

# Théorie de la génération de la houle cylindrique par un batteur plan

(2<sup>e</sup> ORDRE D'APPROXIMATION)

Theory of the generation of a cylindrical wave  
by a straight-fronted wave generator

(Second order of approximation)

PAR PIERRE FONTANET

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

(Suite et fin) (\*)

*La théorie du mouvement engendré par un batteur plan dans un canal indéfini, de profondeur et de largeur constantes, rempli d'un fluide parfait, pesant et incompressible, a été faite au premier ordre d'approximation par MM. Havelock, Biesel et Kravtchenko. Le présent travail est consacré à l'étude de la deuxième approximation, ainsi qu'au calcul de l'harmonique non linéaire émis par le volet. Les abaques relatifs au batteur piston ont été tracés et reproduits dans le texte.*

*La solution se présente sous la forme d'une somme de séries uniformément convergentes dans toute la masse du fluide, ainsi que sur les frontières, sauf aux extrémités du volet, où la solution possède des singularités logarithmiques.*

*The theory of the movement produced by a straight-fronted wave generator in an indefinite canal of constant depth and breadth and containing a perfect ponderable and incompressible fluid, has been established to a first order of approximation by Messrs. Havelock, Biesel and Kravtchenko. The present work is concerned with the study of a second order of approximation and the calculation of the non-linear harmonic emitted by the flap. Graphs for a plunger-type wave generator have been plotted and are reproduced in the text.*

*The solution takes the form of a sum of uniformly converging series throughout the fluid mass and at its boundaries, except at the flap ends, where logarithmic singularities occur.*

## CHAPITRE IV

### CALCUL DE L'HARMONIQUE ET DE L'OSCILLATION LOCALE DE PÉRIODE T/2

Les équations et conditions aux limites auxquelles doit satisfaire la fonction  $J_2(x_0, y_0, t)$  étant linéaires, on peut décomposer cette dernière en trois fonctions, qui vérifient sur le batteur chacune des conditions aux limites suivantes :

$$\frac{\partial J'_2}{\partial x_0} = F_1(y_0) \quad \frac{\partial J''_2}{\partial x_0} = F_2(y_0) \sin 2kt \quad \frac{\partial J'''_2}{\partial x_0} = F_3(y_0) \cos 2kt$$

1° RECHERCHE DE LA FONCTION  $J'_2(x_0, y_0)$  :

La fonction  $J'_2(x_0, y_0)$  ne dépend pas du temps. La condition de surface se réduit donc à :

(\*) Cf. *La Houille Blanche*, n° 1-1961, page 3.

$$\frac{\partial J'_2}{\partial y_0} = 0$$

Les solutions à variables séparées de l'équation  $\Delta J'_2 = 0$ , vérifiant les conditions de fonds et de surface ainsi que les conditions à l'infini, appartiennent à un type unique :

$$J'_2(x_0, y_0) = \sum_1^{\infty} \frac{c'_r}{e^2} e^{-\mu_r x_0} \cos \mu_r y_0$$

avec :

$$\mu_r h = \pi + r\pi$$

Ce terme indépendant du temps représente une variation du niveau moyen qui devient négligeable à faible distance du batteur. On choisira les coefficients  $A_p$  de manière à satisfaire à la condition limite sur le volet, soit :

$$\frac{\partial J'_2}{\partial x_0} = - \sum_1^{\infty} \mu_r \frac{c'_r}{e^2} \cos \mu_r y_0 = F_1(y_0)$$

La suite des fonctions  $\cos \mu_r y_0$  est complète et orthogonale, puisque ce sont les fonctions propres de l'équation différentielle  $U'' + \mu U = 0$  assujetties aux conditions limites :

$$U'(0) = U'(h) = 0.$$

Par suite, ce développement est possible et l'on a :

$$\frac{c'_r}{e^2} = \frac{- \int_0^h F_1(y_0) \cos \mu_r y_0 dy_0}{\mu_r \int_0^h \cos^2 \mu_r y_0 dy_0} = \frac{- 2 \int_0^h F_1(y_0) \cos \mu_r y_0 dy_0}{\mu_r h + \sin \mu_r h \cos \mu_r h}$$

2° RECHERCHE DE LA FONCTION  $J''_2(x_0, y_0, t)$  :

On forme avec les solutions à variables séparées une combinaison linéaire qui vérifie les conditions 1, 2 et 4 :

$$J''_2(x_0, y_0, t) = \frac{a'_0}{m'_0 e^2} \frac{\text{ch } m'_0 y_0}{\text{sh } m'_0 h} \cos(2kt - m'_0 x_0) + \sum_1^{\infty} \frac{2 a'_r}{m'_r e^2} e^{-im'_r x_0} \frac{\text{ch } m'_r y_0}{\text{sh } m'_r h} \sin 2kt$$

$m'_0$  étant l'unique racine réelle et  $m'_r$  l'une des racines imaginaires pures de  $4k^2 = m'g \text{th } m'h$ .

On détermine les coefficients  $a'_0$  et  $a'_r$  pour satisfaire à la condition (3), d'où :

$$\frac{a'_0}{e^2} \frac{\text{ch } m'_0 y_0}{\text{sh } m'_0 h} - \sum_1^{\infty} \frac{2 i a'_r}{e^2 \text{sh } m'_r h} \text{ch } m'_r y_0 = F_2(y_0)$$

$$\frac{a'_0}{e^2 \text{sh } m'_0 h} = \frac{2 m'_0 \int_0^h F_2(y_0) \text{ch } m'_0 y_0 dy_0}{m'_0 h + \text{sh } m'_0 h \text{ch } m'_0 h} - \frac{2 a'_r}{e^2 \text{sh } m'_r h} = \frac{2 i m'_r \int_0^h F_2(y_0) \text{ch } m'_r y_0 dy_0}{m'_r h + \text{sh } m'_r h \text{ch } m'_r h}$$

3° RECHERCHE DE LA FONCTION  $J'''_2(x_0, y_0, t)$  :

On aura de même :

$$J'''_2(x_0, y_0, t) = - \frac{b'_0}{m'_0 e^2} \frac{\text{ch } m'_0 y_0}{\text{sh } m'_0 h} \sin(2kt - m'_0 x_0) + \sum_1^{\infty} \frac{2 b'_r}{m'_r e^2} e^{-im'_r x_0} \frac{\text{ch } m'_r y_0}{\text{sh } m'_r h} \cos 2kt$$

$$\frac{b'_0}{e^2 \text{sh } m'_0 h} \text{ch } m'_0 y_0 - \sum_1^{\infty} \frac{2 i b'_r}{e^2 \text{sh } m'_r h} \text{ch } m'_r y_0 = F_3(y_0)$$

$$\frac{b'_0}{e^2 \text{sh } m'_0 h} = \frac{2 m'_0 \int_0^h F_3(y_0) \text{ch } m'_0 y_0 dy_0}{m'_0 h + \text{sh } m'_0 h \text{ch } m'_0 h} - \frac{2 b'_r}{e^2 \text{sh } m'_r h} = \frac{2 i m'_r \int_0^h F_3(y_0) \text{ch } m'_r y_0 dy_0}{m'_r h + \text{sh } m'_r h \text{ch } m'_r h}$$

Le calcul des coefficients  $a'_0, b'_0, a'_r, b'_r, c'_r$  se ramène au calcul d'intégrales de la forme :

$$I = \int_0^h \text{ch } \alpha y_0 \text{ ch } \beta y_0 dy_0 = \frac{\text{sh } (\alpha + \beta) h}{2 (\alpha + \beta)} + \frac{\text{sh } (\alpha - \beta) h}{2 (\alpha - \beta)}$$

$$J = \int_0^h \text{sh } \alpha y_0 \text{ ch } \beta y_0 dy_0 = \frac{\text{ch } (\alpha + \beta) h}{2 (\alpha + \beta)} + \frac{\text{ch } (\alpha - \beta) h}{2 (\alpha - \beta)} - \frac{\alpha}{\alpha^2 - \beta^2}$$

dans lesquelles on remplacera  $\alpha$  par  $m_0, 2m_0, m_p, m_0 \pm m_p, m_p \pm m_q$  et  $\beta$  par  $i\mu', m'_0, m'_r$ .

On peut simplifier l'expression des coefficients en utilisant les formules d'addition pour les fonctions hyperboliques et en remarquant que :

$$\cos \mu_r h = (-1)^{r+1} \quad \sin \mu_r h = 0$$

$$\text{th } m_0 h = \frac{k^2}{m_0 g} \quad \text{th } m_p h = \frac{k^2}{m_p g} \quad \text{th } m'_0 h = \frac{4 k^2}{m'_0 g}$$

Les calculs ne présentent aucune difficulté. Ils sont d'ailleurs grandement facilités par les symétries existant entre certains termes qui se déduisent les uns des autres par changement de :

$$m_p \text{ en } -m_p, m_0 \text{ en } m_p, \text{ etc...}$$

On obtient ainsi les résultats figurant à la planche I. On a pris dans ces formules :

$$f(y_0) = 1 + \frac{\Delta e}{he} y_0 \quad \text{d'où } f'(y_0) = \frac{\Delta e}{he}$$

Le cas du batteur piston s'obtient en prenant  $\Delta e = 0$  aussi bien dans les formules donnant  $a'_0, b'_0, c'_r$  que dans les formules donnant  $A_0, A_p$ .

Les formules donnant les coefficients  $a'_r$  et  $b'_r$  se déduisent des formules donnant  $a'_0$  et  $b'_0$  par simple changement de  $m'_0$  en  $m'_r = -i\mu'_r$  et multiplication par  $i/2$ .

Il est donc inutile de les écrire.

Dans ces formules, on a posé :

$$A_0 = \frac{a_0}{e} \quad A_p = \frac{a_p}{e} \quad L_0 = m_0 h \quad L'_0 = m'_0 h \quad M_r = \mu_r h \quad L_p = \lambda_p h \quad R = \frac{k^2 h}{g}$$

Ce sont des grandeurs sans dimension et l'on reconnaît aisément que  $hc'_r/e^2, ha'_0/e^2$  et  $hb'_0/e^2$  sont elles-mêmes sans dimensions.

On remarque que les séries numériques donnant les divers coefficients sont rapidement convergentes. Leur terme général est de l'ordre de :

$$\frac{1}{p^3} \text{ ou } \frac{1}{p^4}$$

$$L_p = \lambda_p h \sim p\pi \quad \frac{a_p}{\sin \lambda_p h} = O\left(\frac{1}{p^2}\right) \text{ ou } O\left(\frac{1}{p^3}\right)$$

Il est donc possible de calculer ces coefficients avec une bonne précision tout en se contentant d'un nombre limité de termes. On peut d'ailleurs trouver facilement une valeur approchée par excès du reste de chaque série, ce qui permet de chiffrer l'erreur commise.

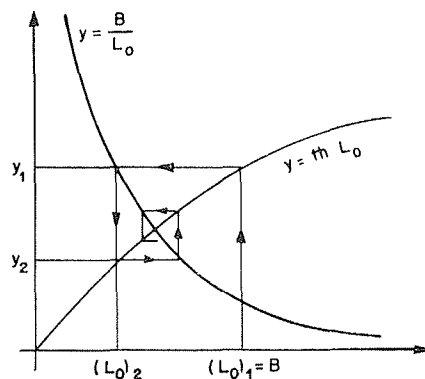


FIG. 10

Pour effectuer le calcul proprement dit, il faut d'abord déterminer la valeur des racines :

$$\begin{aligned} L_0 &= m_0 h & L_p &= \lambda_p h \\ L'_0 &= m'_0 h & L'_r &= \lambda'_r h \end{aligned}$$

On procède par itération.

On commence les itérations avec la valeur approchée :

$$(L_0)_1 = (m_0 h)_1 = \frac{k^2 h}{g} = B$$

On calcule :

$$y_1 = \operatorname{th} (L_0)_1$$

On en déduit la nouvelle valeur :

$$(L_0)_2 = \frac{B}{y_1}$$

On calcule :

$$y_2 = \operatorname{th} (L_0)_2$$

La figure montre clairement que les itérations convergent vers le point d'intersection des courbes :

$$y = \operatorname{th} L_0 \quad y = \frac{B}{L_0}$$

c'est-à-dire vers la racine cherchée. On arrête les itérations quand la différence entre deux valeurs successives de  $L_0$  devient inférieure à la précision désirée.

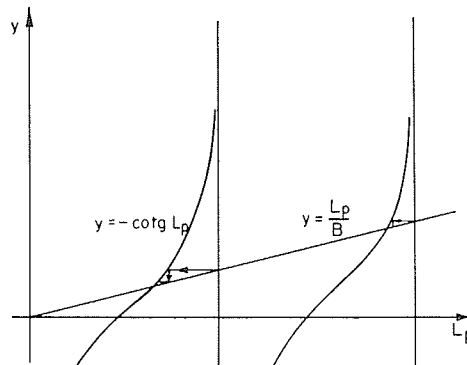


FIG. 11

De même, pour le calcul de  $L_p$ , on commence les itérations avec la valeur approchée  $(L_p)_1 = p\pi$ .

On calcule :

$$y_1 = \frac{g}{k^2 h} (\lambda h)_1 = \frac{(L_p)_1}{B}$$

On en déduit :

$$(L_p)_2 = -\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{y_1}$$

Les itérations convergent encore vers le point d'intersection des courbes :

$$y = -\operatorname{cotg} L_p \quad \text{et} \quad y = L_p/R$$

L'application des formules donne alors :

$$\frac{ha'_0}{e^2}, \quad \frac{hb'_0}{e^2}, \quad \frac{hc'_r}{e^2}, \quad \frac{ha'_r}{e^2}, \quad \frac{hb'_r}{e^2}$$

en fonction de  $L_0$ ,  $L'_0$ ,  $L_p$  et  $B$ .

