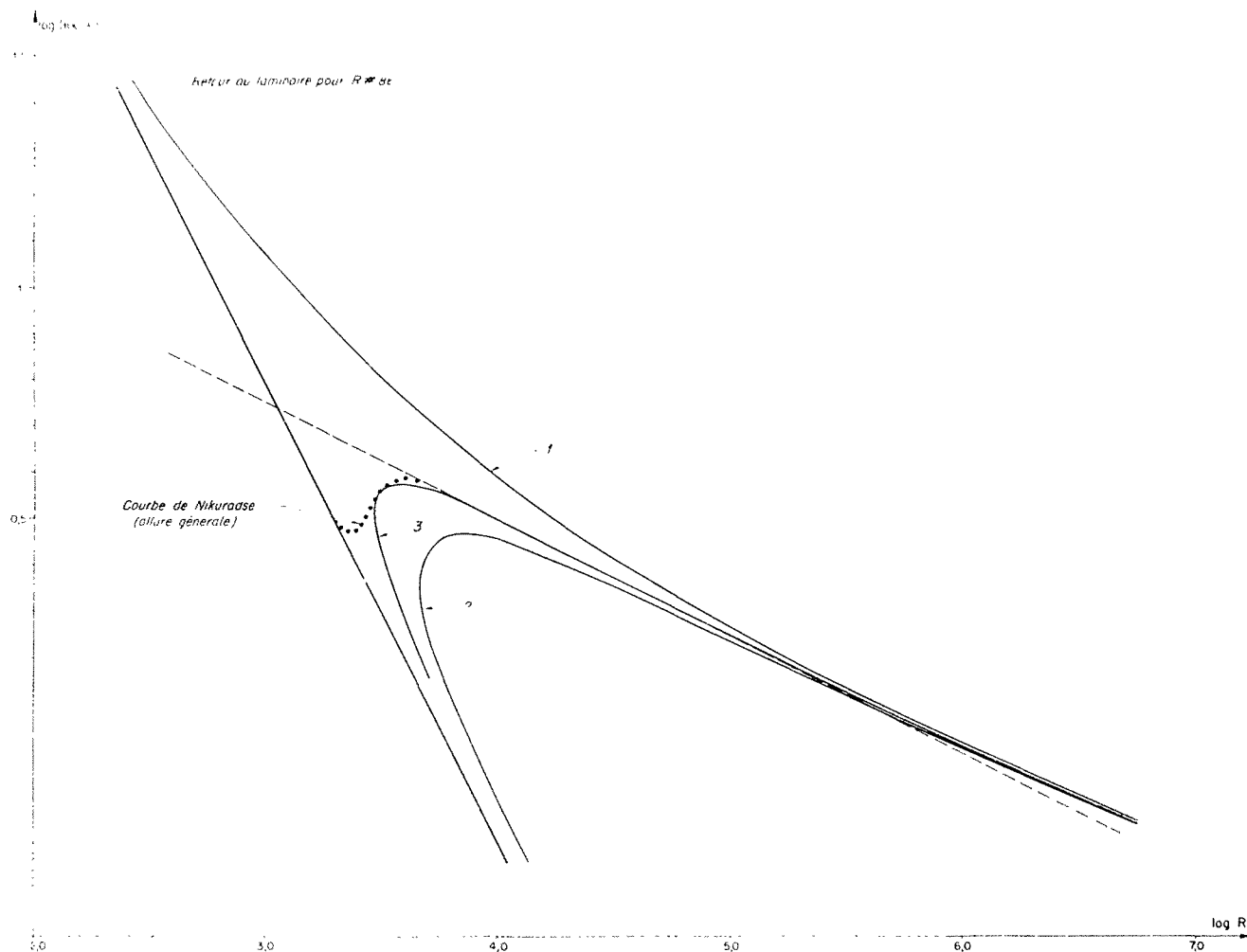


PLANCHE I

En résumé, pour les petits nombres de Reynolds, nos hypothèses semblent faire intervenir une turbulence trop importante. Nous avons donc été conduits à les modifier.

DEUXIÈME ESSAI.

