Structure formelle attachée à l'équation du problème des marées

Formal structure of the tidal equation

PAR L. VANTROYS †

INGÉNIEUR HYDROGRAPHE EN CHEF DU CADRE DE RÉSERVE
INGÉNIEUR EN CHEF A ÉLECTRICITÉ DE FRANCE
CHEF DU SERVICE D'ÉTUDES SUR L'UTILISATION DES MARÉES

Mémoire posthume présenté par M. P. CHAPOUTIER

Moyennant certaines approximations, on formule le problème des marées par une équation aux dérivées partielles du second ordre du type hyperbolique contenant les trois variables x, y, t. *La substitution, à une fonction sinusoïdale du temps, de la grandeur complexe associée permet d'éliminer la représentation explicite de la variable* t, *et conduit à une équation* du type elliptique.

La discussion du problème de Cauchy relatif à l'équation écrite sous sa forme hyperbolique permet de définir la « célérité caractéristique » $\sqrt{gh}$; *l'étude cinématique des solutions élémentaires* (*ondes sinusoïdales*) *fait apparaître la* « célérité de phase » *et la* « célérité de groupe », *non bornées; l'étude dynamique de ces solutions conduit à la « célérité dynamique »* $\leqslant \sqrt{gh}$.

La solution, en général unique, du problème des données aux limites (*détermination de la marée dans une aire S limitée par le contour Γ lorsqu'on connaît le potentiel générateur dans S, et dénivellation ou courant normal en chaque point de Γ*) *peut être recherchée par la* sommation de solutions élémentaires, *par l'*emploi d'une fonction de Green, *par l'*utilisation des fonctions auxiliaires de Proudman, *ou être ramenée au* calcul des variations.

After having made certain approximations, the tidal problem can be formulated as a second order hyperbolic partial differential equation in three variables x, y, t. *By substituting the associated complex function for a sinusoidal function of time, the variable* t *is eliminated and an* elliptic *function is obtained.*

A discussion of Cauchy's problem in connection with the equation in its hyperbolic form enables the characteristic velocity $\sqrt{gh}$ *to be defined; a kinetic consideration of the elementary solutions (sinusoidal waves) brings out the* phase velocity *and* group velocity *which are unbounded; a treatment of these solutions from the standpoint of dynamics leads to the "dynamic velocity"* $\leqslant \sqrt{gh}$.

The solution of the boundary condition problem (*the determination of the tide in an area S bounded by a contour Γ when the generating potential is known in S and the reduction in level of normal current is known at every point of Γ*), *which is in general unique, can be sought by* summing the elementary solutions, *by* using a Green function, *by* using Proudman auxiliary functions, *or it can be obtained by the* calculus of variations.

NOTE LIMINAIRE

Essentiellement, cette communication résume, en les présentant d'ailleurs dans un ordre assez différent, les idées exposées au cours de conférences faites en 1958 à la Faculté des Sciences de Grenoble, et dont le développement a été publié dans le Bulletin du Comité d'Océanographie et d'Etudes des Côtes (*).

Ayant cherché à être bref, nous avons renoncé à reprendre en détail les démonstrations que nous avions présentées ailleurs, ainsi que celles des propositions classiques de la théorie des équations aux dérivées partielles, et à formuler les " hypothèses de régularité " dans les limites desquelles nos affirmations sont valables. Pour ce dernier point, nous nous contenterons de renvoyer le lecteur aux travaux de MM. J. Hadamard et J. Kravtchenko (*).

(*) Voir Bibliographie.

En outre, nous avons inclus dans notre texte, à titre de compléments, — mais souvent sans en développer une justification rigoureuse — divers résultats établis par H. Poincaré et E. Fichot (*).

Somme toute, plutôt qu'un exposé indépendant et complet, notre communication est un essai de présentation logique de l'ensemble des principales propositions concernant l'équation des marées formulées dans les quelques textes cités en bibliographie.

Pour éviter de longs développements, nous nous sommes limité à une forme très schématisée du problème — profondeur uniforme — résistances passives, variations de latitudes et gradients verticaux négligés —, dénivellations infiniment petites. Indiquons cependant que beaucoup des résultats énoncés sont valables dans des hypothèses moins restrictives.

D'ailleurs, les considérations évoquées dans cette étude de la " structure " d'une équation sont sans doute dans bien des cas généralisables à d'autres problèmes de la Physique mathématique susceptibles d'une formulation identique ou analogue à celle du problème des marées.

NOTATIONS

$\zeta(x, y, t) =$ dénivellation caractérisant la marée dynamique au point x, y, à l'instant t.

$\varepsilon(x, y, t) =$ dénivellation caractérisant la marée statique au point x, y, à l'instant t.

$h(x, y) =$ profondeur rapportée au niveau moyen.

$\vec{V}(x, y, t) =$ courant de marée au point x, y à l'instant t.

u et $v =$ composantes de $\vec{V}$ parallèlement à Ox et à Oy.

$\omega(x, y) =$ composante verticale de la rotation terrestre au point x, y.

ζ_x, ζ_y, h_x, h_y, u_x, u_y, u_t..... ζ_{x^2}, ζ_{y^2}, $=$ dérivées premières ou secondes par rapport à x, y ou t.

$\Delta\zeta = \zeta_{x^2} + \zeta_{y^2} =$ laplacien de la fonction ζ.

$\sigma =$ pulsation d'une oscillation sinusoïdale.

$j = \sqrt{-1}$.

$\exp(\pm\sqrt{m}.x) = e^{\pm\sqrt[2]{m}x}$

$\exp(\pm\sqrt{n}.y) = e^{\pm\sqrt[2]{n}y}$

ζ^*, u^*, v^*, nombres complexes constants associés à ζ, u, v, fonctions sinusoïdales du temps.

$\zeta(^*)$, nombre complexe conjugué de ζ^*.

$\mathcal{R}(A + jB) = A$.

$\mathcal{J}(A + jB) = B$.

$e_1 =$ terme d'énergie potentielle.

$e_2 =$ terme d'énergie cinétique.

$\varpi =$ poids spécifique de l'eau de mer.

$w =$ puissance.

$c =$ célérité dynamique.

$c' =$ célérité cinématique de phase.

$c'' =$ célérité cinématique de groupe.

$\Gamma =$ contour limitant l'aire (S).

$(S) =$ aire limitée par le contour Γ.

$d^2S =$ élément différentiel superficiel.

$ds =$ élément différentiel linéaire.

$r =$ coefficient caractérisant les résistances passives.

$\vec{n} =$ normale extérieure unitaire le long d'un contour Γ.

$\delta\zeta$, $\delta\vec{V} =$ perturbation infiniment petite affectant les éléments ζ, $\vec{V}$.

$D\zeta$, $D\vec{V} =$ différence entre deux valeurs particulières de ζ ou $\vec{V}$.

I. — NATURE DE L'ÉQUATION

I. 1. — Rappel de la mise en équation.

Sans revenir sur les calculs de la mise en équation, que nous avons développés dans une précédente communication à la S.H.F. (1), rappelons seulement que, en schématisant les données pour ne retenir avec la variable temps, t, que deux variables spatiales (coordonnées rectangulaires planes x, y), le courant étant supposé uniforme entre la surface et le fond (ce qui permet d'éliminer la variable altitude, z), on est conduit aux relations suivantes (que nous écrirons en nous limitant au cas d'une profondeur uniforme et d'un zone peu étendue en latitude, les dénivellations étant considérées comme infiniment petites par rapport à la profondeur, et — sauf toutefois lorsque nous devrons aborder certaines considérations d'ordre énergétique — les résistances passives étant négligées) :

Composantes scalaires horizontales de l'équation dynamique vectorielle :

$$g(\zeta - \bar{\varepsilon})_x + u_t - 2\,\omega\, v = 0$$

$$g(\zeta - \bar{\varepsilon})_y + v_t + 2\,\omega\, u = 0$$

Equation de continuité : $hu_x + hv_y + \zeta_t = 0$.