Pour construire les abaqués, point par point, on prend pour variable indépendante la profondeur relative  $h/L$  (variable sans dimensions),  $L$  étant la longueur d'onde de la houle fondamentale.

On a d'ailleurs :

$$L_0 = m_0 h = \frac{2 \pi h}{L}$$

$$B = \frac{k^2 h}{g} = L_0 \operatorname{th} L_0 = f\left(\frac{h}{L}\right)$$

De même,  $L'_0$ ,  $L_p$  ne dépendent que de  $B$  et donc de  $h/L$ .

Il en résulte que  $ha'_0/e^2$ ,  $hb'_0/e^2$ ... ne dépendent que de  $h/L$  et de  $\Delta e/e$ .

Pour traiter le cas du volet balançoire d'équation  $ef(y_0) = e + (\Delta e/h) y_0$  avec un rapport  $\Delta e/e$  quelconque, il est possible, dans l'approximation du 1<sup>er</sup> ordre, de décomposer chaque coefficient  $a_0$ ,  $a_p$  en deux parties, la première correspondant au batteur piston ( $\Delta e = 0$ ), et la deuxième au volet simple avec centre de rotation sur le fond ( $e = 0$ ). Ainsi, pour chaque coefficient, il suffit de tracer deux abaqués seulement.

Au second ordre, par contre, les formules donnant  $ha'_0/e^2$ , etc., n'étant pas linéaires par rapport à  $A_0$ ,  $A_p$ , il n'est pas possible de procéder de la sorte et l'on doit tracer pour chaque coefficient  $ha'_0/e^2$ ,  $hb'_0/e^2$ , etc., un réseau d'abaqué dépendant du paramètre  $\Delta e/e$ .

En fait, nous n'avons calculé que les abaqués correspondant à la valeur  $\Delta e/e = 0$  (batteur piston). Ceux-ci donnent, en fonction de la profondeur relative  $h/L$ , l'amplitude de l'harmonique, soit :

$$\frac{hA'_0}{e^2} = \frac{h \sqrt{a'^2_0 + b'^2_0}}{e^2}$$

et sa différence de phase  $\alpha$  avec le terme du 2<sup>e</sup> ordre associé à la houle fondamentale (\*), cette différence de phase étant calculée au droit du batteur ( $x_0 = 0$ ).

$$\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{b'_0}{a'_0} + \pi$$

On a ainsi le diagramme :

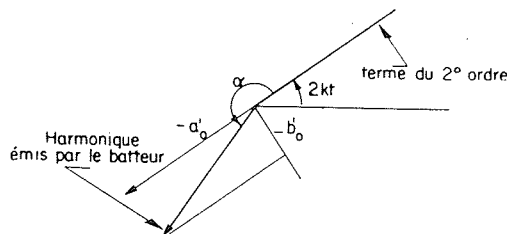


FIG. 12

Il est facile d'interpréter la forme de ces abaqués. Si la profondeur relative est faible, on est dans le cas des ondes longues en eau peu profonde ( $\operatorname{ch} m_0 h \neq 1$ ). La houle épouse alors assez bien le mouvement du batteur piston et l'oscillation locale garde une très petite amplitude. L'harmonique émis par le batteur sert principalement à compenser le terme du 2<sup>e</sup> ordre de la houle. Ceci explique qu'il soit pratiquement en opposition de phase avec ce dernier. Si  $h/L$  croît, le mouvement de la houle épouse moins bien celui du batteur. L'oscillation locale qui fait la compensation devient plus importante et concourt, en même temps que le terme de M. Miche, à la formation de l'harmonique. La phase de ce dernier devient donc quelconque par rapport au premier.

(\*) Ce terme a pour abscisse :

$$\frac{-m_0 a_0^2}{4 e^2 \operatorname{sh}^2 m_0 h} \left[ 1 - \frac{3 \operatorname{ch} 2 m_0 y_0}{2 \operatorname{sh}^2 m_0 h} \right] \sin (2 k t - 2 m_0 x_0)$$

Lorsque  $h/L$  croît au-dessus de 0,5, la profondeur peut être considérée pratiquement comme infinie. Une augmentation de  $h/L$  n'a donc pas d'effet sensible sur le mouvement. Ceci explique la présence d'une asymptote pour la phase et pour l'amplitude de l'harmonique (\*).

Lorsque  $h/L$  est faible, l'amplitude du terme de M. Miche est importante puisqu'elle croît en raison inverse de la profondeur. L'amplitude de l'harmonique qui est engendrée par le terme devient donc elle aussi importante.

Au-dessous d'une valeur minimale de  $h/L$ , la méthode des petits paramètres qui nous a servi à expliciter la solution cesse d'être valable, car les termes du 2<sup>e</sup> ordre croissent au-delà de toute limite et la série qui a servi à représenter le mouvement du fluide :

$$(x = x_0 + eX_1 + e^2X_2 + \dots)$$

n'est probablement plus convergente. La partie gauche des abaques devra donc être utilisée avec précaution.

Des expériences sont en cours au Laboratoire de Mécanique des Fluides de l'Institut Polytechnique de Grenoble. Elles auront pour but de vérifier la présente théorie et de déterminer ses limites de validité.

Lorsque le mouvement du batteur n'est pas rigoureusement sinusoïdal, l'harmonique calculé par la présente théorie se compose avec l'harmonique calculé par M. Apté. Ces deux termes étant du 2<sup>e</sup> ordre, on a vu qu'ils s'ajoutent vectoriellement comme si le phénomène était linéaire, puisque leurs interactions sont d'ordre supérieur au second.

Les expériences demandent une mesure très précise des phases et des amplitudes, mesure d'autant plus délicate que les dernières sont de l'ordre de quelques millimètres.

En effet, pour une houle fondamentale ayant une longueur d'onde de 1 mètre, une cambrure de 5 %, et pour une profondeur d'eau de 30 centimètres, l'abaque donne une amplitude de 1,9 mm seulement (2 A'<sub>0</sub>).

Les mesures sont effectuées avec l'appareil S.M. mis au point au Laboratoire de Mécanique des Fluides par M. le professeur Santon et par M. Marcou. L'extrême sensibilité de cet appareil permet de mettre en évidence les phénomènes du second ordre.

## CHAPITRE V

### VALIDITÉ DE LA SOLUTION FORMELLE

La présente théorie est basée sur la validité de la représentation des petits mouvements d'un fluide pesant à surface libre, par une série de la forme :

$$\begin{aligned} x &= x_0 + eX_1(x_0, y_0, t) + e^2X_2(x_0, y_0, t) + \dots \\ y &= y_0 + eY_1(x_0, y_0, t) + e^2Y_2(x_0, y_0, t) + \dots \end{aligned}$$

Rappelons que cette représentation est une application de la méthode des petits paramètres de Poincaré et qu'elle a été utilisée par M. Miche et à sa suite par MM. Biesel et Daubert. A notre connaissance, la convergence de ces séries n'a jamais été démontrée. On peut simplement remarquer que, dans la pratique, l'addition des termes du second ordre améliore nettement la description du mouvement.

La validité de la théorie du batteur dépendra donc essentiellement de la validité de cette représentation.

Nous avons admis ce fait, au début de notre travail, et nous avons supposé, en plus, qu'il

---

(\*) Pour déterminer le point à l'infini, il faudrait recommencer les calculs en utilisant les expressions de  $X_1$  et  $Y_1$  valables en profondeur infinie (cf. Havelock). Nous n'avons pas fait ces calculs étant donné leur faible intérêt pratique

était possible de limiter la série à ses termes du 1<sup>er</sup> et du 2<sup>e</sup> ordres, pour des valeurs de  $e$  « suffisamment petites », mais dont la grandeur n'est pas susceptible d'être évaluée avec précision.

Remarquons, en outre, que nous nous sommes limités à l'étude des mouvements voisins du mouvement irrotationnel (en raison des hypothèses faites sur le courant de masse). Ces mouvements correspondent, sans doute, à ceux qui sont observés en pratique dans un canal à houle. Un rotationnel arbitraire du 1<sup>er</sup> ordre aurait fait apparaître des termes séculaires qui augmentent indéfiniment avec le temps. Dans ces conditions, on aurait pu craindre que le rayon de convergence soit fonction du temps et que les séries ci-dessus ne convergent que pour des intervalles de temps trop petits pour qu'on puisse les utiliser. Cette objection est d'ailleurs classique et a été formulée par Poincaré.

La validité de la représentation du mouvement du fluide ayant été admise, il convient maintenant de montrer la légitimité des opérations formelles effectuées. Celles-ci nous ont conduit à exprimer la solution sous la forme d'une somme de séries infinies. Ces dernières ne définissent, en réalité, le mouvement, qu'à la condition d'être uniformément convergentes dans la masse du fluide, ainsi que leurs deux premières dérivées par rapport aux coordonnées  $x$ ,  $y$  et  $t$ . Lorsque cette condition est réalisée, les séries représentent en effet des fonctions définies et continues dans tout le domaine ainsi que leurs deux premières dérivées. Ces fonctions vérifient d'ailleurs, par construction, les équations du mouvement.

De la même manière, pour que les conditions aux limites soient effectivement satisfaites, il faut que les séries définissant  $Y_2$  sur le fond du canal,  $\partial^2 X_0 / \partial t^2$  et  $\partial Y_2 / \partial t$  sur la surface libre,  $X_2$  et  $Y_2$  à l'infini,  $X_2$  sur le batteur soient uniformément convergentes sur ces frontières.

Or la solution se compose de trois séries distinctes :

$$X_2 = \frac{\partial L_2}{\partial x_0} + \frac{\partial K_2}{\partial x_0} + \frac{\partial J_2}{\partial x_0}$$

$$Y_2 = \frac{\partial L_2}{\partial y_0} + \frac{\partial K_2}{\partial y_0} + \frac{\partial J_2}{\partial y_0}$$

Il est facile de montrer que les deux premières sont uniformément convergentes ainsi que leurs dérivées dans la masse, sur le fond, à l'infini et sur la surface libre.

En effet, la solution au 1<sup>er</sup> ordre,  $X_1$  et  $Y_1$ , est donnée sous la forme de séries infinies absolument et uniformément convergentes ainsi que leurs dérivées de tous ordres, et cela, dans toute la masse du fluide, ainsi que sur les frontières (batteur excepté).

Il est donc légitime d'effectuer les produits terme à terme des séries dérivées comme on l'a fait notamment pour calculer les jacobiens figurant aux seconds membres des équations, ou pour expliciter la condition limite en surface. On obtient ainsi des séries qui sont absolument et uniformément convergentes dans tout le domaine sauf peut-être sur le batteur. A leur tour, les séries :

$$\frac{\partial L_2}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial L_2}{\partial y_0}, \quad \frac{\partial K_2}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial K_2}{\partial y_0}$$

sont obtenues en intégrant, terme à terme, les séries uniformément convergentes qui constituent les seconds membres des équations du mouvement ou de la condition de surface. Elles sont donc absolument et uniformément convergentes dans toute la masse du fluide sauf peut-être sur le batteur. On peut d'ailleurs le vérifier directement sur l'expression de  $X_2$  et  $Y_2$  lorsque l'on a remplacé les  $M_p$  et  $M_q$  par leurs valeurs et regroupé les termes. Ceux-ci contiennent en facteur les termes exponentiels  $e^{-\lambda_p x_0}$ ,  $e^{-\lambda_q x_0}$ , qui assurent la convergence des fonctions et de leurs dérivées de tous ordres quel que soit  $x_0$  positif.

Par contre, sur le batteur,  $x_0 = 0$ , les exponentielles se réduisent à l'unité et l'on doit examiner la convergence de plus près.

On fera ci-dessous l'étude de la série  $\xi(0, y_0, t)$  à laquelle se réduit l'expression  $(\partial L_2 / \partial x_0) + (\partial K_2 / \partial x_0)$  sur le volet. On verra qu'elle y est uniformément convergente sauf aux extrémités et au point milieu ( $x_0 = 0$ ,  $y_0 = h/2$ ), où la fonction représentée par la série possède des singularités logarithmiques, de partie principale  $\log z_0$ ,  $\log(z_0 - ih)$ ,  $\log(z_0 - ih/2)$ .

Il reste à étudier la convergence dans la masse et sur les frontières de la troisième série :

$$X''_2 = \frac{\partial J_2}{\partial x_0} \quad Y''_2 = \frac{\partial J_2}{\partial y_0}$$

Une étude analogue à celle qui a déjà été faite au 1<sup>er</sup> ordre montrerait que leur convergence dépend de la nature des singularités de la fonction qu'elles représentent sur le batteur, soit :

$$\left[ X_2 - \frac{\partial L_2}{\partial x_0} - \frac{\partial K_2}{\partial x_0} \right]_{x_0=0} = X_2 - \xi(0, y_0, t)$$

On connaît déjà les singularités de  $\xi(0, y_0, t)$  et l'on devra rechercher également celles de la solution au 2<sup>e</sup> ordre  $X_2$  et  $Y_2$ . On verra que celles-ci sont situées aux extrémités du batteur et ont pour partie principale  $z_0(\log z_0)^2$ , le point milieu étant, d'ailleurs, un point ordinaire.

On en conclut que  $\partial J_2/\partial x_0$  étant égale sur le batteur à une fonction de carré intégrable,  $y$  est uniformément convergente dans tout intervalle ne contenant pas les singularités; c'est-à-dire, dans les intervalles ouverts  $(0, h/2)$  et  $(h/2, h)$ .