Il y a évidemment bien des façons de modifier nos hypothèses dans le sens d'une réduction de la turbulence pour les faibles valeurs de \mathcal{R} ,

ceci revient en fait à réduire les valeurs de la longueur de mélange. Afin d'utiliser au maximum les calculs déjà faits, nous avons procédé à cette réduction en admettant que la répartition parabolique de l était conservée, c'est-à-dire, en ne modifiant que la valeur de β qui devient ainsi une fonction à définir de \mathcal{R} .

Pour choisir la forme de cette fonction, nous nous sommes inspirés des considérations suivantes :

a) Il n'y a en fait qu'une seule variable indépendante, \mathcal{R} par exemple, dans le pro-

blème qui nous occupe; en effet, λ et φ sont fonction de \mathcal{R} . Il est donc équivalent de considérer que β est une certaine fonction de \mathcal{R} ou une certaine fonction de λ ou de φ , ou enfin une fonction d'une combinaison quelconque des trois quantités \mathcal{R} , λ et φ .

b) Au point de vue de la simplicité des calculs, on est tout d'abord tenté de considérer β

comme une fonction de φ qui est le paramètre; cependant, on peut reprocher à φ de n'avoir pas d'interprétation physique simple. Par contre, $\lambda \mathcal{R}$ se trouve n'être fonction que de φ car on a, d'après les équations (25) et (27) :

$$\frac{64}{\lambda \mathcal{R}} = \left[1 - \left(\frac{y_1}{r_0} \right)^4 + \left(\frac{y_2}{r_0} \right)^4 \right] + 4 \varphi \left[\Delta(y) - \frac{2}{3} \left(\frac{y}{r_0} \right)^{3/2} \right]_{y_2} \quad (29)$$

Une fonction de $\lambda \mathcal{R}$ est donc équivalente, du point de vue commodité, à une fonction de φ , et, d'autre part, $\frac{64}{\lambda \mathcal{R}}$ possède une interprétation physique très intéressante car on peut mettre cette expression sous la forme — cf. *éq.* (27) et (12) et expression classique de \mathcal{R} .

$$\frac{64}{\lambda \mathcal{R}} = \frac{8 U_p}{K r_0^2} = \frac{K_l}{K} \quad (30)$$

K_l étant le gradient de pression nécessaire pour faire passer le même débit en l'absence de toute turbulence (formule de POISEUILLE).

Lorsque le régime d'écoulement est laminaire, K devient identique à K_l , autrement dit, toute l'énergie due au gradient de pression est utilisée pour assurer le déplacement de l'eau par rapport aux parois. Dès que la turbulence s'installe, K devient plus grand que K_l et on peut admettre que la différence $K - K_l$ est perdue en pure turbulence, autrement dit, que l'énergie correspondante sert à entretenir la turbulence.

En définitive, notre première hypothèse complémentaire a été la suivante : admettons que β , définissant la longueur de mélange, au lieu d'être constant comme c'est logiquement le cas pour les très grands nombres de Reynolds, est proportionnel à l'excédent d'énergie absorbé par le fluide turbulent par rapport à l'énergie strictement nécessaire pour assurer le passage du même débit en laminaire. Ceci donne l'hypothèse :

$$\beta = \beta_0 \frac{K - K_l}{K} = \beta_0 \left(1 - \frac{64}{\lambda \mathcal{R}} \right) \quad (31)$$

β_0 étant constant.

La nouvelle courbe résultant de cette hypothèse est tracée sur la planche I (courbe 2). Immédiatement quelques remarques s'imposent :

- a) Il semble que la correction de β ainsi faite soit un peu forte;
- b) La courbe représentant la fonction $\lambda(\mathcal{R})$ se compose de la *totalité* de la droite $\lambda \mathcal{R} = 64$ correspondant au régime laminaire, et d'une branche courbe représentant assez

bien les résultats expérimentaux pour l'écoulement turbulent mais plongeant asymptotiquement à la droite laminaire au lieu de s'y raccorder conformément aux résultats expérimentaux courants.

Cette allure inattendue n'était pas sans nous inquiéter quelque peu; au contraire, elle eut le don de plaire beaucoup à M. DANIEL, auquel les calculs furent montrés à ce stade. En effet, M. DANIEL pensait que la présence de la totalité de la droite laminaire était souhaitable du fait de certaines considérations théoriques et de certains essais (MM. FORTIER et COMOLET) tendant à prouver que le régime laminaire pouvait, moyennant de grandes précautions, être maintenu bien au-delà du nombre de Reynolds critique usuel.

