QUELQUES ASPECTS DE L'EMPLOI DES MODÈLES MATHÉMATIQUES FLUVIAUX

PAR J. MÉGARD * ET P. BERTHIER **

Depuis plusieurs décennies, les modèles réduits hydrauliques sont d'un emploi classique et constituent un indispensable instrument d'étude. Depuis quelques années seulement, le développement des grandes machines à calculer électroniques a permis d'aborder de nouveaux problèmes hydrauliques par des méthodes numériques.

La représentation en éléments numériques d'une réalité hydraulique nécessite forcément une schématisation, mais celle-ci n'est pas vraiment abstraite; elle a pour base des valeurs physiques telles que des surfaces de casiers inondables ou des coefficients de rugosité. L'ensemble a un sens physique assez direct pour être considéré autrement que comme des données complexes d'un calcul, et pour mériter le nom de modèle mathématique.

Les modèles mathématiques deviennent d'un usage habituel pour certaines études hydrauliques comme la propagation des marées, l'évolution des nappes phréatiques, la propagation dans un fleuve ou une plaine fluviale d'écoulements non permanents, crues ou intumescences. Ils s'appuient sur les travaux et les études des théoriciens et ingénieurs de tous pays [1 à 8], ainsi que sur l'expérience acquise dans les laboratoires spécialisés.

On peut dire maintenant que cette deuxième technique des modèles a atteint le stade de l'application efficace. Ce sont divers aspects de cet emploi que nous allons développer en nous limitant au modèle mathématique fluvial.

* Ingénieur E.I.H. (SO.GR.E.A.H.).
** Docteur ès Sciences (SO.GR.E.A.H.).

Equations de base

Les équations qui sont à la base d'un modèle mathématique fluvial se présentent sous des formes différentes suivant le schéma hydraulique adopté et l'importance des divers termes, qui peuvent être négligeables ou non. Mais dans tous les cas, on retrouve à la base du calcul, deux équations :

— l'équation de continuité,
— l'équation dynamique.

EQUATION DE CONTINUITÉ :

L'équation de continuité exprime la conservation du volume de l'eau. Si par exemple, le schéma hydraulique admis consiste à découper une plaine d'inondation en casiers caractérisés par leur niveau moyen et des débits d'échange avec les casiers voisins, l'équation de continuité s'écrit :

$$\left(\begin{array}{c}\text{somme}\\\text{des}\\\text{débits}\\\text{entrant}\end{array}\right) - \left(\begin{array}{c}\text{somme}\\\text{des}\\\text{débits}\\\text{sortant}\end{array}\right) \cdot \Delta t = \mathrm{S}\Delta z,$$

ou encore :

$$\Sigma\overline{\mathrm{Q}} = \mathrm{S}\ \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

Δz étant la variation de niveau qui se produira dans le casier de surface S (z) pendant l'intervalle de temps Δt.

Si au contraire le schéma choisi assimile le fleuve

à un lit unique de section progressivement variable, l'équation de continuité peut s'écrire sous la forme différentielle établie par Saint-Venant :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial t} = 0,$$

b étant la largeur en surface.

EQUATION DYNAMIQUE DES POINTS COURANTS :

L'équation dynamique exprime l'équilibre entre les forces de pesanteur, de frottement et d'inertie qui agissent sur l'eau.

Par exemple, dans le schéma bidimensionnel de plaine inondée, il est fréquent que les forces d'inertie soient négligeables et l'équation dynamique peut se ramener à une loi d'écoulement du type suivant :

$$Q = D\sqrt{i} \qquad \text{ou} \qquad Q = K\sqrt{\Delta z},$$

Q : débit d'échange entre deux casiers voisins;
i ou z : pente ou dénivellation entre ces casiers;
D : débitance;
K : coefficient d'écoulement variant avec la hauteur et déduit de formules de rugosité comme la formule de Chézy ou celle de Strickler et pouvant également intégrer des pertes de charge de forme.