L'élimination de u et v entre ces trois relations donne l'équation en ζ du problème, soit :

$$gh\Delta\zeta - \zeta_{t^2} - 4\,\omega^2\,\zeta\,(x, y, t) = gh\Delta\varepsilon + \mathrm{K}\,(x, y)$$

Le premier terme du second membre, $gh\Delta\varepsilon$, représente l'action directe, sur la zone étudiée, du potentiel générateur $g\varepsilon\,(x, y, t)$; le second terme, $\mathrm{K}\,(x, y)$, représente un écoulement permanent défini par la fonction de courant $(-\,g/2\,\omega)\,\zeta_0\,(x, y)$, soit :

$$u_0 = -\frac{g}{2\,\omega}\cdot\frac{\partial\zeta_0}{\partial y}, \quad v_0 = \frac{g}{2\,\omega}\cdot\frac{\partial\zeta_0}{\partial x}$$

K ayant la valeur :

$$\mathrm{K}\,(x, y) \equiv gh\,\Delta\zeta_0 - 4\,\omega^2\,\zeta_0\,(x, y),$$

fonctionnelle de la composante $\zeta_0\,(x, y)$ de la dénivellation initiale qui introduit un terme de valeur moyenne non nulle dans la solution résultante $\zeta\,(x, y, t)$.

(1) Voir bibliographie.

Notre étude laissera de côté cette composante permanente $\zeta_0\,(x, y)$. Et nous considérerons, soit l'équation avec second membre :

$$\text{(E)} \qquad \boxed{gh\,\Delta\zeta - \zeta_{t^2} - 4\,\omega^2\,\zeta = gh\,\Delta\varepsilon}$$

où intervient le potentiel générateur, $g\varepsilon$, soit l'équation sans second membre :

$$(e) \qquad \boxed{gh\,\Delta\zeta - \zeta_{t^2} - 4\,\omega^2\,\zeta = 0}$$

où ce potentiel n'intervient pas.

I. 2. — Aspect hyperbolique de l'équation. — Célérité caractéristique.

Dans l'équation (E), l'ensemble des termes contenant les dérivées partielles secondes de la fonction inconnue ζ par rapport aux trois variables x, y, t est :

$$\zeta_{x^2} + \zeta_{y^2} - (1/gh)\,\zeta_{t^2}$$

Le signe du coefficient de ζ_{t^2} étant opposé à ceux de ζ_{x^2} et de ζ_{y^2}, CETTE ÉQUATION EST DU TYPE HYPERBOLIQUE. La discussion du *problème de Cauchy* qui lui correspond amène à définir les *variétés caractéristiques* RÉELLES (seules surfaces de l'espace x, y, t sur lesquelles puissent se raccorder deux solutions distinctes) :

$$f\,(x, y) = t$$

satisfaisant à la condition :

$$(f_x)^2 + (f_y)^2 - (1/gh) = 0$$

et, sur chacune de ces variétés, le réseau orthogonal de deux familles de courbes :

a) les « *lignes d'onde* » : $f\,(x, y) = \mathrm{C^{te}}$,

b) les « *rayons* » : $dx/f_x = dy/f_y$

Le déplacement d'une ligne d'onde dans la direction du rayon est déterminé par la relation :

$$\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dt} = \frac{1}{\sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2}} = \frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f|} = \sqrt{gh}$$

qui définit la « CÉLÉRITÉ CARACTÉRISTIQUE », au sens d'Hugoniot, $\sqrt{gh}$; cette célérité mesure la rapidité avec laquelle se propage l'effet d'une perturbation.

Il est essentiel de remarquer que *les relations qui définissent variétés caractéristiques, lignes d'onde, rayons et célérité caractéristique,* ne dépendent que des coefficients des dérivées secondes ζ_{x^2}, ζ_{y^2}, ζ_{t^2} dans l'équation (E) et sont *indépendantes de la rotation d'entraînement* ω qui ne figure que dans le terme $4\,\omega^2\zeta$.

I. 3. — Aspect elliptique de l'équation. — Cas critique.

L'analyse du type de Fourier, utilisée par Laplace et par Kelvin dans l'étude des marées, consiste essentiellement à décomposer la fonction ζ satisfaisant à l'équation (E) en une somme (une série ou une intégrale) de fonctions sinusoïdales du temps, dont chacune satisfait elle-même à une équation ayant même premier membre, et dont le second membre est l'un des termes de la décomposition de celui de (E) en ses éléments isochrones. Soit :

$$\zeta(x, y, t) = \mathrm{A}(x, y) . \cos\left[\sigma t + \Phi(x, y)\right]$$

l'une de ces solutions élémentaires. On trouve souvent commode de substituer à cette *fonction réelle* des *trois variables réelles x, y, t* la *fonction complexe* des *deux variables réelles* x, y, $\zeta^*(x, y)$, telle que (2) :

$$\zeta = \mathcal{R}\left[\zeta^* . \exp(j\sigma t)\right],$$

soit :

$$\zeta^*(x, y) = \mathrm{A}(x, y) . \exp . \left[j\,\Phi(x, y)\right]$$

x, y, $\mathrm{A}(x, y)$ et $\Phi(x, y)$ étant réels.

Si $\zeta(x, y, t)$ satisfait à l'équation élémentaire, dans laquelle figure le temps t, $\zeta^*(x, y)$ satisfera à l'équation correspondante :

$$(\mathrm{E}^*) \qquad \boxed{\Delta\zeta^* + \frac{\sigma^2 - 4\,\omega^2}{gh}\zeta^* = \Delta_{\varepsilon}^*}$$

dans laquelle la représentation *explicite* de la variable temps, t, a disparu. Il ne reste plus que les deux variables (réelles) x et y, et l'ensemble des termes contenant les dérivées partielles secondes se réduit à :

$$\zeta^*_{x^2} + \zeta^*_{y^2},$$

soit deux termes *de même signe :* L'ÉQUATION EST DU TYPE ELLIPTIQUE.

L'équation sans second membre correspondante est :

$$(e^*) \qquad \boxed{\Delta\zeta^* + \frac{\sigma^2 - 4\,\omega^2}{gh}\zeta^* = 0}$$

Le terme en ζ^* devient évanescent dans le cas particulier où $\sigma^2 - 4\,\omega^2 = 0$; l'équation se réduit alors à la forme :

$$(e)_c^* \qquad \boxed{\Delta\zeta^* = 0}$$

qui définit l'ensemble des *fonctions harmoniques* COMPLEXES des *deux variables* RÉELLES x, y. A cette simplification correspondent diverses singularités qui ont justifié l'appellation de « *cas critique* ». Selon le point de vue auquel on se place, ce cas se rencontre :

- soit, *avec une rotation donnée* ω, pour la pulsation $\sigma_c = \pm 2\,\omega$, dite « *pulsation critique* »;
- soit, *avec une pulsation donnée* σ, pour la rotation $\omega_c = \pm 1/2\,\sigma$, dite « *rotation critique* ».

Dans une étude s'étendant aux marées de l'ensemble des océans, la composante ω varie avec la latitude L selon la loi $\omega = |\vec{\Omega}| \sin \mathrm{L}$, $\vec{\Omega}$ désignant le vecteur rotation terrestre; pour chaque pulsation σ, de valeur absolue inférieure à $|2\,\vec{\Omega}|$, qui intervient dans la détermination des marées terrestres, le cas critique se rencontre aux latitudes $\mathrm{L}_c = \pm \operatorname{Arc} \sin(\sigma/2\,|\vec{\Omega}|)$ auxquelles Laplace a donné le nom de « *latitudes critiques* ». Dans une autre communication que nous présentons aujourd'hui (3), nous montrons comment les latitudes critiques disparaissent dès que l'on prend en compte, séparément ou simultanément, d'une part les résistances passives, d'autre part les gradients verticaux du champ des courants. Les singularités attachées aux latitudes critiques ne sont donc que le résultat des schématisations admises en formulant nos équations.

(2) NOTATIONS : $\mathcal{R}(\mathrm{C}^*)$ représente la partie réelle du nombre complexe C^*; $j = \sqrt{-1}$.

(3) La brusque disparition de M. Vantroys ne lui a pas permis de rédiger ce mémoire.