En outre, dans la masse, sur le fond, à l'infini, et sur la surface libre, on montrerait, comme pour l'approximation du 1<sup>er</sup> ordre, que les séries  $(\partial J_2/\partial x_0)$ ,  $(\partial J_2/\partial y_0)$  ainsi que leurs dérivées de tous ordres sont absolument et uniformément convergentes. On peut remarquer que la solution particulière :

$$X'_2 = \frac{\partial L_2}{\partial x_0} + \frac{\partial K_2}{\partial x_0} \quad Y'_2 = \frac{\partial L_2}{\partial y_0} + \frac{\partial K_2}{\partial y_0}$$

satisfait aux conditions de fond, à l'infini, et à la surface libre, mais qu'elle prend sur le batteur des valeurs très particulières. On aurait pu obtenir une infinité d'autres solutions particulières, satisfaisant aux mêmes conditions de fond, de surface, et à l'infini, mais prenant chacune sur le batteur des valeurs différentes et  $y$  possédant éventuellement des singularités arbitraires. Ces diverses solutions ne différeraient les unes des autres que par le gradient d'une fonction harmonique, vérifiant les trois premières conditions limites. Ainsi les singularités de :

$$(\partial L_2/\partial x_0) + (\partial K_2/\partial x_0)$$

ne correspondent pas nécessairement à la nature du problème et dépendent en partie du choix de la solution particulière. Ces singularités artificielles se retrouvent d'ailleurs avec le signe contraire dans la série  $\partial J_2/\partial x_0$ , puisque celle-ci est déterminée de telle manière que pour  $x_0=0$  :

$$\frac{\partial J_2}{\partial x_0} = X_2 - \frac{\partial L_2}{\partial x_0} - \frac{\partial K_2}{\partial x_0}$$

Elles se détruisent donc mutuellement dans le calcul de la solution complète  $X_2$  et  $Y_2$ . Par contre, les singularités de cette dernière sont parfaitement déterminées et irréductibles, puisqu'elles sont dans la nature des choses. Elles sont d'ailleurs plus faibles que les premières puisqu'elles sont en  $z_0(\log z_0)^2$  et  $(z_0 - ih) [\log(z_0 - ih)]^2$ .

Ainsi, on reconnaît que les déplacements  $X_2, Y_2$  sont partout finis et continus, milieu et extrémités du batteur compris, bien que les séries :

$$\frac{\partial L_2}{\partial x_0} + \frac{\partial K_2}{\partial x_0} \quad \text{et} \quad \frac{\partial J_2}{\partial x_0}$$

$y$  prennent des valeurs infinies (mais de signes contraires).

De plus, la partie principale de  $X_2, Y_2$  étant  $z_0(\log z_0)^2$ , les séries dérivées  $(\partial X_2/\partial y_0)$ ,  $(\partial Y_2/\partial y_0)$  ont des singularités logarithmiques et les séries qui les représentent sont uniformément convergentes.

Les séries représentant  $X_2$  et  $Y_2$ , obtenues par intégration des séries précédentes, sont donc absolument convergentes, bien que les séries  $(\partial L_2/\partial x_0) + (\partial K_2/\partial x_0)$  d'une part et  $\partial J_2/\partial x_0$  d'autre part soient simplement uniformément convergentes. Leur somme, après réarrangement des termes, possède un terme général d'ordre  $1/p^2$ . On pourrait profiter de ces remarques pour effectuer plus adroitement le calcul, en évitant de décomposer  $X_2$  et  $Y_2$  comme on l'a fait ci-dessus, en composantes prenant en certains points des valeurs infinies et de signe contraire. On choisirait pour cela, pour solution particulière :

$$X'_2 = \frac{\partial L_2}{\partial x_0} + \frac{\partial K_2}{\partial x_0} + \frac{\partial I_2}{\partial x_0} \quad Y'_2 = \frac{\partial L_2}{\partial y_0} + \frac{\partial K_2}{\partial y_0} + \frac{\partial I_2}{\partial y_0}$$

où  $I_2$  est une fonction harmonique satisfaisant aux trois premières conditions aux limites et possédant sur le batteur des singularités égales aux singularités de  $(\partial L_2/\partial x_0) + (\partial K_2/\partial x_0)$  et de signes contraires. On obtiendrait ainsi pour  $(\partial L_2/\partial x_0) + (\partial K_2/\partial x_0) + (\partial I_2/\partial x_0)$ , d'une part, et pour  $\partial J_2/\partial x_0$ , d'autre part, des séries absolument convergentes, plus agréables à manier dans les applications numériques.

Mais le gain ne serait appréciable que pour le calcul de l'oscillation locale du 2<sup>e</sup> ordre, à laquelle nous ne nous intéressons pas puisqu'elle devient négligeable à très faible distance du batteur. Comme nous nous contentons, en fait, du calcul de l'amplitude et de la phase du terme progressif, nous avons préféré utiliser la solution particulière uniformément convergente.

On peut conclure cette discussion en remarquant que la solution formelle, donnée au chapitre précédent fournit bien la représentation du mouvement du fluide dans le canal, au 2<sup>e</sup> ordre d'approximation, les déplacements calculés étant partout finis et continus, tandis que leurs dérivées présentent des infinis logarithmiques aux extrémités du batteur comme dans la solution au 1<sup>er</sup> ordre.

On procédera maintenant, dans les paragraphes suivants, à l'étude de la convergence des séries  $\xi(0, y_0, t)$  et à la détermination des singularités des fonctions  $X_2$  et  $Y_2$ .

#### ETUDE DE LA CONVERGENCE DE LA SÉRIE $\xi(0, y_0, t)$ :

Cette série se décompose en plusieurs séries que nous étudierons séparément.

$$a) \text{ Séries : } u_p = \frac{a_0}{4 e^2 \operatorname{sh} m_0 h} \sum_1 \frac{a_p}{\operatorname{sh} m_p h} \left\{ \begin{array}{l} [(m_0 - m_p) - \bar{u}_{0p}(m_0 + m_p)] \operatorname{ch}(m_0 + m_p) y_0 \\ - [(m_0 + m_p) - u_{0p}(m_0 - m_p)] \operatorname{ch}(m_0 - m_p) y_0 \end{array} \right\}$$

Il est facile de développer les deux expressions complexes conjuguées :

$$(m_0 + m_p) - u_{0p}(m_0 - m_p) = -2 \frac{k^4 + g^2 m_p^2}{g^2 (m_0 - m_p)} = 2 m_p \left[ 1 + \frac{m_0}{m_p} + \frac{m_0^2 + k^4}{m_p^2} + \dots \right]$$

$$(m_0 - m_p) - \bar{u}_{0p}(m_0 + m_p) = -2 \frac{k^4 + g^2 m_p^2}{g^2 (m_0 + m_p)} = -2 m_p \left[ 1 - \frac{m_0}{m_p} + \frac{m_0^2 + k^4}{m_p^2} + \dots \right]$$

On a donc :

$$u_p = \frac{a_0 \operatorname{ch} m_0 y_0}{e \operatorname{sh} m_0 h} \sum_1 \left[ - \frac{\lambda_p a_p}{e \sin \lambda_p h} \cos \lambda_p y_0 + O(1/p^2) \right]$$

qui peut s'écrire encore, compte tenu de l'expression développée de  $a_p/\sin \lambda_p h$  (voir théorie au 1<sup>er</sup> ordre) et de la valeur de  $\lambda_p = (p\pi/h) + O(1/p)$ .

$$u_p = \frac{a_0 \operatorname{ch} m_0 y_0}{e \operatorname{sh} m_0 h} \sum_1 \left[ \frac{2}{\pi h^2} \left\{ (-1)^p \left[ \frac{k^2}{g} f(h) - f'(h) \right] + f'(0) \right\} \frac{\cos p\alpha}{p} + O(1/p^2) \right]$$

où l'on a posé  $\alpha = \pi y_0/h$ .

La série  $u_p$  converge ou diverge en même temps que les séries dont le terme général est de la forme  $(-1)^p K_1(\cos p\alpha/p)$  ou  $K_2(\cos p\alpha/p)$ . En effet, elle n'en diffère que par une série absolument convergente.

En posant  $\beta = \pi - \alpha$ , la première série, dans laquelle les coefficients du cosinus ont des signes alternés, se ramène à une série à coefficients de même signe. Or, en vertu du théorème d'Abel, ces séries sont uniformément convergentes sur l'intervalle ouvert :

$$\begin{aligned} 0 < \alpha < 2\pi \text{ soit } 0 < y_0 < 2h \\ 0 < \beta < 2\pi \text{ soit } -h < y_0 < +h \end{aligned}$$

En résumé, si la fonction  $f(y_0)$  ne satisfait pas aux conditions limites de fond et de surface, la série  $u_p$  est uniformément convergente dans l'intervalle  $(0, h)$  extrémités exclues. Dans le cas contraire, la série  $u_p$  est absolument et uniformément convergente dans l'intervalle  $(0, h)$  extrémités comprises.

b) On développerait de la même façon les expressions :

$$m_0 - m_p - \lambda_{0p} (m_0 + m_p) = \frac{10 m_0 (k^4 - m_p^2 g^2) + 2 m_p (k^4 - m_0^2 g^2) + 2 m_0 g^2 (m_p^2 - m_0^2)}{4 k^4 - g^2 (m_0 - m_p)^2}$$

$$m_0 - m_p + \lambda_{0p} (m_0 + m_p) = - \frac{10 m_p (k^4 - m_0^2 g^2) + 2 m_0 (k^4 - m_p^2 g^2) + 2 m_p g^2 (m_0^2 - m_p^2)}{4 k^4 - g^2 (m_0 - m_p)^2}$$

et les quantités complexes conjuguées.

Les autres séries, représentant l'interaction de la houle fondamentale avec l'oscillation locale, peuvent donc se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} - \sum_1^\infty \frac{i a_0 a_p}{4 e^2 \operatorname{sh} m_0 h \operatorname{sh} m_p h} \left\{ \frac{[(m_0 - m_p) - \lambda_{0p} (m_0 + m_p)] \operatorname{ch} (m_0 + m_p) y_0}{[(m_0 + m_p) - \bar{\lambda}_{0p} (m_0 - m_p)] \operatorname{ch} (m_0 - m_p) y_0} \right\} \\ = \frac{4 a_0 m_0}{e \operatorname{th} m_0 h} \sum_1^\infty \left[ \frac{a_p}{e \sin \lambda_p h} \cos \lambda_p y_0 + O(1/p^2) \right] \end{aligned}$$

qui est absolument convergente, même si  $f(y_0)$  ne satisfait pas aux conditions aux limites, et :

$$\begin{aligned} \sum_1^\infty \frac{a_0 a_p}{4 e^2 \operatorname{sh} m_0 h \operatorname{sh} m_p h} \left\{ \frac{[(m_0 - m_p) + \lambda_{0p} (m_0 + m_p)] \operatorname{ch} (m_0 + m_p) y_0}{[(m_0 + m_p) + \bar{\lambda}_{0p} (m_0 - m_p)] \operatorname{ch} (m_0 - m_p) y_0} \right\} \\ = - \frac{a_0}{e^2 \operatorname{th} m_0 h} \sum_1^\infty \left[ \frac{\lambda_p a_p}{\sin \lambda_p h} \cos p x + O(1/p^2) \right] \end{aligned}$$

qui est uniformément convergente dans l'intervalle  $0, h$  si  $f(y_0)$  ne satisfait pas aux conditions aux limites, et absolument convergente dans l'intervalle fermé, dans le cas contraire.

c) Série  $\sum_1^\infty \sum_1^\infty \frac{i a_p a_q (m_p + m_q)}{2 e^2 \operatorname{sh} m_p h \operatorname{sh} m_q h} [\operatorname{ch} (m_p - m_q) y_0 + \mu'_{pq} \operatorname{ch} (m_p + m_q) y_0]$

En utilisant la relation  $m_p = -i \lambda_p$ , on peut écrire cette série sous forme réelle

$$\sum_1^\infty \sum_1^\infty U_{pq} = - \sum_1^\infty \sum_1^\infty \frac{a_p a_q (\lambda_p + \lambda_q)}{2 e^2 \sin \lambda_p h \sin \lambda_q h} [\cos (\lambda_p - \lambda_q) y_0 + \bar{\mu}'_{pq} \cos (\lambda_p + \lambda_q) y_0]$$

avec :

$$\bar{\mu}'_{pq} = \frac{\lambda_p^2 + \lambda_q^2 - (2 k^4 / g^2)}{(\lambda_p + \lambda_q)^2} = 1 - 2 \frac{\lambda_p \lambda_q + (k^4 / g^2)}{(\lambda_p + \lambda_q)^2}$$

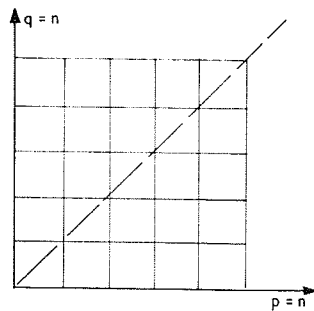


FIG. 13

On doit sommer dans tout le premier quadrant du plan  $p, q$ . On calculera la somme des termes contenus dans le carré de côté  $n$  :

$$\sum_1^n \sum_1^n U_{pq}$$

et l'on vérifiera que cette somme a une limite, lorsque :

$$n \rightarrow \infty$$

On a donc :

$$\sum_1^n \sum_1^n U_{pq} = - \sum_1^n \sum_1^n \frac{a_p a_q (\lambda_p + \lambda_q)}{e^2 \sin \lambda_p h \sin \lambda_q h} \cos \lambda_p y_0 \cos \lambda_q y_0 \\ + \sum_1^n \sum_1^n \frac{a_p a_q}{e^2 \sin \lambda_p h \sin \lambda_q h} \frac{\lambda_p \lambda_q + (k^4/g^2)}{(\lambda_p + \lambda_q)} \cos (\lambda_p + \lambda_q) y_0$$

La première somme se décompose en deux produits de séries simples dont l'une est absolument convergente et l'autre uniformément convergente, soit :

$$- \sum_1^n \frac{a_p \lambda_p}{e \sin \lambda_p h} \cos \lambda_p y_0 \sum_1^n \frac{a_q}{e \sin \lambda_q h} \cos \lambda_q y_0$$

et :

$$- \sum_1^n \frac{a_p}{e \sin \lambda_p h} \cos \lambda_p y_0 \sum_1^n \frac{a_q \lambda_q}{e \sin \lambda_q h} \cos \lambda_q y_0$$

La première somme de la série étudiée tend donc vers une limite quel que soit  $y_0$  dans l'intervalle ouvert  $0, h$ . Par contre, pour  $y_0 = 0$  et  $y_0 = h$ , elle devient infinie, à moins que  $f(y_0)$  ne satisfasse aux conditions aux limites.