Enfin, s'il s'agit d'un canal où l'on veut tenir compte des termes d'inertie, l'équation dynamique prend la forme plus complète établie par Saint-Venant :

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{Q^2}{D^2} = \frac{-\partial}{x}\left(\frac{V^2}{2g}\right) - \frac{1}{g}\frac{\partial V}{\partial t}$$

EQUATION DYNAMIQUE DE POINT SPÉCIAUX :

Les lois d'écoulement peuvent parfois prendre des formes particulières ne relevant pas des formules de rugosité, mais il est possible de les introduire dans le calcul. Citons comme exemples le déversement sur un seuil fixe et le fonctionnement d'un barrage à vannes.

Pour le seuil fixe, l'équation dynamique se présente sous deux formes :

— soit une loi de déversement :

$$Q = f\,(Z \text{ amont})$$

la fonction f (z) étant calculée à l'avance par une formule classique de déversoir,

— soit une loi de seuil noyé équivalent à une perte de charge et se ramenant à la forme :

$$Q = K\sqrt{\Delta z}$$

Dans le programme, un test permet de définir à chaque instant du calcul laquelle des deux lois doit s'appliquer, suivant la valeur relative des niveaux amont et aval.

Pour le barrage, l'équation dynamique peut aussi prendre deux formes :

— Tant que les vannes ne sont pas entièrement ouvertes, l'équation dynamique prend la forme d'une consigne d'exploitation qui peut soit lier la cote de la retenue au débit, soit établir une relation plus complexe entre des grandeurs telles la vitesse de croissance du débit et le niveau de points éloignés, soit même imposer simplement un niveau en fonction du temps;

— lorsque le barrage est entièrement ouvert, on retrouve des formules analogues à celle du seuil fixe. Le programme comprend donc un certain nombre de tests qui déterminent à chaque instant la loi qui doit s'appliquer.

CONDITIONS AUX LIMITES :

Les équations précédentes régissent l'intérieur du modèle, mais celui-ci n'est complet que si les conditions aux limites sont définies. A la limite aval, cette condition sera soit une relation entre le niveau et le débit (loi hauteur-débit) soit un niveau fixé à l'avance en fonction du temps (marée). A la limite amont, les conditions imposées peuvent être soit le débit en fonction du temps, soit le niveau en fonction du temps. C'est cette condition amont qui engendre la crue calculée sur le reste du modèle.

Les quelques formes d'équations que nous avons données ne sont d'ailleurs pas limitatives et peuvent tenir compte, d'une façon générale, de tout ce qu'on sait exprimer par une relation numérique.

Méthodes numériques

Pour résoudre ces deux équations aux dérivés partielles, fonction de l'espace et du temps, aucune solution analytique directe n'existe dans le cas général. Pour les traiter, il faut recourir à la méthode des caractéristiques ou directement à des méthodes aux différences finies de type explicite ou implicite. On peut trouver dans les articles [6 et 7], les bases théoriques et les aspects mathématiques de l'application de ces dernières méthodes.

Pour les machines à calculer, il s'agit de la catégorie des problèmes résolus « pas à pas » grâce à une discrétisation; les questions habituelles de précision et de convergence, soulevées par les approximations et les découpages adoptés, se posent donc pour chaque problème. Si l'essentiel est maintenant discerné et résolu, il n'en reste pas moins que les questions pratiques d'imbrication avec les conditions réelles hydrauliques ne permettent absolument pas de confier cette technique aux seuls spécialistes des machines à calculer.

Les méthodes de traitement conduisent à une discrétisation de l'espace et du temps, c'est-à-dire à un découpage en pas de temps élémentaires et en pas d'espace le long du fleuve. Cette discrétisation nécessite un choix : elle ne doit pas être trop fine pour ne pas entraîner des temps prohibitifs tant pour les calculs sur les machines que pour la préparation des données; elle doit être suffisante pour assurer la sécurité et la valeur des résultats.