II. — SOLUTIONS ÉLÉMENTAIRES

II. 1. — Séparation des variables.

Pour séparer les variables qui figurent dans l'équation (*e*), on est conduit à chercher s'il existe un ensemble de solutions de la forme :

$$\zeta(x, y, t) \equiv A(x, y) \, . \, B\left[t + \Phi(x, y)/\sigma\right]$$

Si l'on choisit pour la famille des lignes $\Phi(x, y) = C^{te}$ des droites, concourantes ou parallèles, ou des circonférences concentriques, on obtient des solutions qui se construisent à partir de la *fonction exponentielle,* de la *fonction cosinus* et des *fonctions* I_N *et* J_N *de Bessel.* Parmi ces solutions, on désigne sous le nom de SOLUTIONS ÉLÉMENTAIRES (au sens de Fourier) celles qui sont de la forme :

$$\zeta(x, y, t) \equiv A(x, y) \, . \cos\left[\sigma t \times \Phi(x, y)\right]$$

II. 2. — Ondes progressives. — Célérité cinématique de phase.

Si, dans la solution élémentaire :

$$\zeta(x, y, t) \equiv A(x, y) \, . \cos\left[\sigma t \times \Phi(x, y)\right]$$

la valeur de la phase Φ ne se réduit pas à une constante uniforme, c'est-à-dire si son gradient n'est pas identiquement nul :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left[\Phi(x, y)\right] \neq 0,$$

on dit que l' " *onde* " représentée par cette solution est " progressive ". Dans une telle onde, on peut considérer les *variétés à argument constant :*

$$\sigma t + \Phi(x, y) = C^{te},$$

et, sur chacune de ces variétés, le réseau orthogonal des deux familles de courbes :

a) les " *lignes d'onde* " : $\Phi(x, y) = C^{te}$,

b) les " *rayons* " : $dx/\Phi_x = dy/\Phi_y$.

Le déplacement d'une ligne d'onde dans la direction du rayon est déterminé par la relation :

$$c' = \frac{\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}}{dt} = \frac{1}{\sqrt{(\Phi_x/\sigma) + (\Phi_y/\sigma)^2}} = \frac{1}{\left[\overrightarrow{\text{grad}}\,(\Phi/\sigma)\right]}$$

qui définit la " CÉLÉRITÉ CINÉMATIQUE DE PHASE ", c'.

S'il y a une *analogie formelle,* — mise en évidence par la présentation que nous avons adoptée —, entre la définition de cette " célérité cinématique de phase " c' et celle de la " célérité caractéristique ", $\sqrt{gh}$, donnée précédemment il existe cependant une *différence foncière* entre les natures de ces deux célérités. Notons en particulier que si la célérité caractéristique est une constante uniforme attachée à l'équation, par contre la célérité de phase peut varier considérablement d'une solution à une autre, et n'est même pas bornée. Nous avons souligné plus haut que la célérité caractéristique ne dépend pas de la rotation d'entraînement ω; nous montrerons ci-après sur un exemple que cette rotation ω joue au contraire un rôle essentiel dans la détermination de la célérité de phase.

II. 3. — Ondes stationnaires.

Si, sur toute une plage étendue dans les deux dimensions x, y, la phase Φ se réduit à une constante uniforme, c'est-à-dire si son gradient y est identiquement nul :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left[\Phi(x, y)\right] \equiv 0, \quad \Phi \equiv \Phi_0,$$

l' " *onde* " est dite " *stationnaire* ", et *sa célérité cinématique de phase est infiniment grande.* Une telle onde est représentée par la solution élémentaire :

$$\zeta = A(x, y) \, . \cos(\sigma t + \Phi_0)$$

Les lignes sur lesquelles s'annule le facteur $A(x, y)$ s'appellent " *lignes nodales* ". On adopte parfois la convention qui consiste à remplacer A par sa valeur absolue (on a ainsi une demi-amplitude toujours positive), et à rétablir le signe exact de ζ en imposant à Φ_0 le saut d'un échelon de grandeur π à la traversée de chaque ligne nodale; ainsi:

$$\zeta = |A(x, y)| \, . \cos(\sigma t + \Phi_0 + \delta \, . \, \pi)$$

le facteur δ étant nul pour A positif, et égal à 1 pour A négatif.

II. 4. — Modulation de fréquence. — Célérité cinématique de groupe.

Considérons l'onde progressive élémentaire :

$$\zeta(x, y, t) \equiv A(x, y) \, . \cos\left[\sigma t + \Phi(x, y; \sigma)\right]$$

A partir de cette solution, tout en *conservant* $A(x, y)$ *invariant,* faisons varier corrélativement la pulsation σ et la phase $\Phi(x, y; \sigma)$ de telle sorte que *l'argument* $\sigma t + \Phi(x, y; \sigma)$ *reste invariant :* $\zeta(x, y, t)$ ne cessera pas d'être solution de l'équation (*e*), et les variations $\delta\sigma$ et $\delta\Phi$ seront liées par la relation :

$$\delta\sigma . t+\delta\Phi=0$$

qui définit, dans l'espace x, y, t, la variété à deux dimensions $\partial\Phi/\partial\sigma+t=0$ sur laquelle on peut considérer le réseau orthogonal des deux familles de courbes :

a) les " *lignes d'onde* " :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma}=C^{te}$$

b) les " *rayons* " :

$$\frac{dx}{(\partial\Phi/\partial\sigma)_x}=\frac{dy}{(\partial\Phi/\partial\sigma)_y}$$

Le déplacement d'une ligne d'onde dans la direction du rayon est déterminé par la relation :

$$c''=\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{dt}=\frac{1}{\sqrt{(\partial^2\Phi/\partial\sigma\,\partial x)^2+(\partial^2\Phi/\partial\sigma\,\partial y)^2}}$$
$$=\frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\partial\Phi/\partial\sigma)|}$$

qui définit la "CÉLÉRITÉ CINÉMATIQUE DE GROUPE", c''.

II. 5. — Transits d'énergie. — Célérité dynamique.

Rappelons (4) que l'énergie localisée dans l'élément d^2S d'une aire océanique (S) est $e . d^2S$, avec :

$$e=e_1+e_2 \begin{cases} e_1=(1/2)\varpi\,(\zeta-\varepsilon)^2, \text{ énergie potentielle;} \\ e_2=(1/2)(\varpi/g)\;h\;V^2, \text{ énergie cinétique.} \end{cases}$$

et que la puissance transmise au travers d'un élément ds du contour Γ limitant l'aire (S) est définie par le flux du vecteur :

$$\vec{w}=\varpi h\,(\zeta-\varepsilon)\,\vec{V}$$

Nous limitant au cas d'un régime oscillant sinusoïdal simple, nous désignerons par $[e_1]$, $[e_2]$, $[\vec{w}]$ les moyennes temporelles des grandeurs e_1, e_2, $\vec{w}$, et nous définirons la " *célérité dynamique* " :

$$\vec{c}=\frac{[\vec{w}]}{[e_1]+[e_2]}$$

qui caractérise la *vitesse de transfert du flux énergétique.*

Dans le cas d'une oscillation définie par :

$$\begin{cases} \zeta-\varepsilon=A\cos(\sigma t) \\ u=a\cos(\sigma t+\varphi) \\ v=b\cos(\sigma t+\chi) \end{cases}$$

la célérité dynamique $\vec{c}$ a pour composantes :

$$\begin{cases} \text{parallèlement à } Ox : \dfrac{2\,gh\,A\,a\cos\varphi}{g\,A^2+h\,(a^2+b^2)} \\ \text{parallèlement à } Oy : \dfrac{2\,gh\,A\,b\cos\chi}{g\,A^2+h\,(a^2+b^2)} \end{cases}$$

A partir de l'identité :

$$(A\sqrt{g}-\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{h})^2\geqslant 0,$$

ces expressions des composantes de $\vec{c}$ permettent de vérifier que l'on a toujours :

$$|\vec{c}|=c\leqslant\sqrt{gh}$$

et qu'ainsi, contrairement aux célérités cinématiques de phase, c', ou de groupe, c'', *la célérité dynamique, c, est bornée supérieurement par la célérité caractéristique* $\sqrt{gh}$.

Cette borne supérieure est atteinte lorsqu'il y a, dans l'énergie localisée $[e]$, équiportion entre énergie potentielle $[e_1]$ et énergie cinétique $[e_2]$ et que courant (u, v) et dénivellation $(\zeta-\varepsilon)$ sont en phase. L' " onde " est alors " *progressive* ".

Par contre, si courant et dénivellation sont complètement déphasés ($\cos\varphi=\cos\chi=0$), il n'y a aucun transfert d'énergie, l'onde est " *stationnaire* " et *sa célérité dynamique est nulle* (alors qu'au contraire *sa célérité cinématique de phase est infiniment grande*).

II. 6. — Etude, à titre d'exemple, d'une famille d'ondes élémentaires.

Nous limitant au cas d'une rotation hypo-critique, soit $\sigma^2-4\,\omega^2>0$, considérons la famille des solutions élémentaires définie par:

$$(O_p)\quad \boxed{\zeta=A\,\exp.(p\,y).\cos\left(\sigma t-\sqrt{p^2+\frac{\sigma^2-4\,\omega^2}{gh}}\right).x}$$

Avec des valeurs constantes et uniformes des paramètres A, p et σ, cette expression de ζ vérifie bien l'équation (e), dont elle constitue une solution élémentaire ayant la forme d'une onde progressive.