La deuxième somme s'étudie en même temps que la série

$$\sum_1^n \sum_1^n \frac{a_p a_q}{e^2 \sin \lambda_p h \sin \lambda_q h} \frac{\lambda_p \lambda_q + (k^4/g^2)}{(\lambda_p + \lambda_q)} e^{i(\lambda_p + \lambda_q) y_0}$$

qui peut se développer sous la forme :

$$\frac{\pi}{h} \sum_1^n \left[ (-1)^p \frac{R\pi}{2g} + f'_0 \right] \frac{e^{ip\alpha}}{p^2} \sum_1^n \left[ (-1)^q \frac{R\pi}{2g} + f'_0 \right] \frac{e^{iq\alpha}}{q^2} \frac{pq + (k^4 h^2)/(g^2 \pi^2)}{(p+q)} \left[ 1 + O(1/p) + O(1/q) \right]$$

Il suffit d'étudier le terme principal. D'autre part, puisqu'il est symétrique par rapport aux indices  $p$  et  $q$ , on peut calculer cette expression en sommant dans la moitié du carré seulement, c'est-à-dire en prenant les termes situés sur la diagonale principale d'une part et le double des termes situés en dessous de la diagonale :

$$\sum_1^n \sum_1^n U_{pq} = \sum_1^n U_{pp} + 2 \sum_2^n \sum_1^{p-1} U_{pq}$$

Il vient finalement :

$$\sum_1^n U_{pp} = \frac{\pi}{2h} \sum_1^n \left[ (-1)^p \frac{R\pi}{2g} + f'_0 \right]^2 \frac{p^2 + (k^4 h^2)/(g^2 \pi^2)}{p^5} e^{2ip\alpha}$$

série absolument convergente,

et :

$$2 \sum_1^n \sum_1^{p-1} U_{pq} = \frac{2\pi}{h} \sum_1^n \left[ (-1)^p \frac{R\pi}{2g} + f'_0 \right] \frac{e^{ip\alpha}}{p} \sum_1^{p-1} \left[ (-1)^q \frac{R\pi}{2g} + f'_0 \right] \frac{e^{iq\alpha}}{q(p+q)} \\ + \frac{2k^4 h}{g^2 \pi} \sum_1^n \left[ (-1)^p \frac{R\pi}{2g} + f'_0 \right] \frac{e^{ip\alpha}}{p^2} \sum_1^{p-1} \left[ (-1)^q \frac{R\pi}{2g} + f'_0 \right] \frac{e^{iq\alpha}}{q^2(p+q)}$$

La somme :

$$\sum_1^{p-1} \left[ (-1)^q \frac{R\pi}{2g} + f'_0 \right] \frac{e^{iq\alpha}}{q(p+q)}$$

peut se décomposer en deux, car :

$$\frac{1}{q(p+q)} = \frac{1}{pq} - \frac{1}{p(p+q)}$$

La première série se décompose donc à son tour en :

$$\frac{2\pi}{h} \sum_1^n \left[ (-1)^p \frac{R\pi}{2g} + f'_0 \right] \frac{e^{ip\alpha}}{p^2} \sum_1^{n-1} \left[ (-1)^q \frac{R\pi}{2g} + f'_0 \right] \frac{e^{iq\alpha}}{q}$$

et :

$$\frac{2\pi}{h} \sum_1^n \left[ (-1)^p \frac{R\pi}{2g} + f'_0 \right] \frac{e^{ip\alpha}}{p^2} \sum_1^{n-1} \left[ (-1)^q \frac{R\pi}{2g} + f'_0 \right] \frac{e^{iq\alpha}}{p+q}$$

La somme :

$$S_p = \sum_1^{n-1} \left[ (-1)^q \frac{R\pi}{2g} + f'_0 \right] \frac{e^{iq\alpha}}{q}$$

est la somme des  $p-1$ , premiers termes d'une série uniformément convergente dans l'intervalle ouvert  $0, h$ . Elle est donc bornée. Soit  $S$  sa somme.

La série :

$$\frac{2\pi}{h} \sum_1^n \left[ (-1)^p \frac{R\pi}{2g} + f'_0 \right] \frac{e^{ip\alpha}}{p^2} S_p$$

est majorée par la série absolument convergente :

$$\frac{2\pi}{h} \sum_1^n \left[ \left| \frac{R\pi}{2g} \right| + f'_0 \right] \frac{S}{p^2}$$

En faisant le changement de variable  $p+q=r$  dans la somme :

$$\sum_{q=1}^{q=n-1} \left[ (-1)^q \frac{R\pi}{2g} + f'_0 \right] \frac{e^{iq\alpha}}{p+q} = e^{-ip\alpha} \sum_{r=p+1}^{r=2p-1} \left[ (-1)^{r-p} \frac{R\pi}{2g} + f'_0 \right] \frac{e^{ir\alpha}}{r}$$

On voit que cette somme tend vers zéro dans l'intervalle ouvert  $0, h$ .

La série :

$$\frac{2\pi}{h} \sum_1^n \left[ (-1)^p \frac{R\pi}{2g} + f'_0 \right] \frac{e^{ip\alpha}}{p^2} \sum_1^{n-1} \left[ (-1)^q \frac{R\pi}{2g} + f'_0 \right] \frac{e^{iq\alpha}}{p+q}$$

est donc elle aussi convergente dans l'intervalle ouvert  $0, h$ . Si la fonction  $f(y_0)$  satisfait aux conditions limites, elle sera même convergente dans l'intervalle, extrémités comprises.

Quant à la série :

$$\frac{2k^4h}{g^2\pi} \sum_1^n \left[ (-1)^p \frac{R\pi}{2g} + f'_0 \right] \frac{e^{ip\alpha}}{p^2} \sum_1^{n-1} \left[ (-1)^q \frac{R\pi}{2g} + f'_0 \right] \frac{e^{iq\alpha}}{q^2(p+q)}$$

on montrerait facilement qu'elle est absolument convergente.

$$d) \text{ Séries } \sum_1^\infty \sum_1^\infty V_{pq} = \sum_1^\infty \sum_1^\infty \frac{ia_p a_q (m_p + m_q)}{2e^2 \operatorname{sh} m_p h \operatorname{sh} m_q h} [\operatorname{ch} (m_p - m_q) y_0 - \lambda_{pq} \operatorname{ch} (m_p + m_q) y_0]$$

$$\lambda_{pq} = - \frac{(\lambda_p - \lambda_q)^2 + 6\lambda_p \lambda_q + (6k^4/g^2)}{(\lambda_p - \lambda_q)^2 + (4k^4/g^2)} = -1 + \frac{6\lambda_p \lambda_q + (2k^4/g^2)}{(\lambda_p - \lambda_q)^2 + (4k^4/g^2)}$$

On calculera comme précédemment la limite de  $\sum_1^n \sum_1^n V_{pq}$ .

Cette série se décompose en deux produits de séries simples déjà étudiées ci-dessus, et en une somme qui constitue la partie réelle de :

$$\sum_1^n \sum_1^n \frac{a_p a_q (\lambda_p + \lambda_q)}{2e^2 \sin \lambda_p \sin \lambda_q h} \frac{6\lambda_p \lambda_q + (2k^4/g^2)}{(\lambda_p - \lambda_q)^2 + (4k^4/g^2)} e^{i(\lambda_p + \lambda_q) y_0}$$

Comme précédemment, on sommera sur la diagonale principale et dans la moitié du carré situé en dessous de la diagonale. Enfin on n'étudiera que le terme principal.

TERMES SITUÉS SUR LA DIAGONALE :

$$\frac{3 g^2}{2 k^4} \sum_1^n \frac{\pi^3}{h^3} \left[ (-1)^p \frac{R\pi}{2g} + f'_0 \right]^2 \frac{e^{2ip\alpha}}{p} + \frac{1}{2} \sum_1^n \left[ (-1)^p \frac{R\pi}{2g} + f'_0 \right]^2 \frac{e^{2ip\alpha}}{p^3}$$

Le deuxième terme converge absolument. Le premier se décompose en :

$$\frac{3 g^2}{2 k^4} \frac{\pi^3}{h^3} \left[ \frac{R^2 \pi^2}{4 g^2} + f'^2_0 \right] \sum_1^n \frac{e^{2ip\alpha}}{p} + \frac{3 g \pi^4 R f'_0}{2 k^4 h^3} \sum_1^n \frac{e^{-2ip\beta}}{p}$$

où l'on a posé :

$$\alpha = \frac{\pi y_0}{h} \quad \beta = \pi - \frac{2 \pi y_0}{h}$$

Ces sommes ont des limites, sauf si  $2\alpha = 0$  ou  $2\alpha = 2\pi$  ( $y_0 = 0$  ou  $y = h$ ) et si  $\beta = 0$  ( $y_0 = h/2$ ). Ainsi le milieu du batteur est également un point singulier au 2<sup>e</sup> ordre d'approximation.

TERMES SITUÉS EN DESSOUS DE LA DIAGONALE :

Le terme principal s'écrit :

$$\frac{\pi}{h} \sum_{p=2}^n \left[ (-1)^p \frac{R\pi}{2g} + f'_0 \right] \frac{e^{ip\alpha}}{p^2} \sum_{q=1}^{p-1} \left[ (-1)^q \frac{R\pi}{2g} + f'_0 \right] e^{iq\alpha} \frac{(p+q)}{q^2} \frac{6pq + 2(k^4 h^2)/(g^2 \pi^2)}{(p-q)^2 + (4k^4 h^2)/(g^2 \pi^2)}$$

La fraction :

$$\frac{p+q}{q^2} \frac{6pq + 2(k^4 h^2)/(g^2 \pi^2)}{(p-q)^2 + (4k^4 h^2)/(g^2 \pi^2)}$$

peut se décomposer en éléments simples :

$$= \frac{2 A^2 p}{p^2 + 4 A^2} \frac{1}{q^2} + \left[ \frac{6 p^2 + 2 A^2}{p^2 + 4 A^2} + \frac{4 A^2 p^2}{(p^2 + 4 A^2)^2} \right] \frac{1}{q} - \left[ \frac{6 p^2 + 2 A^2}{p^2 + 4 A^2} + \frac{4 A^2 p^2}{(p^2 + 4 A^2)^2} \right] \frac{q}{(p-q)^2 + 4 A^2} \\ + \left[ p \frac{18 p^2 + 26 A^2}{p^2 + 4 A^2} + \frac{8 A^2 p^3}{(p^2 + 4 A^2)^2} \right] \frac{1}{(p-q)^2 + 4 A^2}$$

où l'on a posé :  $A^2 = \frac{k^4 h^2}{g^2 \pi^2}$

On en conclut que la somme des termes principaux se décompose en sommes de la forme :

$$\sum_2^n \left[ (-1)^p \frac{R\pi}{2g} + f'_0 \right] \frac{e^{ip\alpha}}{p^3} \sum_1^{p-1} \left[ (-1)^q \frac{R\pi}{2g} + f'_0 \right] \frac{e^{iq\alpha}}{q^2} \quad [1]$$

$$\sum_2^n \left[ (-1)^p \frac{R\pi}{2g} + f'_0 \right] \frac{e^{ip\alpha}}{p^2} \sum_1^{p-1} \left[ (-1)^q \frac{R\pi}{2g} + f'_0 \right] \frac{e^{iq\alpha}}{q} \quad [2]$$

$$\sum_2^n \left[ (-1)^p \frac{R\pi}{2g} + f'_0 \right] \frac{e^{ip\alpha}}{p^2} \sum_1^{p-1} \left[ (-1)^q \frac{R\pi}{2g} + f'_0 \right] \frac{q e^{iq\alpha}}{(p-q)^2 + 4 A^2}$$

$$\sum_2^n \left[ (-1)^p \frac{R\pi}{2g} + f'_0 \right] \frac{e^{ip\alpha}}{p} \sum_1^{p-1} \left[ (-1)^q \frac{R\pi}{2g} + f'_0 \right] \frac{e^{iq\alpha}}{(p-q)^2 + 4 A^2}$$

Dans la troisième et la quatrième sommes, on pose  $r = p - q$ .