Il n'est pas possible *a priori* de donner des indications précises et générales à ce sujet. En exemple, de bons résultats ont été obtenus pour un tronçon de fleuve de 100 km, de pente et de débit moyens, en utilisant quarante points distants de 2 à 3 km. En chacun de ces points sont calculés niveau et débit, ce qui définit bien l'écoulement.

Dans un autre modèle du même type unidimensionnel, il a été nécessaire d'utiliser des points de calcul deux fois plus rapprochés pour arriver à la précision cherchée.

La discrétisation dans le temps conduit également à un choix du pas de temps élémentaire. Ce choix de la valeur Δt dépend des caractéristiques du fleuve et de la rapidité de l'intumescence. Cette valeur varie d'ailleurs pour suivre la forme de l'intumescence. Dans le premier exemple cité plus haut, la valeur de Δt variait de 10 mn à 2 h, pour une crue qui durait deux semaines. Ainsi, la méthode « pas à pas » permet de connaître, en une série de points judicieusement choisis le long du fleuve, l'état de l'écoulement, niveau et débit, à chaque instant $t + \Delta t$ à partir de l'instant t précédemment calculé. Pour effectuer les calculs correspondant à une crue de quelques jours dans un fleuve, il faut plusieurs millions d'opérations arithmétiques et de tests logiques, ce qui est réalisé par un programme d'enchaînement convenablement adapté à la machine à calculer. Dans l'état actuel du marché, où le prix des machines varie grossièrement comme la racine carrée de leur vitesse, et pour de multiples autres raisons de facilité d'emploi, il convient d'utiliser de très puissants ordinateurs.

Données nécessaires à une étude

Le modèle mathématique ne peut traiter que les données qu'on lui aura fournies. La méthode de traitement peut intervenir pour utiliser les données avec plus ou moins d'efficacité, mais il est bien évident que la valeur d'un modèle dépend de celle des données, tant topographiques qu'hydrauliques.

Les données topographiques concernent le lit et les champs d'inondation. Ceux-ci peuvent être définis soit par des courbes de niveau, tous les mètres par exemple, soit par des profils en travers de la vallée. Un intervalle de 2 km est un ordre de grandeur; on peut se contenter d'intervalles plus grands si la plaine est très régulière ou si on n'a pas besoin d'une grande finesse topographique. Outre ces profils généraux, il faut connaître des accidents de terrain importants tels que les digues ou routes en remblai qui peuvent contrôler l'écoulement.

Le lit mineur est en général défini par des sections transversales. L'intervalle nécessaire peut varier de quelques centaines de mètres à plusieurs kilomètres, suivant la régularité du lit, et suivant qu'on désire un support topographique très précis pour calculer des lignes d'eau, ou qu'on désire simplement l'allure générale des sections, dont on règlera l'écoulement à partir des lignes d'eau observées.

Après une très bonne définition topographique, et des observations sur la nature du terrain et de la végétation, on pourrait faire directement un modèle, en attribuant un coefficient de rugosité à chaque partie du lit et du terrain. Les crues calculées auraient la même précision que bien des calculs classiques de lignes d'eau basés sur l'estimation des mêmes coefficients de rugosité. Toutefois, on sait que le choix de ces coefficients est souvent délicat, même pour des hydrauliciens expérimentés; aussi est-il utile d'avoir des données hydrauliques pour mieux choisir les coefficients par comparaison avec des écoulements observés.

Les données hydrauliques peuvent se présenter sous des formes variées que le modèle est mieux capable d'utiliser que les méthodes classiques. Dans des cas favorables, on connaît des lignes d'eau de régime permanent du moins jusqu'au débit moyen. En général, on a plus facilement des enregistrements du niveau des crues en fonction du temps en quelques stations réparties sur le fleuve, et l'enveloppe de la crue tout le long du fleuve, c'est-à-dire la ligne des niveaux maximaux. En outre, il est nécessaire de pouvoir évaluer la valeur absolue du débit dans une section ainsi que sur les affluents.