Reprenant les définitions des diverses célérités

(4) Voir bibliographie (L. VANTROYS, *Bulletin du C.C.E.C.*).

données ci-dessus, on trouve pour cette onde :
célérité cinématique de phase :

$$c' = \frac{1}{|\overrightarrow{\text{grad}}\,(\Phi/\sigma)|} = \frac{\sigma}{\sqrt{p^2+(\sigma^2-4\,\omega^2)/gh}}$$

célérité cinématique de groupe :

$$c'' = \frac{1}{|\overrightarrow{\text{grad}}\,(\partial\Phi/\partial\sigma)|} = \frac{\sqrt{p^2+(\sigma^2-4\,\omega^2)/gh}}{\sigma}\,.gh$$

Avec diverses valeurs du paramètre p correspondent diverses formes de l'onde (O_p). Plusieurs cas particuliers ont été souvent décrits et sont devenus classiques:

Avec $p = -\dfrac{2\,\omega}{\sqrt{gh}}$ on a l' " *onde de Kelvin* " :

$$\zeta = A.\exp\left(\frac{-2\,\omega y}{\sqrt{gh}}\right)\cos\left[\sigma\left(t-\frac{x}{\sqrt{gh}}\right)\right]$$

pour laquelle $c'=c''=c=\sqrt{gh}$.

Avec $p=0$, on a l' " *onde Poincaré-Sverdrup* ":

$$\zeta = A.\cos\left(\sigma t - \frac{\sqrt{\sigma^2-4\,\omega^2}}{gh}\,.x\right)$$

pour laquelle :

$$c=c''=\sqrt{gh}\,.\,\frac{\sqrt{\sigma^2-4\,\omega^2}}{\sigma} < \sqrt{gh}$$

$$\text{et } c'=\sqrt{gh}\,.\,\frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2-4\,\omega^2}} > \sqrt{gh}$$

Signalons en outre que la superposition de deux ondes du type (O_p) convenablement choisies, et correspondant d'ailleurs à deux orientations distinctes de l'axe Ox, réalise l' " *onde de Poincaré-Fichot de première espèce* " (onde *progressive*).

Une autre combinaison de deux ondes du type (O_p) permet de définir l' " *onde de Poincaré-Fichot de deuxième espèce* ", qui est *stationnaire*.

Des vues perspectives présentant l'aspect de ces diverses ondes ont été figurées sur les planches qui accompagnent ce texte.

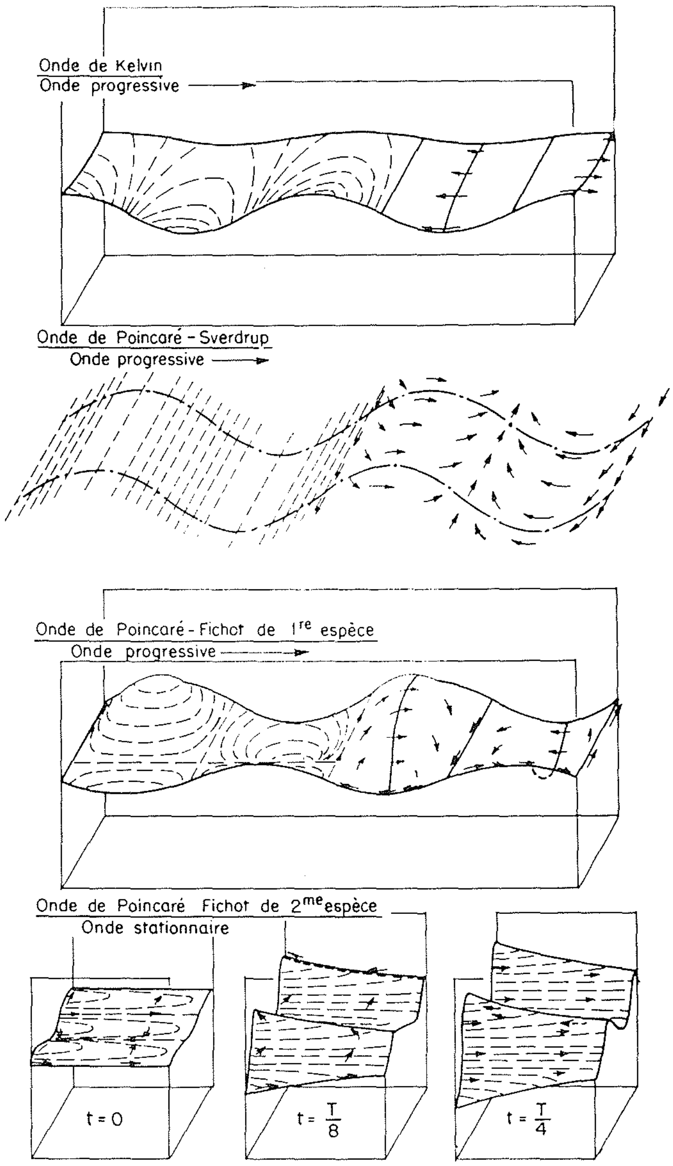

FIG. 1

Représentation en vue perspective des ondes avec indication des courbes de niveau et des champs de courants.

III. — PROBLÈME DES « DONNÉES AUX LIMITES »

III. 1. — Position du problème.

L'étude du phénomène des marées conduit couramment à présenter comme suit le problème de l'intégration d'une équation du type (E) :

« Dans toute l'étendue d'une aire (S), on connaît la valeur du potentiel générateur $g.\varepsilon\,(x, y, t)$; en chaque point de la frontière Γ qui limite (S), on connaît soit la dénivellation ζ, soit la composante normale du courant. En fonction de ces données, déterminer la valeur de ζ à l'intérieur de (S) ».

Analytiquement, ce problème a été attaqué de diverses manières, qui le ramènent en général à la résolution d'équations intégrales du type de Fredholm; signalons en outre une méthode mentionnée par H. Poincaré qui l'identifie à un problème de calcul des variations. Les paragraphes ci-après exposent rapidement les principes de ces diverses solutions qui malheureusement se prêtent souvent mal — en dehors de quelques cas schématiques extrêmement simples — à l'exécution d'un calcul numérique effectif (5).

Certaines considérations d'ordre énergétique permettent de démontrer assez rapidement un " théorème d'unicité " relatif au problème et d'introduire facilement la définition d'une classe de fonctions auxiliaires. C'est pourquoi nous avons inclus au début du présent chapitre le rappel de deux formules, établies à l'occasion de l'étude dynamique des marées, auxquelles nous ferons appel par la suite.

III. 2. — Rappel de deux formules traduisant des bilans de transport d'énergie (6)

a) TRANSIT NATUREL DE PUISSANCE ACTIVE :

En l'absence de potentiel générateur, mais compte tenu, dans l'équation dynamique, d'un terme $(-r\vec{V})$ représentant l'action des résistances passives (avec r=constante positive), le bilan de transit de la puissance active dans une aire (S) limitée par le contour Γ se traduit par la relation :

$$\text{(T.N.)} \iint_{(S)} \varpi\, r\,(h/g)\,|\vec{V}^*|^2\, d^2S = \mathcal{R} \int_\Gamma \varpi\, h\, \zeta^*\,(\vec{V}^*.\vec{n}).ds$$

b) TRANSIT DIFFÉRENTIEL DE PUISSANCE ACTIVE :

Si, à une dénivellation ζ, solution du problème et au courant $\vec{V}$ qui lui correspond, on superpose la perturbation infiniment petite définie par les éléments différentiels $\delta\zeta$ et $\delta\vec{V}$, le fait que la marée " perturbée " doive satisfaire aux équations du problème entraîne la relation (7) :

$$\text{(T.D.)}\ \mathcal{R} \iint_{(S)} \varpi . j\sigma . \varepsilon^* . \delta\zeta^{(*)}\, d^2S$$

$$= -\mathcal{R} \int_\Gamma \varpi h\,[(\zeta . \varepsilon)^* . \delta\vec{V}^{(*)} + \vec{V}^* . \delta\zeta^{(*)}]\,\vec{n}.ds$$

qui, négligeant les résistances passives, mais tenant compte du potentiel générateur g_ε, traduit la permanence du bilan de transit de la puissance active.