Elles se ramènent alors aux deux formes suivantes :

$$\sum_2^n \left[ (-1)^p \frac{R\pi}{2g} + f'_0 \right] \frac{e^{2ip\alpha}}{p} \sum_1^{p-1} \left[ (-1)^{(p-r)} \frac{R\pi}{2g} + f'_0 \right] \frac{e^{-ir\alpha}}{r^2 + 4A^2}$$

$$- \sum_2^n \left[ (-1)^p \frac{R\pi}{2g} + f'_0 \right] \frac{e^{2ip\alpha}}{p^2} \sum_1^{p-1} \left[ (-1)^{(p-r)} \frac{R\pi}{2g} + f'_0 \right] \frac{re^{-ir\alpha}}{r^2 + 4A^2}$$

qui sont équivalentes à :

$$\sum_2^n \left[ (-1)^p \frac{R\pi}{2g} + f'_0 \right] \frac{e^{2ip\alpha}}{p} \sum_1^{p-1} \left[ (-1)^{(p-r)} \frac{R\pi}{2g} + f'_0 \right] \frac{e^{-ir\alpha}}{r^2} \tag{3}$$

et :

$$\sum_2^n \left[ (-1)^p \frac{R\pi}{2g} + f'_0 \right] \frac{e^{2ip\alpha}}{p^2} \sum_1^{p-1} \left[ (-1)^{(p-r)} \frac{R\pi}{2g} + f'_0 \right] \frac{e^{-ir\alpha}}{r} \tag{4}$$

Les sommes [1] [2] et [4] sont de la forme :

$$\sum_{p=2}^{\infty} \frac{S_p e^{ip\alpha}}{p^2} \quad \text{ou} \quad \sum_{p=2}^{\infty} \frac{S_p e^{ip\alpha}}{p^3}$$

$S_p$  étant les  $p - 1$  premiers termes d'une série absolument convergente [somme (1)] ou d'une série uniformément convergente [sommes (2) et (4)].  $S_p$  est donc bornée si  $y_0 \neq 0$  ou  $y_0 \neq h$ . Les sommes (1), (2) et (4) peuvent donc être majorées par des séries absolument convergentes.

Quant à la somme (3), elle s'écrit sous la forme :

$$\sum_2^n \left[ \frac{R\pi}{2g} + (-1)^p f'_0 \right] \frac{e^{2ip\alpha}}{p} \sum_1^{p-1} \frac{R\pi}{2g} \frac{e^{-ir\alpha}}{r^2} + \sum_2^n \left[ (-1)^p \frac{R\pi}{2g} + f'_0 \right] \frac{e^{2ip\alpha}}{p} \sum_1^{p-1} f'_0 \frac{e^{-ir\alpha}}{r^2}$$

Les sommes :

$$S_p = \sum_1^{p-1} \frac{R\pi}{2g} \frac{e^{-ir\alpha}}{r^2} \quad \text{ou} \quad S_p = \sum_1^{p-1} f'_0 \frac{e^{-ir\alpha}}{r^2}$$

sont absolument convergentes. On peut donc écrire :

$$S_p = S - \sum_p^{\infty} \frac{R\pi}{2g} \frac{e^{-ir\alpha}}{r^2}$$

On peut évaluer l'ordre de grandeur du reste :

$$\left| \frac{R\pi}{2g} \sum_p^{\infty} \frac{e^{-ir\alpha}}{r^2} \right| < \left| \frac{R\pi}{2g} \right| \int_{p-1}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \left| \frac{R\pi}{2g} \right| O\left(\frac{1}{p}\right)$$

d'où :

$$S - \left| \frac{R\pi}{2g} \right| O\left(\frac{1}{p}\right) \leq S_p \leq S + \left| \frac{R\pi}{2g} \right| O\left(\frac{1}{p}\right) \quad S_p = S + o\left(\frac{1}{p}\right)$$

Les sommes (3) sont donc finalement égales à :

$$S \sum_2^n \left( \frac{R\pi}{2g} + (-1)^p f'_0 \right) \frac{e^{ip\alpha}}{p}$$

qui est uniformément convergente dans l'intervalle ouvert  $0, h$ , et :

$$\left| \frac{R\pi}{2g} \right| \sum_2^n \left[ \frac{R\pi}{2g} + (-1)^p f'_0 \right] \frac{e^{ip\alpha}}{p^2}$$

qui est absolument convergente.

En résumé, toutes les séries rencontrées convergent sur le batteur, sauf l'une d'elles qui diverge au point  $h/2$  si  $R \neq 0$  et  $f'_0 \neq 0$ .

Si la fonction  $f(y_0)$  satisfait aux conditions aux limites de fond et de surface, les séries sont absolument et uniformément convergentes dans tout l'intervalle fermé  $0, h$ .

Mais dans le cas général où  $R \neq 0$  et  $f'_0 \neq 0$ , la convergence d'une partie des séries est simplement uniforme dans les intervalles ouverts  $(0, h/2)$  et  $(h/2, h)$ .

Ces résultats nous permettent de déterminer la nature des singularités de  $\xi(0, y_0, t)$  comme l'avait fait M. Biesel pour l'approximation au 1<sup>er</sup> ordre.

En effet, en utilisant les développements en série :

$$1/(1-u) = 1 + u + u^2 + \dots + u^p + \dots$$

$$-L(1-u) = u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \dots + \frac{u^p}{p} + \dots$$

$$-\int_0^u L(1-u) du = (1-u)L(1-u) = -u + \frac{u^2}{1 \times 2} + \frac{u^3}{2 \times 3} + \dots + \frac{u^p}{p(p-1)} + \dots$$

dans lesquels on remplace  $u$  par  $e^{-\pi z_0/h}$ , on obtient, après avoir séparé parties réelles et imaginaires :

$$-L(1 - e^{-\pi z_0/h}) = \sum \frac{e^{-p\pi z_0/h}}{p} = \sum e^{-p\pi x_0/h} \frac{\cos p\pi y_0/h}{p} - i \sum e^{-p\pi x_0/h} \frac{\sin p\pi y_0/h}{p}$$

$$(1 - e^{-\pi z_0/h}) L(1 - e^{-\pi z_0/h}) = -e^{-\pi z_0/h} + \sum e^{-p\pi z_0/h} \frac{\cos p\pi y_0/h}{p(p-1)} - i \sum e^{-p\pi x_0/h} \frac{\sin p\pi y_0/h}{p(p-1)}$$

En remplaçant les infiniment petits par des quantités équivalentes, il vient :

$$-L \frac{\pi z_0}{h} \sim \sum e^{-p\pi x_0/h} \frac{\cos p\pi y_0/h}{p} - i \sum e^{-p\pi x_0/h} \frac{\sin p\pi y_0/h}{p}$$

$$1 + \frac{\pi z_0}{h} L \frac{\pi z_0}{h} \sim \sum e^{-p\pi x_0/h} \frac{\cos p\pi y_0/h}{p^2} - i \sum e^{-p\pi x_0/h} \frac{\sin p\pi y_0/h}{p^2}$$

On en conclut que la fonction  $\xi(x_0, y_0, t) - i\eta(x_0, y_0, t)$ , dont la partie réelle se réduit sur le batteur à une combinaison de séries de la forme :

$$\sum \frac{\cos p\pi y_0/h}{p} \quad \text{ou} \quad \sum \frac{\cos p\pi y_0/h}{p^2}$$

ou de produits :

$$\left\{ \left( \sum \frac{\cos p\pi y_0/h}{p} \right) \left( \sum \frac{\cos p\pi y_0/h}{p^2} \right) \right\}$$

possède des singularités de la forme  $\log z_0, z_0 (\log z_0), z_0 (\log z_0)^2$  et des termes d'ordre supérieur.

Ces singularités sont faibles, et  $\xi(0, y_0, t)$  est de carré intégrable sur l'intervalle  $0, h$ .

#### ETUDE *a priori* DES SINGULARITÉS DES FONCTIONS $X_2$ ET $Y_2$ .

Les fonctions  $X_2$  et  $Y_2$  sont solutions d'un système d'équations dont les coefficients comportent des singularités, puisque les seconds membres s'expriment au moyen des fonctions  $X_1$  et  $Y_1$ .

La solution particulière du système complet possèdera donc des singularités (engendrées par celles de  $X_1$  et  $Y_1$ ). Nous allons tout d'abord rechercher celles-ci.

La solution générale des équations sans second membre vérifie d'autre part des équations dont les coefficients sont réguliers dans tout le domaine. Mais elle est assujettie à des conditions frontières qui peuvent, comme pour le premier ordre, introduire des singularités que nous devons également rechercher. On connaîtra alors toutes les singularités de la solution.

ÉTUDE DE LA SOLUTION PARTICULIÈRE.

Dans le premier chapitre, on a étudié les singularités des fonctions  $X_1(x_0, y_0)$  et  $Y_1(x_0, y_0)$ . Celles-ci sont liées à la solution du 1<sup>er</sup> ordre par les équations :

$$X_1(x_0, y_0, t) = \frac{a_0}{e} \frac{\text{ch } m_0 y_0}{\text{sh } m_0 h} \sin m_0 x_0 \cos kt + X_1(x_0, y_0) \sin kt$$

$$Y_1(x_0, y_0, t) = \frac{a_0}{e} \frac{\text{sh } m_0 y_0}{\text{sh } m_0 h} \cos m_0 x_0 \cos kt + Y_1(x_0, y_0) \sin kt$$

Les équations du mouvement peuvent donc s'écrire :

$$\frac{\partial X_2}{\partial x_0} + \frac{\partial Y_2}{\partial y_0} = \frac{D[X_1(x_0, y_0, t), Y_1(x_0, y_0, t)]}{D(x_0, y_0)}$$

$$= \frac{D[X_1(x_0, y_0), Y_1(x_0, y_0)]}{D(x_0, y_0)} \sin^2 kt - \frac{a_0 m_0}{2e} \frac{\text{ch } m_0 y_0}{\text{sh } m_0 h} \cos m_0 x_0 \sin 2kt \left( \frac{\partial X_1}{\partial x_0} - \frac{\partial Y_1}{\partial y_0} \right)$$

$$- \frac{a_0 m_0}{2e} \frac{\text{sh } m_0 y_0}{\text{sh } m_0 h} \sin m_0 x_0 \sin 2kt \left( \frac{\partial X_1}{\partial y_0} + \frac{\partial Y_1}{\partial x_0} \right) + \frac{a_0^2 m_0^2}{2e^2 \text{sh}^2 m_0 h} (\cos 2m_0 x_0 + \text{ch } 2m_0 y_0) \cos^2 kt$$

On peut remplacer d'ailleurs  $X_1$  et  $Y_1$  par les développements limités valables au pied du batteur :

$$X_1 = -\frac{R}{g} (x_0 \log \varphi - \theta y_0) + f_0 + Bx_0 - Cy_0 + P_2 + P_3 + \dots$$

$$Y_1 = \frac{R}{g} (y_0 \log \varphi + \theta x_0) + A - Cx_0 - By_0 - Q_2 - Q_3 \dots$$

On obtient ainsi :

$$\frac{\partial X_2}{\partial x_0} + \frac{\partial Y_2}{\partial y_0} = \sin^2 kt \left\{ \begin{aligned} & \frac{R^2}{g^2} [(\log \varphi)^2 + \theta^2] + \frac{2R}{g} \left( \frac{R}{g} - B \right) \log \varphi - \frac{2RC\theta}{g} \\ & - \frac{R}{g} \log \varphi \left[ \frac{\partial P_2}{\partial x_0} + \frac{\partial Q_2}{\partial y_0} + \frac{\partial P_3}{\partial x_0} + \frac{\partial Q_3}{\partial y_0} + \dots \right] \\ & + \frac{R\theta}{g} \left[ \frac{\partial P_2}{\partial y_0} - \frac{\partial Q_2}{\partial x_0} + \frac{\partial P_3}{\partial y_0} - \frac{\partial Q_3}{\partial x_0} + \dots \right] \\ & + \frac{\partial P_2}{\partial x_0} \frac{\partial Q_2}{\partial y_0} - \frac{\partial P_2}{\partial y_0} \frac{\partial Q_2}{\partial x_0} + \frac{\partial P_3}{\partial x_0} \frac{\partial Q_3}{\partial y_0} - \frac{\partial P_3}{\partial y_0} \frac{\partial Q_3}{\partial x_0} + \dots \end{aligned} \right.$$

$$- \frac{m_0 a_0}{2e \text{sh } m_0 h} \sin 2kt \left[ -\frac{2R}{g} \log \varphi \text{ch } m_0 y_0 \cos m_0 x_0 + \frac{2R\theta}{g} \text{sh } m_0 y_0 \sin m_0 x_0 \right]$$

$$+ \frac{a_0^2 m_0^2}{2e^2 \text{sh}^2 m_0 h} (\cos 2m_0 x_0 + \text{ch } 2m_0 y_0) \cos^2 kt$$

$$\frac{\partial X_2}{\partial y_0} - \frac{\partial Y_2}{\partial x_0} = 0$$

Pour établir ces équations, on a tenu compte du fait que  $P_2$  et  $Q_2$ ,  $P_3$  et  $Q_3$ , etc., sont harmoniques conjugués. On a donc

$$\frac{\partial P_2}{\partial x_0} - \frac{\partial Q_2}{\partial y_0} = 0 \qquad \frac{\partial P_2}{\partial y_0} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_0} = 0$$