Si on dispose d'observations incomplètes sur des crues exceptionnelles anciennes, de nouvelles observations complètes sur des crues moyennes permettent de valoriser les précédentes et d'avoir un excellent réglage du modèle pour toutes les crues. Mais même lorsqu'on n'a observé que des inondations moyennes, l'extrapolation, basée sur des coefficients et des lois physiques, est assez sûre.

Si on a, par les données, une bonne connaissance hydraulique des écoulements, on peut se contenter d'un support topographique moins fin. Mais celui-ci reste indispensable pour apporter une base physique à l'extrapolation des lois d'écoulement ainsi qu'à l'étude d'aménagements comprenant une modification de cette topographie, et de toute façon, c'est l'accumulation dans les champs d'innondation qui est déterminante pour retarder et amortir les crues.

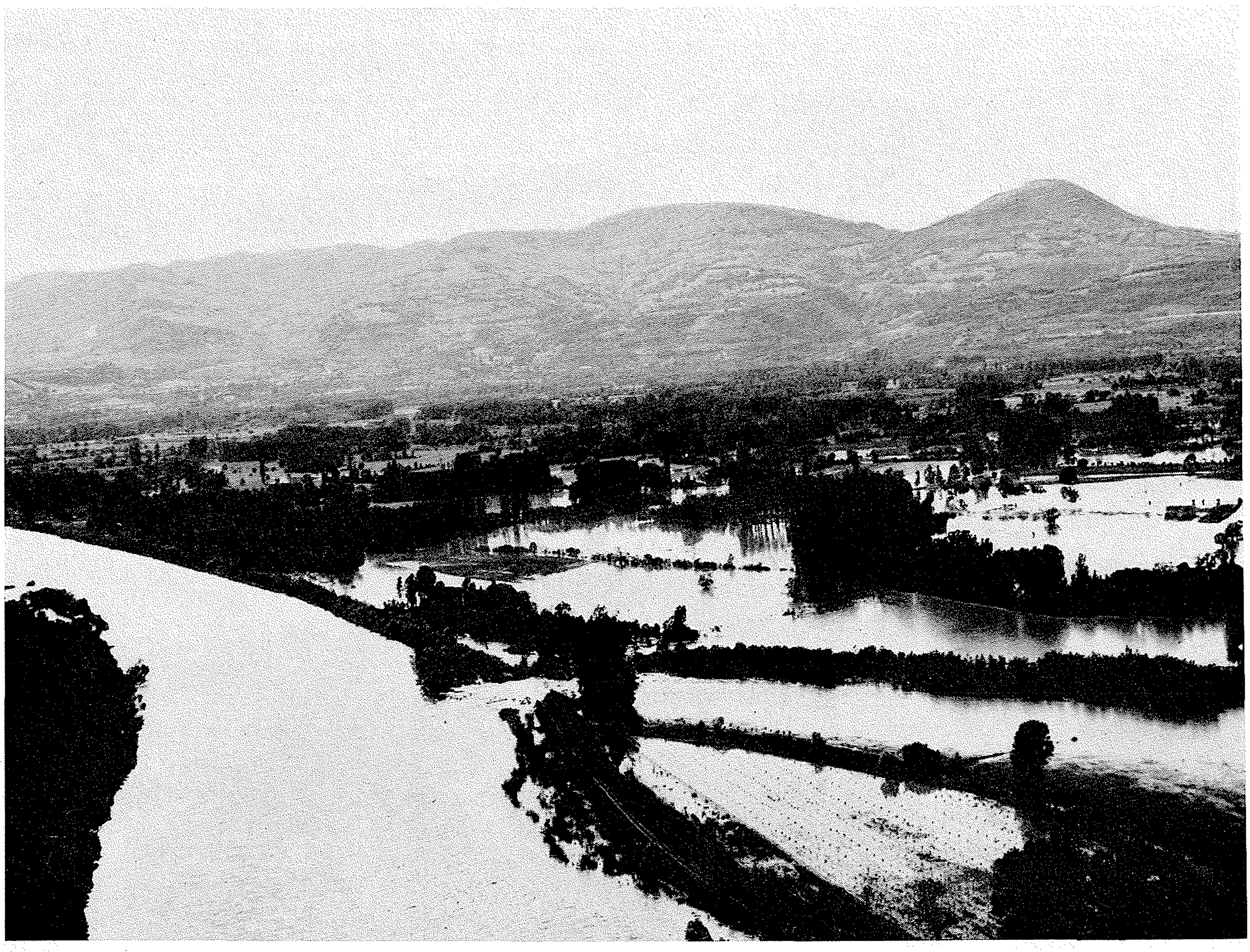
Réalisation d'un modèle mathématique

Après la phase préparatoire de recueil des données, qui peut être plus longue que le reste de l'étude, on peut distinguer la construction proprement dite et le réglage du modèle mathématique.

CONSTRUCTION :

La construction d'un modèle commence par une étude sur plans. Elle peut se réduire à presque rien s'il s'agit d'un canal régulier, mais souvent elle est importante et compliquée.

Il s'agit d'examiner l'ensemble des données, de choisir un schéma topographique et hydraulique consistant par exemple à découper le lit mineur en tronçons homogènes dont la longueur s'accorde avec la précision qu'on désire pour le calcul et tienne compte de l'emplacement des affluents, des ouvrages et des limnigraphes dont on veut représenter le niveau. Pour les champs d'inondation, l'étude pré-



liminaire doit décider si on peut les représenter par des poches en équilibre avec le lit principal suivant un schéma général unidimensionnel, ou s'il faut un schéma bidimensionnel découpant les champs d'inondation en casiers, choisis pour donner une représentation suffisante sans complication excessive, et dont les limites tiennent compte des accidents caractéristiques du terrain (remblais, digues).

Une fois fixé ce schéma général, il faut traduire les données en valeurs numériques. On définit par exemple, la section moyenne de chaque tronçon fluvial, et on lui attribue des coefficients de rugosité. Pour les champs d'inondation, on détermine la surface de chaque casier en fonction de sa cote moyenne, à partir de profils en travers ou en planimétrant un plan à courbes de niveau, ou en se guidant sur des limites d'inondation observées pour des plans d'eau connus. On définit aussi les éléments caractéristiques des écoulements entre les casiers. Dans le cas d'écoulements continus, on donne les sections d'échange et leurs coefficients de rugosité. S'il y a des seuils ou remblais, on peut les schématiser par des profils déversants. Il arrive souvent que l'examen des niveaux d'eau enregistrés au cours d'une crue mette en évidence des détails topographiques, comme la cote de seuils naturels, mal définis par la topographie générale.