Il pensait également que la grande dispersion des points expérimentaux dans la zone du raccordement des deux courbes s'expliquerait mieux par un phénomène d'instabilité faisant sauter le point représentatif d'une courbe à l'autre, que par un raccordement sans histoire qui, lui, ne se prêterait à aucune interprétation de cette dispersion.

TROISIÈME ESSAI.

En résumé, en cherchant à améliorer encore le résultat obtenu, il semblait utile de conserver les caractéristiques indiquées en *b*. Ceci est obtenu d'une façon très simple en posant :

$$\beta = \beta_0 \left(1 - \frac{64}{\lambda \mathcal{R}} \right)^\alpha \quad (32)$$

α devant être déterminé empiriquement de façon à obtenir la meilleure approximation possible. Cette détermination donne (*) :

$$\alpha \approx 3/4 \quad (33)$$

On obtient alors la courbe (3) de la planche I qui comprend :

- a) La totalité de la droite laminaire, ce qui reflète la possibilité de stabilité exceptionnelle du régime laminaire;

(*) Il est assez naturel, dans l'esprit des hypothèses faites, d'avoir à faire une réduction de la correction, ne serait-ce que pour les deux raisons suivantes :

1° K_e n'est qu'une approximation par défaut des pertes de charge laminaires, car il correspond à une répartition de vitesses plus favorable que celle régnant en écoulement turbulent;

2° La turbulence s'use elle-même en donnant à l'eau une viscosité apparente plus grande, qui constitue un facteur d'auto-amortissement.

b) Une branche courbe asymptotique à la droite laminaire, qui ne semble pas pouvoir porter de points expérimentaux, ce que l'on peut interpréter en disant qu'elle correspond à des régimes foncièrement instables;

c) Un coude brusque représentant bien les résultats expérimentaux entre :

$$\log \mathcal{R} \# 3,5 \quad \text{et} \quad \log \mathcal{R} \# 3,8;$$

d) Une partie quasi rectiligne qui, à la précision du graphique, suit la droite de Blasius sur une longueur surprenante allant de :

$$\log \mathcal{R} \# 3,8 \quad \text{à} \quad \log \mathcal{R} \# 5,3;$$

e) Une branche s'écartant, graduellement et vers le haut, de la droite de Blasius.

Nous avons donné plus haut l'interprétation

que l'on pouvait faire des parties a), b) et c) de cette courbe; il est intéressant également de faire quelques commentaires sur l'allure des parties d) et e). Celles-ci confirmeraient l'exactitude de la loi de Blasius, qui serait pratiquement rigoureuse dans une large gamme de nombres de Reynolds. Cette concordance est d'autant plus inattendue et remarquable que l'équation $\lambda(\mathcal{R})$ à laquelle nous conduit notre calcul a une forme complexe sans rapport apparent avec la loi si simple de Blasius.

La courbe théorique trouvée suit la droite de Blasius plus longtemps et s'en éloigne plus lentement que les courbes expérimentales de Nikuradsé correspondant aux conduites les plus lisses. Il est très difficile expérimentalement de déterminer si la théorie a raison sur ce point car il faudrait pour cela réaliser des conduites de grandes dimensions présentant un poli parfait; or cela est sans intérêt pratique.

ÉTUDES DES CONDUITES RUGUEUSES

La représentation de la loi de l'écoulement en conduite lisse ayant été obtenue relativement facilement à l'aide d'hypothèses physiquement simples n'impliquant qu'un seul coefficient complètement arbitraire (α), il était intéressant de voir s'il était possible d'étendre cette représentation au cas des conduites rugueuses.

Il est certain que la rugosité des parois a pour effet de favoriser la turbulence à leur voisinage. On peut tenir compte de ce fait, dans le cadre des hypothèses faites plus haut, en supposant que, à la paroi, la longueur de mélange est différente de zéro. Si l'on admet que la rugosité peut être caractérisée par une longueur, il est normal de supposer que cette longueur de mélange a une valeur constante, proportionnelle à la longueur caractérisant la rugosité.