On a d'ailleurs :

$$P_2 = a_2 (x_0^2 - y_0^2) \qquad P_3 = a_3 (x_0^3 - 3x_0 y_0^2)$$

$$Q_2 = 2 a_2 x_0 y_0 \qquad Q_3 = a_3 (3x_0^2 y_0 - y_0^3)$$

$$\text{ch } m_0 y_0 \cos m_0 x_0 = 1 - (m_0^2/2) (x_0^2 - y_0^2)$$

$$\text{sh } m_0 y_0 \sin m_0 x_0 = m_0^2 x_0 y_0$$

d'où le système d'équations :

$$\frac{\partial X_2}{\partial y_0} - \frac{\partial Y_2}{\partial x_0} = 0$$

$$\frac{\partial X_2}{\partial x_0} + \frac{\partial Y_2}{\partial y_0} = \sin^2 kt \left\{ \begin{aligned} & \frac{R^2}{g^2} [(\log \varphi)^2 + \theta^2] + \frac{2R}{g} \left( \frac{R}{g} - B \right) \log \varphi - \frac{2RC\theta}{g} \\ & - \frac{4Ra_2}{g} (x_0 \log \varphi + \theta y_0) - \frac{6Ra_3}{g} [(x_0^2 - y_0^2) \log \varphi + 2\theta x_0 y_0] + \dots \\ & + 4a_2^2 \varphi^2 + 9a_3^2 \varphi^4 + \dots \end{aligned} \right.$$

$$- \frac{m_0 a_0}{2e \operatorname{sh} m_0 h} \sin 2kt \left\{ - \frac{2R}{g} \log \varphi + \frac{Rm_0^2 a_3}{g} [(x_0^2 - y_0^2) \log \varphi + 2\theta x_0 y_0] + \dots \right\}$$

$$+ \frac{a_0^2 m_0}{2e^2 \operatorname{sh}^2 m_0 h} (\cos 2m_0 x_0 + \operatorname{ch} 2m_0 y_0) \cos^2 kt$$

Il est facile de trouver une solution particulière de ce système sous la forme de sommes de solutions particulières. On obtient ainsi :

$$X'_2 = \sin^2 kt \left\{ \begin{aligned} & \frac{R^2}{2g^2} [x_0 (\log \varphi)^2 - x_0 \log \varphi + x_0 \theta^2 - y_0 \theta] + \frac{R}{2g} \left( \frac{R}{g} - B \right) (2x_0 \log \varphi - x_0) \\ & - \frac{RC}{2g} (2\theta x_0 - y_0) - \frac{Ra_2}{g} (2x_0^2 \log \varphi - \varphi^2) \\ & - \frac{Ra_3}{2g} (4x_0^3 \log \varphi + 2y_0^3 \theta + 6x_0^2 y_0 \theta - 3x_0 y_0^2 - 3x_0^3) + O(\varphi^4 \log \varphi) + O(\varphi^4 \theta) \\ & + \frac{4a_2^2 x_0^3}{3} + \frac{9a_3^2 x_0^5}{5} \end{aligned} \right.$$

$$+ \frac{R a_0 m_0 \sin 2kt}{4ge \operatorname{sh} m_0 h} \left\{ \begin{aligned} & a_2 (2x_0 \log \varphi - x_0) \\ & - \frac{m_0^2 a_3}{6} (4x_0^3 \log \varphi + 2y_0^3 \theta + 6x_0^2 y_0 \theta - 3x_0 y_0^2 - 3x_0^3) + O(\varphi^4 \log \varphi) + O(\varphi^4 \theta) \end{aligned} \right.$$

$$+ \frac{a_0^2 \cos^2 kt}{4e^2 \operatorname{sh}^2 m_0 h} \sin 2m_0 x_0$$

$$Y'_2 = \sin^2 kt \left\{ \begin{aligned} & \frac{R^2}{2g^2} [y_0 (\log \varphi)^2 - y_0 \log \varphi + y_0 \theta^2 + x_0 \theta] + \frac{R}{2g} \left( \frac{R}{g} - B \right) (2y_0 \log \varphi - y_0) \\ & - \frac{RC}{2g} (2\theta y_0 + x_0) - \frac{2Ra_2}{g} y_0^2 \theta \\ & - \frac{Ra_3}{2g} (-4y_0^3 \log \varphi + 2x_0^3 \theta + 6x_0^2 y_0 \theta + 3x_0^2 y_0 + 3y_0^3 + \theta (\varphi^4 \log \varphi) + \theta (\varphi^4 \theta)) \\ & + \frac{4a_2^2 y_0^3}{3} + \frac{9a_3^2 y_0^5}{5} + \dots \end{aligned} \right.$$

$$+ \frac{Ra_0 m_0 \sin 2kt}{4ge \operatorname{sh} m_0 h} \left\{ \begin{aligned} & a_2 (2y_0 \log \varphi - y_0) \\ & - \frac{m_0^2 a_3}{6} (-4y_0^3 \log \varphi + 2x_0^3 \theta + 6x_0^2 y_0 \theta + 3x_0^2 y_0 + 3y_0^2) + O(\varphi^4 \log \varphi) + O(\varphi^4 \theta) \end{aligned} \right.$$

$$+ \frac{a_0^2 \cos^2 kt}{4e^2 \operatorname{sh}^2 m_0 h} \operatorname{sh} 2m_0 y_0$$

#### ÉTUDE DE LA SOLUTION GÉNÉRALE DE L'ÉQUATION SANS SECOND MEMBRE.

Soit  $X''_2$ ,  $Y''_2$  la solution générale de l'équation sans 2<sup>e</sup> membre. Comme dans la théorie au 1<sup>er</sup> ordre  $X''_2$  et  $-Y''_2$  sont harmoniques conjuguées et la fonction  $F(z_0) = X''_2 - iY''_2$  est analytique dans le domaine étudié.

La solution du problème du batteur est :

$$X_2 = X'_2 + X''_2 \quad Y_2 = Y'_2 + Y''_2$$

$X_2$  et  $Y_2$  étant assujetties à des conditions limites au fond, en surface, à l'infini et sur le batteur.

Les trois premières s'expriment par des équations dont les coefficients sont réguliers sur chacune de ces limites.  $X''_2$  et  $Y''_2$  ne peuvent donc y avoir de singularités. De même, si  $f(y_0)$  est régulière dans l'intervalle ouvert,  $0 < y_0 < h$ ,  $X''_2$  et  $Y''_2$  sont régulières sur cet intervalle.

Mais aux points d'angle (extrémités du batteur) les fonctions doivent satisfaire simultanément à deux conditions limites différentes (en général). Elles doivent donc prendre des valeurs différentes selon le chemin parcouru lorsqu'on approche de ces points (paroi du batteur d'une part, fonds ou surface libre d'autre part). Ainsi les extrémités du batteur sont des points critiques.

#### A) Étude du point situé au pied du batteur

Comme dans la théorie au 1<sup>er</sup> ordre, on transforme le point d'angle en un point ordinaire du contour, en prolongeant analytiquement les fonctions  $X''_2$  et  $Y''_2$  dans la bande

$$-h \leq y_0 \leq 0 \quad x_0 \geq 0.$$

On considère pour cela le mouvement image (\*) du mouvement réel, à travers le fond du canal et l'on supprime la paroi constituant le fond.

La fonction harmonique  $X''_2$  est définie dans tout le domaine  $-h \leq y_0 \leq +h \quad x_0 \geq 0$ . Elle est déterminée par les conditions de surface ( $\partial^2 X_2 / \partial t^2 + g (\partial X_2 / \partial y_0) = 0 \quad y_0 = \pm h$ ), la condition à l'infini et la condition sur le batteur.

$$X''_2(0, y_0, t) = Y_1(0, y_0, t) \frac{df(y_0)}{dy_0} \sin kt - X'_2(0, y_0, t)$$

soit :

$$X''_2(0, y_0, t) = \frac{a_0 \operatorname{sh} m_0 y_0}{2e \operatorname{sh} m_0 h} \frac{df(y_0)}{dy_0} \sin 2kt + Y_1(0, y_0) \frac{df(y_0)}{dy_0} \sin^2 kt - X'_2(0, y_0, t)$$

La fonction harmonique conjuguée  $Y''_2$  se déduit de la fonction  $X''_2$  à une constante additive près. Lorsqu'on parcourt l'axe  $0, y_0$  en traversant l'origine,  $X''_2$  est continu et s'annule pour  $y_0 = 0$ . Par contre,  $\partial X''_2 / \partial y_0$  présente des discontinuités.

On les calculera en remplaçant  $Y_1$  par le développement *limité valable au pied du batteur* [A = C = 0 (R/g) = 2(f'\_0/\pi)] B = (2f'\_0/\pi) + a\_0 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial X''_2}{\partial y_0} \Big|_{x_0=0} &= \frac{a_0}{2e \operatorname{sh} m_0 h} \sin 2kt \left[ m_0 \operatorname{ch} m_0 y_0 \frac{df(y_0)}{dy_0} + \operatorname{sh} m_0 y_0 \frac{d^2 f(y_0)}{dy_0^2} \right] \\ &+ \left[ \frac{2f'_0}{\pi} \log |y_0| - a_0 + 3a_3 y_0^2 \dots \right] \frac{df(y_0)}{dy_0} \sin^2 kt \\ &+ \left[ \frac{2f'_0}{\pi} y_0 \log |y_0| - \left( \frac{2f'_0}{\pi} + a_0 \right) y_0 + a^3 y_0^3 + a_0 \right] \frac{d^2 f(y_0)}{dy_0^2} \sin^2 kt \\ &- \left[ -\frac{2f_0'^2}{\pi^2} + \frac{4f'_0}{\pi} a_2 y_0 - \frac{6f'_0}{\pi} a_3 y_0^2 \right] \sin^2 kt + \frac{f'_0 a_0 a_3 m_0^3}{2\pi e \operatorname{sh} m_0 h} y_0^2 \sin 2kt \end{aligned}$$

On a des discontinuités de première et deuxième espèces à l'origine :

$$\left( \frac{\partial X''_2}{\partial y_0} \right)_{y_0=+0} - \left( \frac{\partial X''_2}{\partial y_0} \right)_{y_0=-0} = \left( \frac{4f_0'^2}{\pi} \log |y_0| - 2a_0 f'_0 + \frac{2f_0'^2}{\pi} \right) \sin^2 kt + \frac{a_0 m_0 f'_0}{e \operatorname{sh} m_0 h} \sin 2kt$$

(\*) Le prolongement analytique est possible puisque  $Y''_2 = 0$  sur le fond.

Dans le voisinage de l'origine,  $\partial X''_2/\partial y_0$  se comporte donc comme la partie réelle de la fonction :

$$g(z_0) = -\frac{2if'_0}{\pi} \left( \frac{f'_0}{\pi} - a_0 \right) \log z_0 \sin^2 kt - \frac{2if_0'^2}{\pi^2} (\log z_0)^2 \sin^2 kt - \frac{ia_0 m_0 f'_0}{e \pi \operatorname{sh} m_0 h} \log z_0 \sin 2kt$$

En retranchant la singularité, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{R} \left\{ i \frac{dF(z_0)}{dz_0} + i \left[ \frac{2f'_0}{\pi} \left( \frac{f'_0}{\pi} - a_0 \right) \log z_0 + \frac{2f_0'^2}{\pi^2} (\log z_0)^2 \right] \sin^2 kt + \frac{ia_0 m_0 f'_0}{\pi e \operatorname{sh} m_0 h} \log z_0 \sin^2 kt \right\} \\ = \frac{a_0 m_0 \sin 2kt}{2e \operatorname{sh} m_0 h} \left[ y_0 \frac{d^2 f(y_0)}{dy_0^2} + \frac{m_0^2 y_0^2}{2} \frac{df(y_0)}{dy_0} + \frac{f'_0 a_3 m_0^2}{\pi} y_0^2 \theta + f''_0 O(y_0^3) \right] \\ + \sin^2 kt \left[ \frac{2f'_0}{\pi} y_0 \log |y_0| \frac{d^2 f(y_0)}{dy_0^2} - \left( \frac{2f'_0}{\pi} + a_0 \right) y_0 \frac{d^2 f(y_0)}{dy_0^2} - \frac{4f'_0 a_2}{\pi} y_0 + \right. \\ \left. + 3a_3 \frac{df(y_0)}{dy_0} y_0^2 + \frac{6a_3 f'_0 \theta y_0^2}{\pi} + f'_0 O(y_0^3) \right] \end{aligned}$$

Cette expression se comporte à son tour comme la partie réelle de la fonction :

$$\begin{aligned} \frac{a_0 m_0 \sin 2kt}{2e \operatorname{sh} m_0 h} \left[ \frac{im_0^2 f'_0}{\pi} z_0^2 \log z_0 + \frac{if'_0 a_3 m_0^2}{\pi} z_0^2 \log z_0 - iE - 6z_0^2 - iz_0 f''_0 + f''_0 O(z_0^3 \log z_0) \right] \\ + \sin^2 kt \left[ -\frac{2if'_0 f''_0}{\pi} z_0 \log z_0 + i \left( \frac{2f'_0}{\pi} + a_0 \right) f''_0 z_0 + \frac{4if'_0 a_2 z_0}{\pi} + iF_0 + Hz_0^2 \right. \\ \left. + \frac{12ia_3 f'_0 z_0^2}{\pi} \log z_0 + f'_0 O(z_0^3 \log z_0) \right] \end{aligned}$$