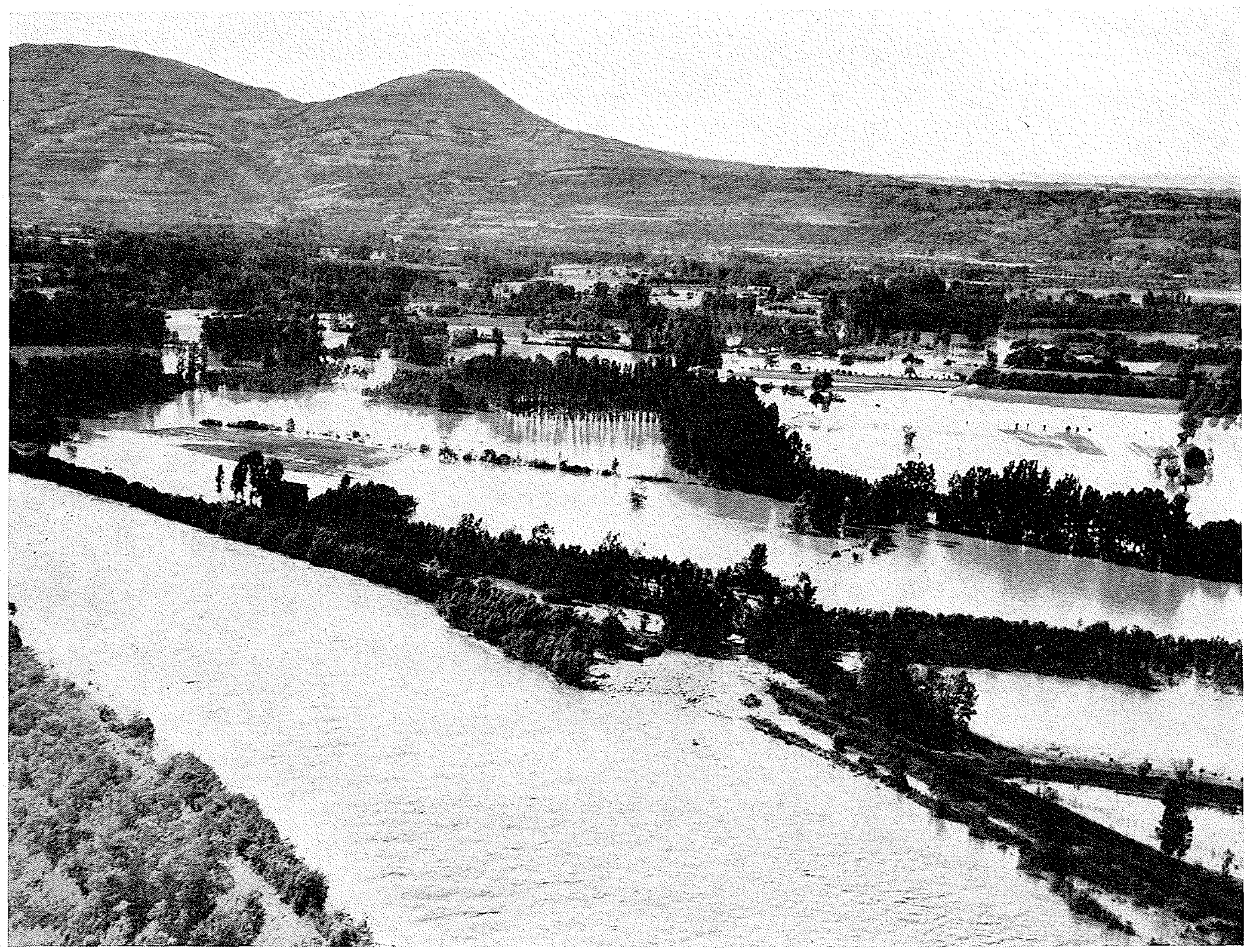
Parallèlement à l'étude précédente, une autre équipe a la charge d'écrire ou d'adapter un programme de calcul, conforme au schéma général et contenant par sous-programmes toutes les lois hydrauliques nécessaires pour représenter les points singuliers : barrages, déversoirs, champs d'inondation. En outre, un programme préparatoire a pour rôle de recevoir sous une forme commode les éléments résultant de l'étude sur plans (par exemple largeur du lit et coefficients de Strickler) et de les transformer en données plus élaborées (par exemple sections mouillées et débitances) présentées directement en cartes perforées suivant le format exigé par le programme général.

L'ensemble du programme de calcul et des données élaborées constitue le modèle mathématique.

Réglage :

Le modèle « brut de construction » a parfois une bonne valeur hydraulique, lorsqu'on a été capable de définir avec précision les bases des lois d'écoulement, en particulier les rugosités. En général, on arrive à une qualité supérieure en réglant le modèle sur des écoulements observés.