Telle quelle, cette hypothèse (jointe à celles qui ont été faites pour les conduites lisses) conduit à des calculs difficiles; c'est pourquoi nous l'avons modifiée en admettant que la longueur de mélange à la paroi est proportionnelle à :

$$\left(1 - \frac{64}{\lambda \mathcal{R}}\right)^{3/4}$$

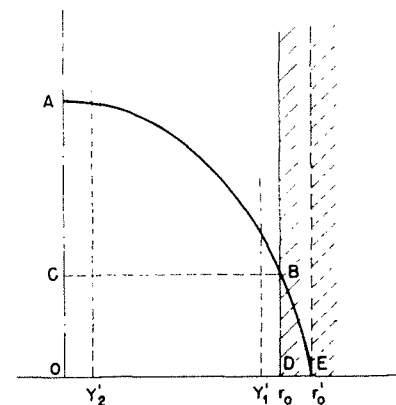
comme l'ensemble des longueurs de mélange (*).

Ceci revient encore à supposer que la répartition parabolique de la longueur de mélange part d'un cylindre d'un rayon $r_0(1 + \epsilon)$ supérieur à celui de la conduite, ϵ caractérisant la rugosité

(*) Il est à noter d'ailleurs que cette modification semble changer assez peu les résultats définitifs.

relative, à une constante multiplicative près (voir fig. 4).

D'une façon plus précise, nous avons admis que les gradients de vitesse dans la conduite rugueuse considérée étaient donnés, en fonction de



$$r_0' = r_0(1 + \epsilon)$$

FIG. 4

la distance au centre, par la formule valable pour une conduite lisse de rayon $r_0(1 + \epsilon)$. Autrement dit, l'écoulement dans la conduite rugueuse est en quelque sorte découpé dans celui d'une conduite lisse de diamètre légèrement supérieur.

En fonction de ces hypothèses, on est amené à considérer deux régimes pour les conduites rugueuses :

a) Un régime turbulent lisse pour lequel il existe encore à la paroi une zone laminaire au sens défini plus haut;

b) Un régime complètement turbulent lorsque la zone laminaire à la paroi a complètement disparu.

Nous allons étudier successivement ces deux régimes :

a) RÉGIME TURBULENT LISSE.

Ainsi qu'il est dit plus haut, nous allons nous référer à l'écoulement dans une conduite lisse de rayon $r_0(1 + \varepsilon)$ et nous singulariserons par un accent toutes les caractéristiques relatives à cette conduite, par exemple :

$$r'_0 = r_0(1 + \varepsilon)$$

Partant d'un régime donné dans la conduite lisse, nous en déduirons le régime correspondant dans la conduite rugueuse en nous limitant tout d'abord au cas où celle-ci présente encore une couche laminaire à la paroi (régime turbulent lisse).

Cette dernière condition peut s'exprimer par :

$$y'_1 < r_0 \quad (34)$$

soit encore :

$$\frac{y'_1}{r'_0} < \frac{1}{1 + \varepsilon} \sim 1 - \varepsilon \quad (35)$$

Le débit passant dans la conduite rugueuse correspond au volume ACB (fig. 4). Il est donc égal à celui qui passe dans la conduite lisse, moins les débits correspondant aux volumes BDE et COBD. Or, on a, avec des notations évidentes :

$$Q_{BDE} = \frac{K \pi}{2 \mu} \left(\frac{r_0'^4}{4} - \frac{r_0'^2 r_0^2}{2} + \frac{r_0^4}{4} \right) = \frac{K \pi}{8 \mu} (r_0'^2 - r_0^2)^2 \quad (36) \quad \text{cf. éq. (20)}$$

$$Q_{COBD} = \frac{K \pi r_0^2}{4 \mu} (r_0'^2 - r_0^2) \quad (37) \quad \text{cf. éq. (16)}$$