III. 3. — Théorème d'unicité.

Soient ζ_1 et ζ_2 deux solutions auxquelles correspondent respectivement les courants $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$, de l'équation *avec second membre* du problème des marées. La différence $D\zeta = \zeta_2 - \zeta_1$, à laquelle correspond le courant $\overrightarrow{DV} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$ sera solution de l'équation *sans second membre* et vérifiera la condition de bilan de transit naturel de puissance (T.N.) rappelée ci-dessus, soit :

$$\iint_{(S)} \varpi r\,(h/g)\,|\overrightarrow{DV}^*|^2\, d^2S = \mathcal{R} \int_\Gamma \varpi h D\zeta^{(*)}\,(\overrightarrow{DV}^*.\vec{n})\, ds$$

Si les marées (ζ_1, V_1) et (ζ_2, V_2) satisfont à des conditions identiques sur la frontière Γ, on aura, en chaque point de cette frontière :

$$\text{soit } D\zeta = 0, \qquad \text{soit } (\overrightarrow{DV}.\vec{n}) = 0,$$

et le second membre de l'égalité ci-dessus sera nul. Le premier membre devra s'annuler aussi, ce qui, dans l'hypothèse $r \neq 0$ (résistances passives non négligées), entraîne :

$$\overrightarrow{DV} = 0, \qquad \text{donc } \vec{V}_2 = \vec{V}_1 \text{ dans (S)}$$

On montre facilement que l'identité des courants $(\vec{V}_2 = \vec{V}_1)$ entraîne, dans le cas général, l'identité des dénivellations $(\zeta_2 = \zeta_1)$. Mais il est essentiel de noter que l'unicité de la solution résulte du fait que *les résistances passives n'ont pas été négligées* $(r \neq 0)$: avec des données idéalisées où les résistances passives sont considérées comme rigoureusement nulles, la multiplicité des solutions devient possible.

III. 4. — Sommation de solutions élémentaires.

Ayant défini un ensemble de solutions élémentaires de l'équation (*e*), on peut chercher à réaliser par sommation (somme d'un nombre fini de termes, série ou intégrale) une solution résultante qui satisfasse à des conditions aux limites données. Cette méthode semble n'avoir fait l'objet

---

(5) Un tel calcul peut cependant être effectué d'une manière approchée — à l'aide des calculatrices électroniques modernes — en substituant à l'équation aux dérivées partielles (E) un ensemble d'équations aux différences finies qui lui soit pratiquement équivalent.

(6) Voir bibliographie (L. VANTROYS, *Bulletin du C.C.E.C.*). NOTATIONS : dans l'aire (S) limitée par le contour Γ, les éléments différentiels superficiel et linéaire sont désignés respectivement par d^2S et par ds.

(7) NOTATIONS : le nombre complexe conjugué de c^* est représenté par $c^{(*)}$.

d'aucune étude systématique [8] permettant de définir par exemple des " ensembles *complets* " de solutions élémentaires à partir desquels, théoriquement du moins, tout problème de " données aux limites " pourrait être résolu.

Signalons cependant que, avec certaines formes très simples des données aux limites, le choix d'une solution élémentaire ou la sommation d'un petit nombre de telles solutions résoud immédiatement le problème. Par exemple on constate facilement que l'oscillation de l'eau dans un canal indéfini de profondeur uniforme dont les parois latérales sont verticales et parallèles peut consister soit en une " onde de Kelvin ", soit en une " onde de Poincaré-Fichot de première espèce ", soit en une " onde de Poincaré-Fichot de deuxième espèce ", ou encore résulter de la superposition d'un nombre quelconque de ces ondes simples; il y a ici solutions multiples : le théorème d'unicité est en défaut, car les résistances passives sont négligées, et de plus, les conditions aux limites ne sont pas précisées sur la partie du contour rejetée à l'infini (canal " indéfini ").

III. 5. — Emploi de la fonction de Green, ordinaire ou généralisée.

Pour exposer cette méthode, adaptée d'un schéma proposé par H. Poincaré [9], nous utiliserons l'équation :

$$(E)^* \quad \Delta\zeta^* + [(\sigma^2 - 4\,\omega^2)/gh]\,\zeta^* = \Delta\varepsilon^*$$

qui contribue à définir la composante :

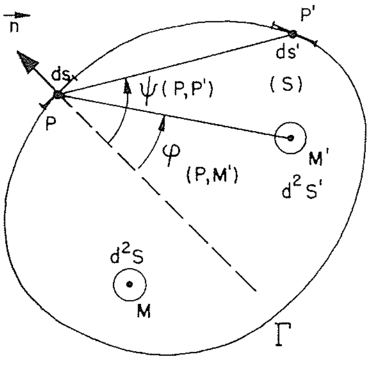

FIG. 2

$\mathcal{R}\,[\zeta^*.\exp(j\sigma t)]$ de la marée.

Le problème se présente différemment selon la nature des conditions aux limites : on peut se donner les valeurs de la dénivellation sur la totalité du contour (*problème de Dirichlet*), ou bien les valeurs de la composante normale du courant sur la totalité du contour (*problème de Neumann généralisé*), ou encore les valeurs de la dénivellation sur une partie du contour, et celles de la composante normale du courant sur le reste du contour (*problème mixte*).

Dans le texte qui suit, nous désignerons par M ou M′ un point de l'aire (S), par P ou P′ un point du contour Γ, et, respectivement par d^2S ou d^2S' ds ou ds' les éléments d'aire ou d'arc correspondants. $\varphi\,(P, M')$ désignera l'angle du vecteur $\overrightarrow{PM'}$ avec la normale intérieure à Γ en P; $\psi\,(P, P')$, l'angle de $\overrightarrow{PP'}$ avec cette même normale (voir figure).

a) PROBLÈME DE DIRICHLET :

En chaque point de Γ on connait $\zeta^* = \lambda^*(P)$.

1. — On détermine la fonction de Green ordinaire C telle :

que la différence $G(M', M) - \mathrm{Log}\,1/M'M$ soit harmonique et régulière pour tout point M appartenant à (S);

et que $G(M', P)$ soit nulle pour tout point P appartenant à Γ.

On trouve pour G la valeur :

$$G(M', M) = \mathrm{Log}\,\frac{1}{M'M} + \int_\Gamma \frac{\cos[\varphi(P, M')]}{M'P}\,.\,\theta(P, M').ds$$

dans laquelle la densité θ, répartie sur Γ, est déterminée par l'équation intégrale :

$$\pi\theta(P, M) = -\int_\Gamma \frac{\cos[\psi(P, P')]}{P'P}\,\theta(P', M).ds' + \mathrm{Log}\,\frac{1}{MP}$$

2. — G étant connue, ζ* est définie dans (S) par l'équation intégrale :

$$2\pi\,[\zeta^*(M) - \varepsilon^*(M)] = \frac{\sigma^2 - 4\,\omega^2}{gh}\left\{\iint_{(S)} G(M', M)\,.\,\zeta^*(M').d^2S' + \int_\Gamma \mathrm{Log}\,\frac{1}{MP'}\,\lambda^*(P').ds'\right\}$$

(8) Signalons cependant que, limité au *cas d'un milieu unidimensionnel*, le problème de la sommation des solutions élémentaires a été étudié par M. P. MASSÉ à propos de la propagation des ondes de crue dans les cours d'eau. Voir bibliographie.

(9) H. POINCARÉ a traité le cas d'une équation plus complète (profondeur non uniforme, domaine océanique étendu en latitude, attraction du « bourrelet » liquide dû à la marée), mais avec des conditions aux limites plus simples (valeurs identiquement nulles sur le contour soit de la dénivellation $\zeta - \varepsilon$, soit de la composante normale $\vec{V}.\vec{n}$ du courant, soit d'une combinaison linéaire de ces deux grandeurs).

b) PROBLÈME DE NEUMANN GÉNÉRALISÉ :

Le problème de Neumann ordinaire correspondrait à la donnée sur le contour Γ de la dérivée normale $\partial\zeta/\partial n$ de la fonction de point ζ^*.