On a donc le développement limité :

$$\begin{aligned} \frac{dF(z_0)}{dz_0} = \sin^2 kt \left\{ -\frac{2f'_0}{\pi} \left( \frac{f'_0}{\pi} - a_0 \right) \log z_0 - \frac{2f_0'^2}{\pi^2} (\log z_0)^2 - \frac{2f'_0 f''_0}{\pi} z_0 \log z_0 + \left( \frac{2f'_0}{\pi} + a_0 \right) f''_0 z_0 \right. \\ \left. + \frac{4f'_0 a_2 z_0}{\pi} + \frac{12a_3 f'_0}{\pi} z_0^2 \log z_0 + F_0 - iHz_0^2 + f'_0 O(z_0^3 \log z_0) \right\} \\ - \frac{a_0 m_0}{2e \operatorname{sh} m_0 h} \sin 2kt \left( \frac{2f'_0}{\pi} \log z_0 - \left( \frac{m_0^2 f'_0}{\pi} + \frac{m_0^2 f'_0 a_3}{\pi} \right) z_0^2 \log z_0 + z_0 f''_0 + E_0 - iGz_0^2 + O(z_0^3 \log z_0) \right) \end{aligned}$$

En intégrant, il vient :

$$\begin{aligned} F(z_0) = \sin^2 kt \left\{ -\frac{2f'_0}{\pi} \left( \frac{f'_0}{\pi} - a_0 \right) (z_0 \log z_0 - z_0) - \frac{2f_0'^2}{\pi^2} z_0 (\log z_0)^2 + \frac{4f_0'^2}{\pi^2} (z_0 \log z_0 - z_0) \right. \\ \left. - \frac{2f'_0 f''_0}{\pi} \left( \frac{z_0^2}{2} \log z_0 - \frac{z_0^2}{4} \right) + \left[ \left( \frac{2f'_0}{\pi} + a_0 \right) f''_0 + \frac{4a_2 f'_0}{\pi} \right] \frac{z_0^2}{2} \right. \\ \left. + f'_0 O(z_0^4 \log z_0) + F_0 z_0 - \frac{iHz_0^3}{3} + I + \frac{12a_3 f'_0}{\pi} \left( \frac{z_0^3}{3} \log z_0 - \frac{z_0^3}{9} \right) \right\} \\ - \frac{a_0 m_0 \sin 2kt}{2e \operatorname{sh} m_0 h} \left( \frac{2f'_0}{\pi} (z_0 \log z_0 - z_0) - \frac{m_0^2 f'_0}{\pi} (1 + a_3) \left( \frac{z_0^3 \log z_0}{3} - \frac{z_0^3}{9} \right) + \frac{z_0^2 f''_0}{2} \right. \\ \left. + E_0 z_0 - \frac{iGz_0^3}{3} + J + O(z_0^4 \log z_0) \right) + K \end{aligned}$$

Pour le batteur plan qui nous intéresse plus spécialement  $f''_0=0$ . On a donc, en séparant les parties réelles et imaginaires :

$$\begin{aligned}
 X_2 = \sin^2 kt & \left\{ \begin{aligned} & \frac{2f'_0}{\pi} \left( \frac{f'_0}{\pi} + a_0 \right) (x_0 \log \varphi - \theta y_0 - x_0) - \frac{2f_0'^2}{\pi^2} [x_0 (\log \varphi)^2 - x_0 \theta^2 - 2 \theta y_0 \log \varphi] \\ & + \frac{2f'_0 a_2}{\pi} (x_0^2 - y_0^2) + I_1 + F_0 x_0 + O(\varphi^3 \log \varphi) \end{aligned} \right. \\
 - \frac{a_0 m_0 \sin 2 kt}{2 e \operatorname{sh} m_0 h} & \left[ \frac{2f'_0}{\pi} (x_0 \log \varphi - \theta y_0 - x_0) + E_0 x_0 + J_1 + O(\varphi^3 \log \varphi) \right] + K_1 \\
 Y_2 = -\sin^2 kt & \left\{ \begin{aligned} & \frac{2f'_0}{\pi} \left( \frac{f'_0}{\pi} + a_0 \right) (y_0 \log \varphi + \theta x_0 - y_0) - \frac{2f_0'^2}{\pi^2} [y_0 (\log \varphi)^2 - y_0 \theta^2 + 2 \theta x_0 \log \varphi] \\ & + \frac{4f'_0 a_2}{\pi} x_0 y_0 + F_0 y_0 + I_2 + O(\varphi^3 \log \varphi) \end{aligned} \right. \\
 + \frac{a_0 m_0 \sin 2 kt}{2 e \operatorname{sh} m_0 h} & \left[ \frac{2f'_0}{\pi} (y_0 \log \varphi + \theta x_0 - y_0) + E_0 y_0 + J_2 + O(\varphi^3 \log \varphi) \right] - K_2
 \end{aligned}$$

Pour  $y_0 = 0 \theta = 0$ , on a  $Y_2 = 0$ , d'où  $I_2 = 0, K_2 = 0$ .

Pour  $x_0 = 0 \theta = \pi/2$ , on a  $X_2 = Y_1 f'_0 \sin^2 kt$ .

$$\begin{aligned}
 K_1 + \sin^2 kt & \left[ -f'_0 \left( \frac{f'_0}{\pi} + a_0 \right) y_0 + \frac{2f_0'^2}{\pi} y_0 \log |y_0| - \frac{2a_2 f'_0}{\pi} y_0^2 + I_1 \dots \right] \\
 - \frac{a_0 m_0}{2 e \operatorname{sh} m_0 h} \sin 2 kt & [-f'_0 y_0 + J_1 + \dots] = \sin^2 kt \left[ \frac{2f_0'^2}{\pi} y_0 \log |y_0| - \left( \frac{2f'_0}{\pi} + a_0 \right) y_0 + \dots \right]
 \end{aligned}$$

d'où :

$$I_1 = 0 \quad J_1 = 0 \quad K_1 = 0$$

On connaît donc le développement de  $X_2$  et  $Y_2$  au voisinage du pied du batteur.

**B) Étude du point situé au sommet du batteur**

On transporte à nouveau l'origine des axes au sommet du batteur. On déterminera, comme pour le point situé au pied du batteur, les singularités de la solution particulière du système ci-dessous en se limitant au cas du batteur plan :

$$\begin{aligned}
 & \left[ f(y_0) = 1 + \frac{\Delta e}{eh} y_0 \right] \\
 \frac{\partial X_2}{\partial x_0} + \frac{\partial Y_2}{\partial y_0} = \sin^2 kt & \left\{ \begin{aligned} & \frac{R^2}{g^2} [(\log \varphi)^2 + \theta^2] - \frac{2R}{g} \left( a_1 - \frac{R}{g} \right) \log \varphi + \frac{2Rk^2 f_h \theta}{g^2} \\ & + \frac{k^4 f_h^2}{g^2} + \left( a_1 - \frac{R}{g} \right)^2 + O[\varphi (\log \varphi)^2] \end{aligned} \right\} \\
 - \frac{a_0 m_0}{2 e \operatorname{sh} m_0 h} \sin 2 kt & \left\{ -\frac{2R}{g} \log \varphi + 2a_1 - \frac{2R}{g} + O[\varphi \log \varphi] \right\} + \frac{a_0^2 m_0^2 \cos^2 kt}{e^2 \operatorname{sh}^2 m_0 h} [1 + O(\varphi^2)] \\
 \frac{\partial X_2}{\partial y_0} - \frac{\partial Y_2}{\partial x_0} & = 0
 \end{aligned}$$

d'où la solution particulière :

$$\begin{aligned}
 X_2 = \sin^2 kt & \left\{ \begin{aligned} & \frac{R^2}{2g^2} [x_0 (\log \varphi)^2 - x_0 \log \varphi + x_0 \theta^2 - y_0 \theta] + \frac{R}{2g} \left( \frac{R}{g} - a_1 \right) (2x_0 \log \varphi - x_0) \\ & + \frac{Rk^2 f_h}{2g^2} (2\theta x_0 - y_0) + O[\varphi^2 (\log \varphi)^2] + \left[ \frac{k^4 f_h^2}{g^2} + \left( \frac{R}{g} - a_1 \right)^2 \right] x_0 \\ & + \frac{a_0 m_0}{2 e \operatorname{sh} m_0 h} \sin 2 kt \left\{ \frac{R}{2g} (2x_0 \log \varphi - x_0) + 2 \left( \frac{R}{g} - a_1 \right) x_0 + O(\varphi^2 \log \varphi) \right\} \\ & + \frac{a_0^2 m_0^2 \cos^2 kt}{e^2 \operatorname{sh}^2 m_0 h} [x_0 + O(\varphi^3)] \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$$Y'_2 = \sin^2 kt \left\{ \begin{aligned} & \frac{R^2}{2g^2} [y_0 (\log \varphi)^2 - y_0 \log \varphi + y_0 \theta^2 + x_0 \theta] + \frac{R}{2g} \left( \frac{R}{g} - a_1 \right) (2 y_0 \log \varphi - y_0) \\ & + \frac{Rk^2 f_h}{2g^2} (2 y_0 + x_0) + O[\varphi^2 (\log \varphi)^2] + \left[ \frac{k^4 f_h^2}{g^2} + \left( \frac{R}{g} - a_1 \right)^2 \right] y_0 \\ & + \frac{a_0 m_0 \sin 2kt}{2e \operatorname{sh} m_0 h} \left\{ \frac{R}{2g} (2 y_0 \log \varphi - y_0) + 2 \left( \frac{R}{g} - a_1 \right) y_0 + O(\varphi^2 \log \varphi) \right\} \\ & + \frac{a_0^2 m_0^2 \cos^2 kt}{e^2 \operatorname{sh}^2 m_0 h} [y_0 + O(\varphi^3)] \end{aligned} \right.$$

Lorsqu'on approche du sommet du batteur en suivant l'axe  $Ox_0$  (surface libre), la partie réelle de la fonction analytique  $F(z_0) = X''_2 - iY''_2$  vérifie la condition :

$$\begin{aligned} -k^2 X''_2 + g \frac{\partial X''_2}{\partial y_0} &= \left( k^2 X'_2 - g \frac{\partial X'_2}{\partial y_0} \right)_{y_0=0} + k^2 \left( X_1 \frac{\partial X_1}{\partial x_0} + Y_1 \frac{\partial Y_1}{\partial x_0} \right)_{y_0=0} \sin^2 kt + \frac{a_0 m_0 k^2}{2e^2 \operatorname{sh}^2 m_0 h} \sin 2 m_0 x_0 \cos^2 kt \\ &- \frac{a_0 m_0^2 g}{2e} \sin 2kt \left[ X_1 \cos m_0 x_0 + \frac{k^2}{m_0 g} Y_1 \sin m_0 x_0 \right]_{y_0=0} \\ &+ \frac{a_0 m_0 g}{2e} \sin 2kt \left[ -\frac{\partial X_1}{\partial x_0} \sin m_0 x_0 + \frac{k^2}{m_0 g} \frac{\partial Y_1}{\partial x_0} \cos m_0 x_0 \right]_{y_0=0} \end{aligned}$$

Lorsqu'on approche du point singulier en suivant l'axe  $oy_0$  (position de repos du batteur), on a au contraire :

$$\begin{aligned} -k^2 X''_2 + g \frac{\partial X''_2}{\partial y_0} &= \left( k^2 X'_2 - g \frac{\partial X'_2}{\partial y_0} \right)_{x_0=0} - \frac{a_0 \Delta e \sin 2kt}{e^2 h \operatorname{sh} m_0 h} [m_0 g \operatorname{ch} m_0 (y_0 + h) - k^2 \operatorname{sh} m_0 (y_0 + h)] \\ &+ \left[ -k^2 \frac{\Delta e}{he} Y_1 + g \frac{\Delta e}{he} \frac{\partial Y_1}{\partial y_0} \right]_{x_0=0} \sin^2 kt \end{aligned}$$

En remplaçant  $X'_2$ ,  $X_1$ ,  $Y_1$  par leurs développements limités, on peut expliciter ces deux conditions limites et déterminer les valeurs de  $-k^2 X''_2 + g (\partial X''_2 / \partial y_0)$  à l'origine.