On a donc :

$$Q = Q' - \frac{K \pi}{8 \mu} [(r_0'^2 - r_0^2)^2 - 2 r_0^2 (r_0'^2 - r_0^2)] \quad (38)$$

$$Q = Q' - \frac{K \pi r_0^4}{8 \mu} [(1 + \varepsilon)^4 - 1]$$

On en déduit :

$$\mathcal{U} = \frac{q'}{\pi r_0^2} - \frac{K r_0^2}{8 \mu} [(1 + \varepsilon)^4 - 1] = \mathcal{U}'(1 + \varepsilon)^2 - \frac{K r_0^2}{8 \mu} [(1 + \varepsilon)^4 - 1] \quad (39)$$

et enfin :

$$\mathcal{R} = \frac{2 r_0 \mathcal{U}'}{\nu} (1 + \varepsilon)^2 - \frac{K r_0^2}{4 \mu \nu} [(1 + \varepsilon)^4 - 1] \quad \mathcal{R} = \mathcal{R}'(1 + \varepsilon) - \frac{K r_0^3 \rho}{4 \mu^2} [(1 + \varepsilon)^4 - 1] \quad (40)$$

On a d'autre part, voir (26) :

$$\lambda = \frac{4 K r_0}{\rho \mathcal{U}^2} \quad (41)$$

soit :

$$\lambda \mathcal{R}^2 = 16 \frac{K r_0^3 \rho}{\mu^2} = 16 \frac{K r_0^3 \rho}{\mu^2} (1 + \varepsilon)^{-3} = \frac{32 (1 + \varepsilon)^{-3}}{\beta'^2 \varphi^2} = \lambda' \mathcal{R}'^2 (1 + \varepsilon)^{-3} \quad (42)$$

Ces relations, combinées avec (40), donnent enfin :

$$\frac{1}{\lambda \mathcal{R}} = \frac{1}{\lambda' \mathcal{R}'} (1 + \varepsilon)^4 - \frac{1}{64} [(1 + \varepsilon)^4 - 1] \quad (43)$$

ou encore :

$$1 - \frac{64}{\lambda \mathcal{R}} = \left(1 - \frac{64}{\lambda' \mathcal{R}'} \right) (1 + \varepsilon)^4 \sim \left(1 - \frac{64}{\lambda' \mathcal{R}'} \right) (1 + 4 \varepsilon) \quad (44)$$

ce qui, combiné avec 42), qui peut s'écrire :

$$\lambda \mathcal{R}^2 = \lambda' \mathcal{R}'^2 (1 + \varepsilon)^{-3} \sim \lambda' \mathcal{R}'^2 (1 - 3 \varepsilon) \quad (45)$$

permet de déterminer λ et \mathcal{R} en fonction de λ' , \mathcal{R}' et ε .

b) RÉGIME COMPLÈTEMENT TURBULENT.

On pourrait déterminer les lois de ce régime par comparaison avec les régimes lisses, comme précédemment; mais on peut procéder d'une façon plus simple en remarquant que pour des ordres de grandeur raisonnables de la rugosité, le noyau régi par la loi laminaire (zone III) devient absolument négligeable et que, par consé-

L'allure des courbes théoriques relatives aux conduites rugueuses n'est pas exactement semblable à celle des courbes de Nikuradsé. En particulier, les courbes théoriques s'écartent plus rapidement de la courbe lisse. Ceci pourrait indiquer que les formules obtenues sont meilleures pour les rugosités mixtes du type industriel que pour les rugosités calibrées utilisées par Nikuradsé; on sait en effet que les essais de Colebrook