Mais dans le problème des marées, c'est la composante normale du courant $(\vec{V}.\vec{n})$ qui est donnée, et la fonctionnelle qui représente $\vec{V}^*.\vec{n}$ quand on connaît ζ^* contient non seulement la dérivée normale $\partial\zeta^*/\partial n$, mais aussi, pour $\omega \neq 0$, — en raison du terme de Coriolis — la dérivée tangentielle $\partial\zeta^*/ds$:

$$\vec{V}.\vec{n} = g.\frac{j\sigma}{\sigma^2 - 4\,\omega^2}\left(\frac{\partial\zeta^*}{\partial n} + \frac{4\,\omega}{j\sigma}.\frac{\partial\zeta^*}{\partial s}\right)$$

Ainsi le problème de Neumann généralisé comporte la donnée sur le contour Γ de la fonction :

$$\frac{\partial\zeta^*}{\partial n} + \frac{4\,\omega}{j\sigma}\frac{\partial\zeta^*}{\partial s} = \nu^*(\mathrm{P})$$

Il semble qu'à partir des considérations développées par H. Poincaré et E. Fichot on puisse — tout au moins dans certains cas — résoudre ce problème en utilisant la fonction de Green généralisée $\mathcal{G}^*$ telle :

que la différence $\mathcal{G}^*(\mathrm{M}', \mathrm{M}) - \mathrm{Log}\, 1/\mathrm{M}'\mathrm{M}$ soit harmonique et régulière pour tout point M appartenant à (S),

et que l'expression :

$$\left(\frac{\partial}{\partial n} + \frac{4\,\omega}{j\sigma}\frac{\partial}{\partial s}\right)\mathcal{G}^*(\mathrm{M}', \mathrm{P})$$

ait la valeur $2\pi/\mathcal{L}$ pour tout point P appartenant à Γ ($\mathcal{L} = \int_\Gamma ds$ désignant la longueur du contour Γ).

c) PROBLÈME MIXTE :

Une nouvelle généralisation de la méthode, applicable au cas du problème mixte, peut sans doute être recherchée par l'introduction d'un facteur $\delta(\mathrm{P})$ égal à un en tout point de la portion $\Gamma_{\mathcal{D}}$ du contour Γ où est donnée la valeur de la dénivellation, et à zéro en tout point de la portion complémentaire $\Gamma_{\mathfrak{N}}$ où est donnée la valeur de la composante du courant. La donnée des conditions aux limites peut ainsi être présentée sous la forme [10] :

$$1/l.\delta(\mathrm{P}).\zeta^* + [1 - \delta(\mathrm{P})].\left[\frac{\partial\zeta^*}{\partial n} + \frac{4\,\omega}{j\sigma}\frac{\partial\zeta^*}{\partial s}\right] = \mu^*(\mathrm{P})$$

(10) Le facteur constant $1/l$, inverse d'une longueur, a été introduit pour rétablir l'homogénéité de la relation.

III. 6. — Fonctions auxiliaires de Proudman.

Soient Z^*, $(-U^*)$, $(-V^*)$ trois fonctions complexes proportionnelles à $\delta\zeta^{(*)}$, $\delta u^{(*)}$, $\delta v^{(*)}$, imaginaires conjuguées des termes $\delta\zeta^*$, δu^*, δv^* qui représentent respectivement la dénivellation ζ et les composantes du courant $\overrightarrow{\delta V}$, éléments différentiels d'une perturbation virtuelle affectant la marée naturelle $(\zeta, \vec{V})$.

Par leur définition, ces fonctions Z^*, $(-U^*)$, $(-V^*)$ vérifient dans l'aire (S) le *système, sans second membre, imaginaire conjugué* de celui des équations de la marée naturelle :

$$(e)^{(*)}\quad\left\{\begin{array}{l} h\,(U^*)_x + h\,(V^*)_y - j\sigma Z^* = 0 \\ j\sigma U^* + 2\,\omega V^* + g\,(Z^*) = 0 \\ -2\,\omega U^* + j\sigma V^* + g\,(Z^*)_y = 0 \end{array}\right.$$

$$\text{soit}\quad\left\{\begin{array}{l} \Delta Z^* + \dfrac{\sigma^2 - 4\,\omega^2}{gh} Z^* = 0 \\ \dfrac{\sigma^2 - 4\,\omega^2}{g} U^* = j\sigma\,(Z^*)_x - 2\,\omega\,(Z^*)_y \\ \dfrac{\sigma^2 - 4\,\omega^2}{g} V^* = 2\,\omega\,(Z^*)_x + j\sigma\,(Z^*)_y \end{array}\right.$$

Mais, en raison du caractère *arbitraire* de la perturbation " virtuelle " $(\delta\zeta, \overrightarrow{\delta V})$, *aucune condition n'est imposée aux fonctions* Z^*, U^*, V^* *sur le contour* Γ. Ainsi l'absence de second membre et de conditions aux limites rend généralement beaucoup plus aisé le choix d'une fonction Z^* convenable (Z^* étant choisie, U^* et V^* s'en déduisent) que la détermination directe de la marée naturelle ζ^*.

En application de la condition (T.D.) de bilan de transit différentiel de puissance, que nous avons rappelée plus haut, la fonction Z^* et la composante N^* du vecteur (U^*, V^*) suivant la normale extérieure $\vec{n}$ au contour Γ vérifient la relation intégrale [11].

$$\int_\Gamma h\,(\zeta - \bar{\varepsilon})^*.N^*.ds - \int_\Gamma h\,(\vec{V}^*.\vec{n})\,Z^*.ds = \iint_{(S)} j\sigma.\varepsilon^*.Z^*.d^2S$$

Cette relation peut permettre, dans certains

(11) Nous avons écrit cette relation sous sa forme complexe; mais il convient de ne pas oublier que, en fin de compte, seule l'égalité entre termes réels comportera une interprétation physique.

cas, de choisir une fonction Z^*, à laquelle correspond :

$$N^* = g \cdot \frac{j\sigma}{\sigma^2 - 4\,\omega^2}\left(\frac{\partial Z^*}{\partial n} - \frac{4\,\omega}{j\sigma} \cdot \frac{\partial Z^*}{\partial s}\right)$$

dont la connaissance permette de ramener la résolution du problème des données aux limites à celle d'une équation intégrale.

Ainsi, le choix de la fonction $Z^* = Z_1^*(M)$ *ayant " une source " en* P *sur* Γ, c'est-à-dire que, $|\overrightarrow{PP'}| = \rho$ désignant le rayon d'une circonférence de centre P, on ait :

$$\lim\,[2\,\pi\,\rho\,h\,N_1^*(P')] = C^{te} = k^*,$$

conduit à la relation :

$$(1)\qquad (1/2)\,k^*\,[\zeta^*(P) - \varepsilon^*(P)]$$
$$= \int_\Gamma h \cdot N_1^*(P')\,[\zeta^*(P') - \varepsilon^*(P')]\,.\,ds'$$
$$- \int_\Gamma h \cdot Z_1^*(P') \cdot [\overrightarrow{V^*}(P') \cdot \vec{n}(P')]\,.\,ds'$$
$$- \iint_{(S)} j\sigma \cdot Z_1^*(M') \cdot \varepsilon^*(M') \cdot d^2S'$$

équation intégrale du type de Fredholm pouvant permettre la détermination de ζ^* sur le contour Γ si l'on connaît ε^* dans (S) et $\overrightarrow{V^*} \cdot \vec{n}$ sur Γ.

De même le choix de la fonction $Z^* = Z_2^*(M)$ *ayant " une source " en* M *dans* (S) donnera :

$$(2)\qquad k^*\,[\zeta^*(M) - \varepsilon^*(M)]$$
$$= \int_\Gamma h \cdot N_2^*(P') \cdot [\zeta^*(P') - \varepsilon^*(P')]\,.\,ds$$
$$- \int_\Gamma h \cdot Z_2^*(P') \cdot [\overrightarrow{V^*}(P') \cdot \vec{n}(P')]\,.\,ds'$$
$$- \iint_{(S)} j\sigma \cdot Z_2^*(M') \cdot \varepsilon^*(M') \cdot d^2S'$$

L'équation (1) étant supposée résolue, le second membre de (2) ne comprend que des fonctions connues. On voit donc que la combinaison des relations (1) et (2) résoud complètement le problème de Neumann généralisé, en déterminant ζ^* dans (S) si l'on connaît ε^* dans (S) et $\vec{V} \cdot \vec{n}$ sur Γ.

III. 7. — Fonctions propres.

La résolution du problème ayant été ramenée (par une méthode quelconque) à celle d'une équation du type de Fredholm, on désigne sous le nom de " *pulsations propres* " les valeurs σ_m du paramètre σ qui annulent le déterminant D de l'équation intégrale, c'est-à-dire les racines, en nombre généralement infini, de l'équation :

$$D\,(\sigma;\ \omega,\ gh,\ \Gamma_{\varpi},\ \Gamma_{\mathfrak{N}}) = 0$$

les notations Γ_{ϖ} et $\Gamma_{\mathfrak{N}}$ désignant les ensembles des portions du contour $\Gamma = \Gamma_{\varpi} + \Gamma_{\mathfrak{N}}$ sur chacun desquels les conditions aux limites données sont respectivement du type de Dirichlet ou du type de Neumann généralisé.