On trouve ainsi :

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad -k^2 X''_2 + g \frac{\partial X''_2}{\partial y_0} &= \left\{ -\frac{k^2 R f_h}{g} \log |x_0| - k^2 \left[ \frac{3 R f_h}{2g} - a_1 f_h + \frac{b_0 k^2 f_h}{g} \right] \right\} \sin^2 kt \\ &+ \frac{a_0 f_h}{2eg} [k^4 - m_0^2 g^2] \sin 2kt + \{O[x_0 (\log x_0)^2]\} \sin^2 kt \\ &+ \{O[x_0 \log x_0]\} \sin^2 kt + \{O(x_0)\} \cos^2 kt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^\circ \quad -k^2 X''_2 + g \frac{\partial X''_2}{\partial y_0} &= \left\{ R f'_h \log |y_0| + \left( R f'_h + R \frac{k^2 f_h}{2g} - \frac{\pi R^2}{4g} - a_1 g f'_h + k^2 b_0 f'_h \right) \right\} \sin^2 kt \\ &+ \frac{a_0 f'_h}{2ek^2} [k^4 - m_0^2 g^2] \sin 2kt + \{O[y_0 \log y_0]^2\} \sin^2 kt \\ &+ \{O[y_0 \log y_0]\} \sin 2kt + O(y_0) \cos^2 kt \end{aligned}$$

Le sommet du batteur est ainsi un point critique de la fonction :

$$-k^2 F(z_0) + g i [dF(z_0)/dz_0].$$

Au voisinage de ce point, elle se comporte comme :

$$-iA [\log(z_0 e^{i\alpha})]^2 \sin^2 kt - iB \log(z_0 e^{i\beta}) \sin^2 kt - iC \log(z_0 e^{i\gamma}) \sin 2kt$$

où l'on a posé :

$$A = -\frac{R(k^2 f_h + g f'_h)}{g\pi} \quad z = \frac{\pi k^2 f_h}{2(k^2 f_h + g f'_h)}$$

$$\beta = \frac{f_h k^2 \pi [3R - 2a_1 g + 2k^2 b_0]}{(k^2 f_h + g f'_h)(4a_1 g + k^2 b_0 + 4R) + 4Rk^2 f_h - \pi R^2}$$

$$B = \frac{(k^2 f_h + g f'_h)(4a_1 g + k^2 b_0 + 4R) + 4Rk^2 f_h - \pi R^2}{2\pi g}$$

$$C = \frac{R a_0}{2 e g k^2} (k^4 - m_0^2 g^2) \quad \gamma = \frac{k^2 f_h}{R}$$

On a donc, en intégrant, et en développant  $e^{-(ik^2/g)z_0}$  :

$$F(z_0) = K(z_0) e^{-(ik^2/g)z_0}$$

$$gi \frac{dK}{dz_0} = e^{(ik^2/g)z_0} [ -iA (\log z_0 e^{i\alpha})^2 \sin^2 kt - iB (\log z_0 e^{i\beta}) \sin^2 kt - iC (\log z_0 e^{i\gamma}) \sin 2kt ] + \dots$$

$$F(z_0) = K - \frac{A}{g} \sin^2 kt \{ z_0 (\log z_0)^2 + 2(i\alpha - 1) z_0 \log z_0 + O[z_0^2 (\log z_0)^2] \}$$

$$- \frac{B}{g} \sin^2 kt [z_0 \log z_0 + O(z_0^2 \log z_0)] - \frac{C}{g} \sin 2kt [z_0 \log z_0 + O(z_0^2 \log z_0)]$$

d'où :

$$X''_2 = K_1 - \frac{A}{g} \sin^2 kt \left\{ x_0 [(\log \varphi)^2 - \theta^2] - 2y_0 \theta \log \varphi - 2(x_0 \log \varphi) - 2\alpha (y_0 \log \varphi + \theta x_0) \right\}$$

$$- \frac{B}{g} \sin^2 kt \left\{ x_0 \log \varphi - \theta y_0 \right\} - \frac{C}{g} \sin 2kt \left\{ x_0 \log \varphi - \theta y_0 \right\} + \dots$$

$$Y''_2 = K_2 - \frac{A}{g} \sin^2 kt \left\{ y_0 [(\log \varphi)^2 - \theta^2] + 2x_0 \theta \log \varphi + 2\alpha [x_0 \log \varphi - \theta y_0] - 2(y_0 \log \varphi + \theta x_0) \right\}$$

$$- \frac{B}{g} \sin^2 kt \left\{ y_0 \log \varphi + \theta x_0 \right\} - \frac{C}{g} \sin 2kt \left\{ y_0 \log \varphi + \theta x_0 \right\}$$

Les fonctions  $X''_2(y_0)$  et  $Y''_2(y_0)$  sont encore de carré intégrable sur l'intervalle  $0, h$ . Elles sont d'ailleurs finies et continues aussi bien au sommet qu'au pied du batteur.

#### BIBLIOGRAPHIE

- HAVELOCK. — *Philosophical Magazine*. Série 7, vol. 8, n° 51 (oct. 1929).
- BIESEL (F.). — *La Houille Blanche*, 1951, n° 2, p. 156 à 165; n° 4, p. 475 à 496 et mai-juin 1952, p. 372 à 375.
- KRAVCHENKO (J.). — *Coastal Engineering, 5<sup>e</sup> Conférence, Grenoble*, p. 50 à 61 et 189 à 207.
- MICHE (R.). — *Annales des Ponts et Chaussées*, 1944.
- CHABERT D'HIÈRES (G.). — *Extraits des comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 244, p. 2474-2476, 13 mai 1957.
- APTÉ (A.). — *Publications scientifiques du Ministère de l'Air*, n° 333.
- DAUBERT (A.). — Thèse de Doctorat de spécialité. Faculté des Sciences de Grenoble, juin 1958.
- KRAVCHENKO (J.) et SANTON (L.). — *Congrès A.I.R.H.*, juillet 1957, Lisbonne.
- SANTON (L.). — *Coastal Engineering, 5<sup>e</sup> Conférence, Grenoble*, p. 189 à 207.

## PLANCHE I

## CALCUL NUMÉRIQUE DE L'HARMONIQUE

On a posé :

$$B = \frac{k^2 h}{g} = m_0 h \operatorname{th} m_0 h$$

$$A_0 = \frac{a_0}{e} \quad A_p = \frac{a_p}{e} \quad M_r = \mu_r h \quad L_p = \lambda_p h \quad L_0 = m_0 h \quad L'_0 = m'_0 h$$

On a ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{A_0}{\operatorname{sh} L_0} &= \frac{2 \operatorname{sh} L_0}{L_0 + \operatorname{sh} L_0 \operatorname{ch} L_0} + \frac{2 \Delta e}{e} \frac{L_0 \operatorname{sh} L_0 - \operatorname{ch} L_0 + 1}{L_0 (L_0 + \operatorname{sh} L_0 \operatorname{ch} L_0)} \\ \frac{2 A_p}{\sin L_p} &= \frac{2 \sin L_p}{L_p + \sin L_p \cos L_p} + \frac{2 \Delta e}{e} \frac{L_p \sin L_p + \cos L_p - 1}{L_p (L_p + \sin L_p \cos L_p)} \\ \frac{hc'_r}{e^2} &= \frac{2}{\pi(1+r)} \left\{ \begin{aligned} &+ \frac{\Delta e}{e} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{A_p L_p}{(M_r^2 - L_p^2) \sin L_p} [(-1)^r \cos L_p + 1] \\ &+ (-1)^r \frac{A_0 L_0}{B} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{A_p (B^2 - L_p^2) (L_0^2 + L_p^2 + M_r^2)}{(L_0^2 - L_p^2 + M_r^2)^2 + 4 L_0^2 L_p^2} \\ &- \frac{(-1)^r}{B} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} A_p A_q (L_p + L_q) \frac{M_r^2 (B^2 - L_p L_q) - (L_p - L_q)^2 (B^2 + L_p L_q)}{(L_p^2 + L_q^2 - M_r^2)^2 - 4 L_p^2 L_q^2} \end{aligned} \right. \\ \frac{ha'_0}{e^2} &= \frac{\operatorname{sh}^2 L'_0}{L'_0 + \operatorname{sh} L'_0 \operatorname{ch} L'_0} \left\{ \begin{aligned} &- \frac{\Delta e}{e} \frac{A_0 L_0 L'_0}{L_0^2 - L'^0_0} \left[ L'_0 \frac{4 B^2 - L_0^2}{4 B^2 L_0} + \frac{1}{\operatorname{sh} L_0 \operatorname{sh} L'_0} \right] \\ &+ \frac{A_0^2 L_0}{4 \operatorname{sh}^2 L_0} \frac{8 L_0^2 + L'^0_0{}^2}{4 L_0^2 - L'^0_0{}^2} \\ &- \frac{A_0^2 L'^0_0{}^2}{2 B^2} \sum_{p=1}^{\infty} A_p L_p \frac{9 L_0^2 (B^2 + L_p^2) + (L_p^2 + L'^0_0{}^2) (B^2 - L_0^2) - L_0^2 (L_0^2 + L_p^2)}{(L_0^2 - L_p^2 - L'^0_0{}^2)^2 + 4 L_0^2 L_p^2} \end{aligned} \right. \\ \frac{hb'_0}{e^2} &= \frac{\operatorname{sh}^2 L'_0}{L'_0 + \operatorname{sh} L'_0 \operatorname{ch} L'_0} \left\{ \begin{aligned} &\frac{2 \Delta e}{e} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{A_p L_p L'_0}{L_p^2 - L'^0_0{}^2} \left[ L'_0 \frac{4 B^2 - L_p^2}{4 B^2 L_p} + \frac{1}{\operatorname{sh} L'_0 \operatorname{sh} L_p} \right] \\ &- \sum_{p=1}^{\infty} \frac{A_p^2 L_p}{\sin^2 L_p} \frac{8 L_p^2 - L'^0_0{}^2}{4 L_p^2 + L'^0_0{}^2} \\ &+ \frac{A_0 L_0 L'^0_0{}^2}{2 B^2} \sum_{p=1}^{\infty} A_p \frac{9 L_p^2 (B^2 - L_0^2) + (L_0^2 - L'^0_0{}^2) (B^2 + L_p^2) + L_p^2 (L_0^2 + L_p^2)}{(L_0^2 - L_p^2 - L'^0_0{}^2)^2 + 4 L_0^2 L_p^2} \\ &- \frac{L'^0_0{}^2}{B^2} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} A_p A_q (L_p + L_q) \times \\ &\quad \times \frac{2 L_p L_q [B^2 + (L_p + L_q)^2] - (B^2 + L_p L_q) [(L_p - L_q)^2 + L'^0_0{}^2]}{(L_p^2 + L_q^2 + L'^0_0{}^2)^2 - 4 L_p^2 L_q^2} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

On peut calculer également :

$$\frac{T^2 a'_0 g}{a_0^2} = \left( \frac{ha'_0}{e^2} \right) \times \frac{4 \pi^2}{BA_0^2} \quad \frac{T^2 b'_0 g}{a_0^2} = \left( \frac{hb'_0}{e^2} \right) \times \frac{4 \pi^2}{BA_0^2}$$

ou encore :

$$\frac{T^2 a'_0 g}{e^2} = \left( \frac{h'a_0}{e^2} \right) \times \frac{4 \pi^2}{B} \quad \frac{T^2 b'_0 g}{e^2} = \left( \frac{hb'_0}{e^2} \right) \times \frac{4 \pi^2}{B}$$

PLANCHE II

ABAQUES DE L'HARMONIQUE ÉMIS PAR UN BATTEUR-PISTON  
(Théorie au 2<sup>e</sup> ordre)

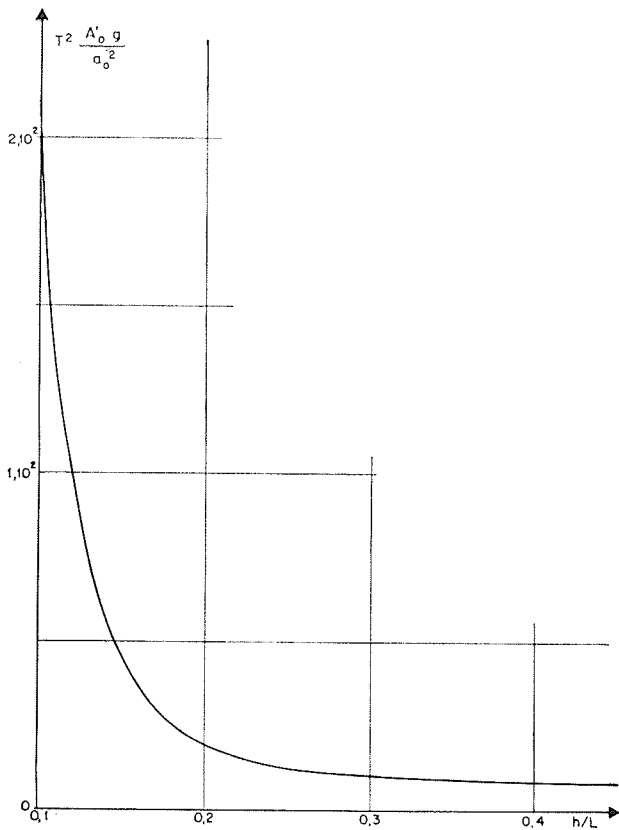


FIG. 14

Abaque donnant la demi-amplitude de l'harmonique linéaire

$$\frac{T^2 A'_0 g}{a_0^2} = \frac{T^2 \sqrt{a_0'^2 + b_0'^2} g}{a_0^2}$$

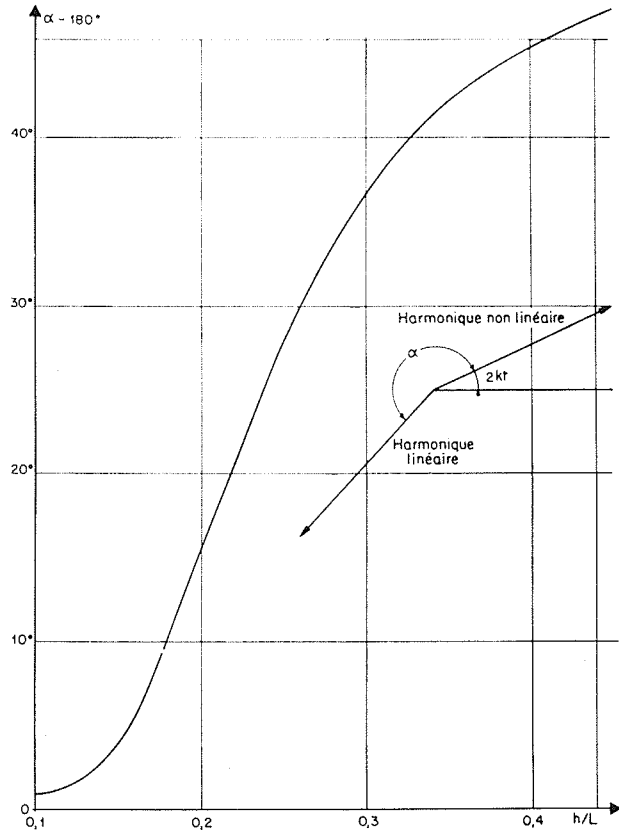


FIG. 15

Abaque donnant la phase de l'harmonique linéaire

$$\alpha - 180^\circ = \text{arc tg } (b'_0/a'_0)$$