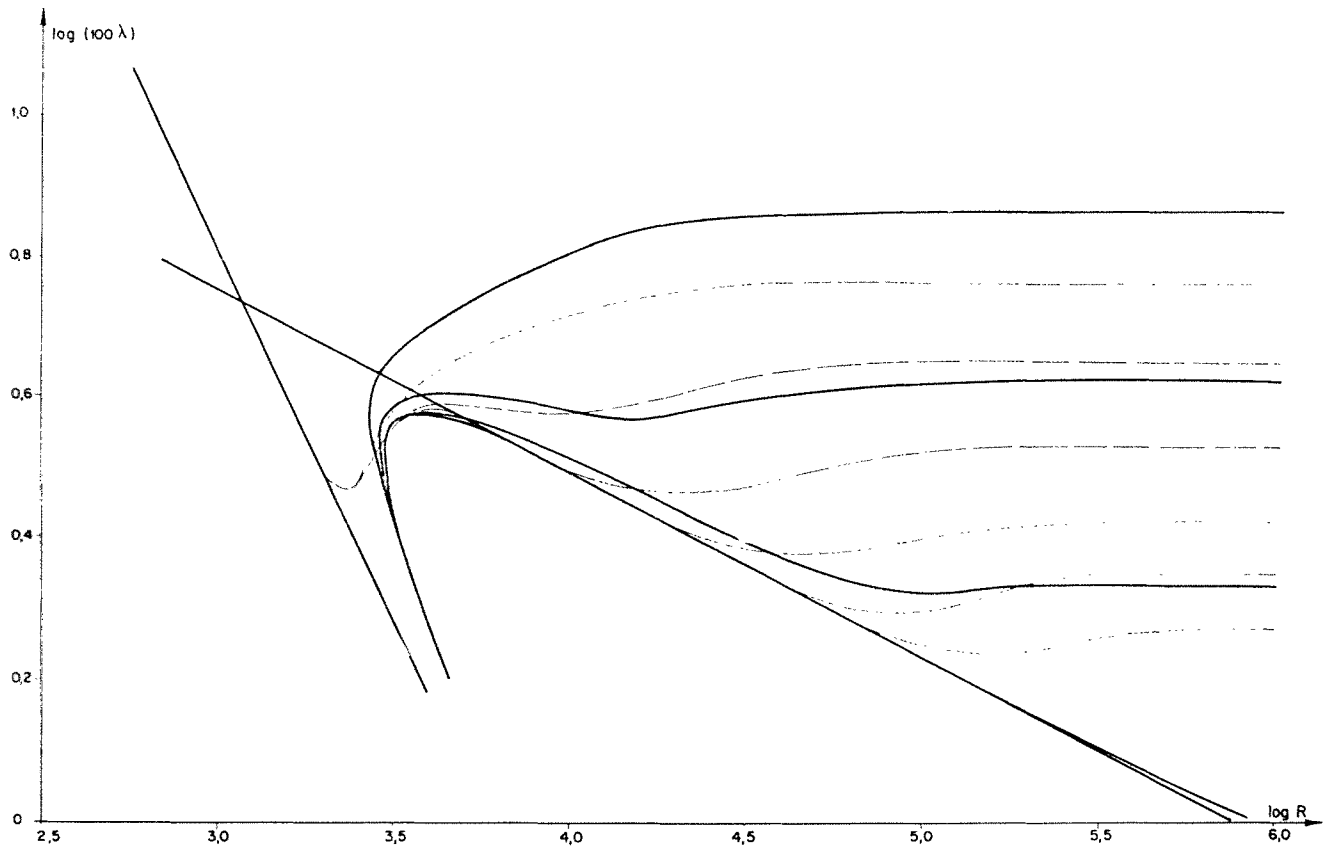


PLANCHE II

quent, tous les gradients sont pratiquement définis par l'équation calquée sur (8) :

$$\left(\frac{dV}{dy}\right)^2 = \frac{K}{\beta'^2} \frac{r_0'^2 y}{2\varphi(r_0'^2 - y^2)^2} \quad (46)$$

Il en résulte que le coefficient de perte de charge λ n'est plus que proportionnel à β'^2 , c'est-à-dire à :

$$\left(1 - \frac{64}{\lambda' R'}\right)^{3/2} \quad (47)$$

On pourra donc facilement déterminer les courbes représentant les valeurs de λ pour les régimes complètement turbulents.

En définitive, on obtient les courbes de la planche II sur laquelle a été également portée en pointillé la « harpe » de Nikuradsé. Quelques remarques s'imposent :

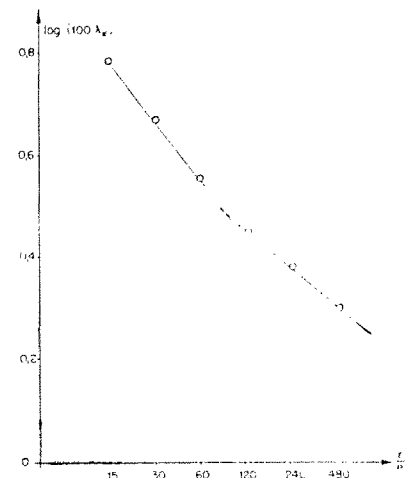


FIG. 5. — Variation de la valeur limite, pour les grands nombres de Reynolds, du coefficient λ en fonction de la rugosité relative d'après les résultats de Nikuradsé.

indiquent des déviations dans ce sens. Toutefois, aucune comparaison quantitative n'a encore été faite sur ce point; nous avons l'intention de remédier prochainement à cette lacune.