A chaque pulsation propre σ_m correspond, définie à un facteur constant près, une solution non identiquement nulle $\zeta_m^* \neq 0$ du système *sans seconds membres,* c'est-à-dire un régime oscillant de forme bien définie, mais dans lequel l'amplitude et la phase initiale en un point pris pour référence restent indéterminées. Une telle solution ζ_m^* s'appelle " *fonction propre* ", et le régime qu'elle représente, " *oscillation propre* "; dans ce régime, la partie Γ_{ϖ} du contour, — sur laquelle l'amplitude $|2\,\zeta_m^*|$ de la dénivellation est nulle en tout point —, est une " *ligne nodale* ", et la partie $\Gamma_{\mathfrak{N}}$ du contour, — sur laquelle l'amplitude $|2\,(\overrightarrow{V_m^*} \cdot \vec{n}|$ de la fluctuation de la composante normale du courant est nulle en tout point, — est une " *ligne ventrale* " (12).

Avec $\sigma = \sigma_m$ au premier membre de l'équation (E), l'introduction — dans le système d'équations, écrit en explicitant la variable temps, t, — *de seconds membres de même pulsation* σ_m *qui ne soient pas tous identiquement nuls* conduit à une solution dans laquelle les amplitudes varient exponentiellement. Une telle solution représente un régime d'oscillation "*en résonance*" avec l'excitation qui le provoque; mais la représentation ne reste valable que dans les limites des diverses approximations admises pour mettre le problème en équation : en particulier l'existence des résistances passives vient rapidement freiner puis arrêter l'accroissement des amplitudes.

Dans le cas général, la solution d'un système avec seconds membres correspondant à une pulsation σ distincte de toute pulsation propre ($\sigma \neq \sigma_m$, quel que soit m) peut être facilitée par la connaissance des fonctions propres, certaines méthodes de calcul permettant de déterminer les coefficients γ_m^* du développement de ζ^* en série de fonctions propres, soit :

$$\zeta^* = \Sigma_m\,\gamma_m^* \cdot \zeta_m^*$$

(12) En l'absence de rotation d'entraînement ($\omega = 0$) une " ligne ventrale " :

$$[\overrightarrow{V_m^*} \cdot \vec{n} = -(g/j\sigma) \cdot (\partial\zeta^*_m/\partial n) = 0]$$

correspond à un maximum local de l'amplitude $|2\,\zeta_m^*|$ de la dénivellation.

III. 8. — Problème ramené au calcul des variations.

En posant $\zeta^*=\zeta_1+j\zeta_2$ et $\Delta\varepsilon^*=\Delta\varepsilon_1+j\Delta\varepsilon_2$, on substitue à l'équation en termes complexes :

$$(E)^* \qquad \Delta\zeta^*+\frac{\sigma^2-4\,\omega^2}{gh}\zeta^*=\Delta\varepsilon^*$$

Les deux équations en termes réels :

$$\left\{\begin{array}{ll}(E)_1 & \Delta\zeta_1+\dfrac{\sigma^2-4\,\omega^2}{gh}\zeta_1=\Delta\varepsilon_1\\[2ex] (E)_2 & \Delta\zeta_2+\dfrac{\sigma^2-4\,\omega^2}{gh}\zeta_2=\Delta\varepsilon_2\end{array}\right.$$

Multipliant la première par $\delta\zeta_1.d^2S$, la seconde par $\delta\zeta_2.d^2S$, ajoutant, et intégrant dans l'aire (S), on trouve :

$$\delta I=0 \text{ avec } 2\,I\equiv\iint_{(S)}\left\{\left[\left(\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta_2}{\partial x}\right)^2\right]+\left[\left(\frac{\partial\zeta_1}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta_2}{\partial y}\right)^2\right]+\frac{\sigma^2-4\,\omega^2}{gh}\left[(\zeta_1)^2+(\zeta_2)^2\right]-2\,(\Delta\varepsilon_1\,\zeta_1+\Delta\varepsilon_2.\zeta_2)\right\}\,d^2$$

L'intégration de l'équation des marées est ainsi ramenée à un problème de calcul des variations. Pour le résoudre, H. Poincaré suggère l'emploi de la méthode de W. Ritz qui consiste à chercher une représentation des fonctions ζ_1 et ζ_2 par des développements de la forme :

$$\left\{\begin{array}{l}\zeta_1=\Sigma_q\,\alpha_1{}^q.\eta_q\\ \zeta_2=\Sigma_q\,\alpha_2{}^q.\eta_q\end{array}\right.$$

les fonctions sphériques η et les coefficients α étant déterminés de manière que soient satisfaites la condition d'extremum $\delta I=0$ et les conditions aux limites du problème.

BIBLIOGRAPHIE

FICHOT (E.). — « Exposé critique de la théorie des marées. » (*Annales du Bureau des Longitudes.* Tome XI. *Gauthier-Villars*, Paris, 1938.)

HADAMARD (J.). — « Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'Hydrodynamique. » (*Hermann*, Paris, 1903. Réédition : *Chelsea Publishing Company*, New York, 1949.)

« Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques. » (*Hermann*, Paris, 1932.)

HANSEN (W.). — « Gezeiten und Gezeitenströme in der Nordsee. » (*Deutsche Hydrographische Zeitschrift.* Ergänzungsheft I, 1952.)

KRAVTCHENKO (J.) et APTE (A.). — « Note sur la méthode d'intégration de Fourier des équations de la Physique mathématique. » (Université de Grenoble. *Annales de l'Institut Fourier.* Tome VII, Imprimerie *Durand*, Chartres, 1957.)

MASSE (P.). — « Hydrodynamique fluviale. Régimes variables. » (*Hermann*, Paris, 1935.)

POINCARÉ (H.). — « Théorie des marées. » (*Leçons de Mécanique céleste.* Tome III, Paris, 1910.)

PROUDMAN (J.). — « A theorem in tidal dynamics. » (*Philosophical Magazine*, Vol. XLIX, March 1935.)

VANTROYS (L.). — « La propagation des ondes de marées. » (*Communication à la S.H.F.*, séance du 27 juin 1957.)

« Les divers aspects, mathématiques, dynamiques ou cinématiques du problème des marées. » (*Bulletin d'Information du Comité d'Océanographie et d'Etude des Côtes*, X^e année, n^os 8, 9 et 10, septembre, novembre et décembre 1958.)

COMMENTAIRES DU MÉMOIRE DE L. VANTROYS

Comments on Mr. Vantroys' paper

PAR J. KRAVTCHENKO

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE GRENOBLE
DIRECTEUR DES LABORATOIRES DE MÉCANIQUE DES FLUIDES

Je suis heureux d'être associé à l'hommage rendu à la mémoire de L. Vantroys; je remercie M. Chapouthier d'avoir bien voulu me confier l'analyse d'une partie du mémoire posthume de l'ami que fut le Chef de la S.E.U.M.

Je n'entrerai pas dans les détails des démonstrations des formules de base de ce travail; au reste, quelques unes d'entre elles mériteraient d'être retouchées ou précisées. Je m'attacherai surtout à dégager quelques idées classiques, sur lesquelles repose la solution des problèmes de Physique mathématique. Pour les notations, on se reportera au texte de M. Vantroys.

On a vu qu'une étape importante de la théorie des marées exige la solution d'une équation homogène et réelle du type elliptique :

$$\Delta\zeta + \lambda\zeta = 0; \qquad \lambda = (\sigma^2 - 4\,\omega^2)/gh \tag{1}$$

Il est important de noter que la technique résolutive dépend beaucoup du signe de la constante : $\sigma^2 - 4\,\omega^2$, signe qui, pour une fréquence donnée, peut dépendre de la latitude du lieu. Voici quelques résultats connus. Si $\lambda \leqslant 0$, la solution des problèmes de Dirichlet, Neumann ou mixte, posés relativement à (1), et pour un domaine donné, est unique. Si $\lambda > 0$, il existe une suite infinie, dénombrable, de valeurs de $\lambda = k^2 = (\sigma^2 - 4\,\omega^2)/gh$, pour lesquelles (1) admet une solution, non constante, assujettie à vérifier les conditions frontières homogènes, telles que :

$$d\zeta/dn = 0; \qquad \zeta = 0, \text{ etc.}$$

Les nombres k_n, $n = 1, \dots \infty$, ainsi définis, portent le nom de valeurs propres de (1), relatives à (1), au domaine D et à l'une des conditions aux limites ci-dessus; les solutions $\zeta_n(x, y)$, correspondant aux k_n, sont dites fonctions propres.

L'intérêt du résultat précédent réside dans le fait que les $\zeta_n(x, y)$ forment une famille complète et orthogonale dans D; en gros, cela revient à dire que toute fonction $u(x, y)$, assez régulière dans D, peut se développer en une série du type :

$$u = \sum_1^{\infty} c_n\,\zeta_n(x, y), \tag{2}$$

où les c_n sont des constantes définies par :

$$c_n = \frac{\iint_D u\,\zeta_n\,dx\,dy}{\iint_D \zeta_n^2\,dx\,dy}$$

C'est l'extension des développements classiques de Fourier aux suites de fonctions propres, déjà mentionnée brièvement par Vantroys. Il se trouve que le mode de représentation (2) des solutions quelconques de (1), en particulier de celles déterminées par des conditions aux limites linéaires quelconques et qui correspondent à des valeurs quelconques de λ, est particulièrement commode en vue du calcul effectif des solutions; il existe des procédés pour calculer les c_n à partir des données frontières seules. Mais il faut prendre garde qu'en général, les séries du type (2) ainsi obtenues ne sont pas dérivables terme à terme. Il s'ensuit qu'on ne peut vérifier directement et par substitution que le second membre de (2) donne effectivement la solution du problème; et il faut, parfois, mettre en œuvre des raisonnements très délicats pour établir ce point de rigueur.

L. Vantroys étudie ensuite les méthodes résolutives des problèmes des marées au moyen des fonctions de Green. Il faut noter que ces fonctions n'existent que si $\lambda \leqslant 0$, mais alors elles s'expriment au moyen des fonctions propres $|\zeta_n|(x, y)$, précédemment définies.

En résumé, on peut dire que la méthode des fonctions propres et celle de la fonction de Green ne constituent que deux aspects d'un procédé unique. Il m'a paru utile de rappeler ces points classiques, qui mettent de l'unité et de l'ordre dans les questions, en apparence distinctes. Aussi donc, tout revient à l'explicitation des k_n et des ζ_n. Malheureusement, ce problème n'a été résolu exactement que pour un petit nombre de domaines : cercle, rectangle, secteur circulaire quelconque; dans le cas général, il faut se contenter de solutions approchées.

La méthode des équations intégrales, abordée par Vantroys, donne lieu à des observations d'un autre ordre. Dans beaucoup d'ouvrages récents sont décrits des procédés approchés de résolution de telles équations. Je n'ai pas eu l'occasion d'appliquer ces raisonnements moi-même pour émettre un avis autorisé sur leur efficacité pratique. Mais, *a priori*, il semble intéressant de traiter un problème concret relatif aux marées par de telles méthodes.

A côté des procédés résolutifs que l'on vient d'analyser — et que Vantroys appelle fonctionnels — cet auteur décrit quelques méthodes variationnelles. Il rappelle ce fait classique que la solution de (1), assujettie à vérifier certains types de problèmes aux limites, peut être identifiée avec la fonction qui réalise le minimum d'une fonctionnelle intégrale quadratique. Mais Vantroys semble exprimer des doutes quant à la portée pratique de cette remarque. Je ne saurais partager *a priori* ce scepticisme. Plusieurs exemples récents — mais déjà classiques — prouvent, au contraire, que les méthodes variationnelles fournissent souvent des moyens commodes et rapides de calcul. Il serait donc indiqué d'appliquer ces procédés à l'étude d'un cas concret, d'autant que la variante de la méthode, due à Galerkine, donne à celle-ci beaucoup de souplesse. Enfin, il faut noter que les méthodes variationnelles donnent le moyen de calculer d'une manière approchée les k_n et les ζ_n. Cette remarque permet de faire une synthèse des procédés fonctionnels et variationnels.

Les lignes qui précèdent n'ont qu'un but : souligner la variété et la richesse des sujets abordés par Vantroys.

NOTRE FRONTISPICE

COULOMB (1736-1806).

Coulomb : un nom qui rappelle à chacun ses premiers pas dans le domaine de l'électricité, mais qui éveille aussi des résonances dans l'esprit des Hydrauliciens, puisqu'en 1789 il était intendant général des fontaines de France, et dans celui des tenants de la Mécanique des sols, puisqu'on lui doit en 1773 des travaux sur la poussée des terres...

Charles Augustin de Coulomb naquit le 14 juin 1736 à Angoulème, d'une famille de magistrats. Attiré très jeune vers les sciences mathématiques, il entra au Corps du Génie militaire et, en 1761, il était nommé ingénieur ordinaire du Roy. L'année 1764 vit son départ pour la Martinique où, capitaine en 1767, il construisit le Fort Bourbon, mais dont le climat lui altéra définitivement la santé.

A son retour en France, il met au point la cloche à air comprimé pour les travaux sous l'eau et partage avec van Swinden, en 1779, le prix de l'Académie des Sciences pour la meilleure construction des boussoles; ses expériences classiques sur le frottement lui valurent en 1781 le prix pour la théorie des machines simples et son élection à l'Académie des Sciences.

De cette époque, datent ses travaux mémorables sur les lois de la torsion qui le conduisirent à construire la célèbre balance de torsion, sur les lois du magnétisme et de l'électricité, sur les frottements et les moulins à vent, ainsi que son mémoire de 1785 sur les pentes des rivières bretonnes.

La Révolution française le trouve lieutenant-colonel du génie et superintendant des eaux et fontaines; il démissionne alors de tous ses emplois et lors de la promulgation de la loi expulsant les nobles de Paris, il se retire avec son ami Borda près de Blois.

Revenu à Paris en 1801, à la création de l'Institut de France dont il préside une section, il est nommé inspecteur général de l'Instruction publique; mais sa santé, fortement ébranlée, lui fait peu à peu défaut et, le 23 août 1806, il meurt à Paris.

Du caractère de ce grand savant, ses contemporains ont retenu surtout son abord amène, sa modestie, ses vertus familiales et une grande fermeté de caractère, dont il donna une preuve éclatante en s'opposant, en 1781, à l'établissement des canaux de Bretagne tenus par lui pour non rentables, envers et contre les Etats de cette province et en dépit des brimades particulièrement pénibles que lui valut sa ferme attitude, laquelle finalement lui attira l'estime générale.

COULOMB (1736-1806).

The name of Coulomb is one which reminds us of our first acquaintance with electricity but it also strikes responsives chords in the minds of hydraulic engineers who remember that he was Intendant Général des Fontaines de France and in the minds of Soil Mechanics engineers who associate him with his work dating from 1773 on ground thrusts.

Charles Augustin de Coulomb was born on June 14th 1736. He joined the Corps of Military Engineers and was appointed Engineer-in-Ordinary to the King in 1764. He went to Martinique in 1767 where he built Fort Bourbon and was promoted to the rank of captain in 1767. However the climate had a permanently damaging effect upon his health.

When he returned to France he developed the compressed air diving bell and in 1779 he shared the Academy of Sciences prize with Swinden for the best compass design. His well known experiments on friction won him the prize for the theory of simple machines in 1781 and ensured that he was elected to the Academy of Sciences.

Dating from this period is his work on the laws of torsion, which resulted in his constructing the torsion balance, on the laws of electricity and magnetism, and on friction and windsmills, not to forget his paper on the gradients of rivers in Brittany which appeared in 1785.

When the French Revolution broke out he was a lieutenant-colonel in the Corps of Military Engineers and Superintendant des Eaux et Fontaines. He then resigned from all his appointments, and when the law under which all nobles were expelled from Paris came into force, he withdrew to Blois with his friend Borda.

He returned to Paris in 1801 to become president of a section of the Institut de France when it was founded, and was appointed Inspector-General of Education. However, his health gradually became worse and he died in Paris on August 23rd 1806.

His contemporaries remembered him for his approachability, his modesty, his qualities as a family man and his great strength of character, of which he gave outstanding proof when, in 1781, he opposed the construction of the Brittany Canals, which he considered to be uneconomic, in the face of the Brittany Parliament and despite the vile abuse which his unyielding attitude drew upon him. This action finally resulted in his being regarded with great esteem by all.