En définitive, nous n'avons pas cherché à retrouver les courbes des rugosités correspondant à celles de Nikuradsé. Les courbes théoriques nous ont semblé, en effet, trop différentes des courbes expérimentales pour que nous puissions

espérer obtenir une concordance intéressante. D'autre part, les valeurs limites des coefficients de résistance suivent une loi bien régulière dans la théorie alors que les expériences de Nikuradsé semblent indiquer une certaine anomalie (cf. fig. 5); il est donc peu probable que l'on puisse, avec une approximation suffisante, établir une proportionnalité entre la rugosité de Nikuradsé et ϵ .

DISCUSSION

Président : M. BARRILLON

M. le Président trouve le sujet intéressant, mais pense que les formules proposées par M. BIÉSEL interprètent l'asymptotisme horizontal des courbes de pertes de charge en régime turbulent mais non la répartition de ces diverses courbes en fonction de la rugosité : or, c'est bien cette répartition qui est représentée par la famille de courbes habituellement désignées sous le nom de harpe de NIKURADSE.

M. BIÉSEL répond qu'on peut obtenir une formule assez voisine de la formule empirique avec toutefois des coefficients un peu différents, mais qu'il n'a pas poursuivi dans cette voie.

Pour M. le Président, il serait intéressant d'expliquer analytiquement pourquoi la harpe de NIKURADSE et surtout les branches de raccordement correspondent à un matériau de granulométrie à définition géométrique tout à fait spéciale et pourquoi tous les expérimentateurs ont trouvé, pour les phénomènes réels, des courbes qui se rapprochent d'autres formules, comme celle de COLEBROOK.

M. BIÉSEL précise que son calcul n'est pas destiné à répondre à cette question.

Pour justifier l'opposition apparente entre les mots « mathématique » et « physique » qui se trouvent dans le titre, M. BIÉSEL indique qu'il s'agit d'un développement purement mathématique mais qui part d'hypothèses se présentant sous une forme physique.

M. GIBERT estime tout de même satisfaisant que, malgré ces considérations un peu arbitraires, le calcul de M. BIÉSEL reproduise assez bien la branche cahotique de raccordement entre la droite de BLASIUS et les droites de NIKURADSE.

M. le Président remarque que la question constitue un sujet de discussion intéressant et rappelle que, depuis les premières communications de NIKURADSE qui réalisaient une représentation remarquable au point de vue expérimentation, personne ne s'est lancé dans la recherche d'un réseau de courbes échelonnées faisant le raccordement entre les deux droites, et qu'à ce titre, il faut féliciter M. BIÉSEL.

M. SCHLAG demande à M. BIÉSEL si son hypothèse consistant à conserver la courbe des vitesses, en modifiant le rayon de la quantité ϵ pour passer d'une rugosité à l'autre, est en accord avec la constatation suivante, faite par FRITSCHÉ et par NIKURADSE : pour une même valeur de :

$$\sqrt{\tau/\rho}, \text{ c'est-à-dire } \lambda (V^2/2g)$$

et pour les grands nombres de REYNOLDS la différence entre la vitesse maximum et la vitesse locale est indépendante de la rugosité, et uniquement fonction de η/R_0 .

M. BIÉSEL reconnaît qu'en fait, la vitesse déficitaire étant proportionnelle à β^2 , les abscisses sont multipliées par β^2/β_0^2 , quand on passe d'une conduite à l'autre, mais ce rapport est très voisin de l'unité dans tous les cas pratiques.

M. SCHLAG ajoute que les valeurs sont identiques puisque, si le nombre de REYNOLDS augmente, la loi de distribution de la longueur de mélange tend vers une courbe limite; cette constatation est à la base des lois de distributions de vitesse de PRANDTL et de KARMAN.

M. le Président remercie M. BIÉSEL de son intéressante communication.