Le réglage consiste à ajuster les coefficients de rugosité pour reproduire au mieux les crues ou les régimes permanents connus. Ce réglage ne se fait



pas arbitrairement et on ne se contente pas d'obtenir artificiellement une bonne concordance des points comparatifs. Au contraire, il se fait en tenant compte de la nature physique du terrain; il peut même arriver qu'on détecte par ce procédé des anomalies dans les données, ou qu'on soit amené à compléter la topographie pour vérifier des points particuliers.

Exploitation d'un modèle

Une fois le modèle réglé, son exploitation peut se présenter sous des aspects très variés.

Le mode d'exploitation le plus simple consiste à effectuer des calculs des crues sans modifier le modèle. Pour chaque crue, il faut une certaine préparation manuelle pour transformer les graphiques, ou autres données définissant la crue, en un paquet de cartes perforées compatibles avec le programme de calcul. Le calcul lui-même s'exécute très vite et des séries de résultats peuvent être obtenues avec une rapidité spectaculaire. Les résultats se présentent en premier stade sous forme de tableaux de chiffres assez compacts, mais la présentation en graphiques des points principaux est facilitée par des programmes auxiliaires traçant directement des courbes par points.

De tels calculs de crues peuvent être faits en vue d'une étude systématique de la propagation et de l'amortissement des crues dans un fleuve ou de la combinaison des crues de ses affluents. Ils peuvent servir pour calculer les crues qui pourraient se former à partir d'apports exceptionnels aux affluents qu'une étude hydrologique aurait montrés possibles. Ils peuvent aussi servir de base à un système d'annonce des crues à partir de celles qu'on observe sur les affluents, ou même de celles qu'on peut prévoir d'après les pluies observées sur le bassin versant.

Outre cet aspect hydrologique, le modèle peut servir à des études fluviales diverses :

— études d'ondes dans les canaux;
— étude de l'influence de la manœuvre de barrages sur les crues et recherche des consignes les plus favorables;
— étude du transit du débit dans une chaîne d'aménagements hydroélectriques séparés par des secteurs ou retenues à caractère fluvial et recherche des possibilités de faire des pointes de puissance;
— étude des possibilités de navigation en étiage grâce à des lâchers d'eau temporaires pouvant coïncider avec les périodes utiles pour l'énergie.

Le modèle mathématique peut aussi servir à des études d'ensemble d'aménagements fluviaux et sa souplesse est très intéressante car il est rigoureusement fidèle; il n'est pas limité par l'étendue de la réalité, et on peut en faire autant de copies qu'on veut et les modifier pour avoir simultanément les diverses variantes à comparer. S'il s'agit d'endiguements, par exemple, la comparaison des projets peut concerner non seulement leur effet sur les lignes d'eau pour un débit donné, mais aussi leur effet sur l'amortissement des crues par suite de la réduction des champs d'inondation, et la modification du temps de propagation des crues qui en résulte et qui modifie le mode de combinaison des affluents. Des régularisations ou des creusements généralisés posent le même genre de problèmes, car ils modifient la relation entre les inondations et le débit. Dans le cas d'un aménagement complet pour la protection d'une vallée contre les crues, le projet peut par exemple comporter à la fois un barrage d'amortissement sur un affluent, la régularisation du lit d'un autre pour accélérer ses crues et mieux les dissocier du premier et l'étude du débit et de l'aménagement du lit sur le fleuve principal. La souplesse du modèle est alors un atout fondamental pour comparer les projets.

En résumé, le modèle mathématique fluvial est un nouvel instrument d'étude particulièrement adapté aux grandes études d'ensemble, et dont les possibilités complètent de façon heureuse celles du modèle réduit. Malgré sa complexité pratique, il est basé sur des lois physiques claires et ajustables à volonté et, pour un maître d'œuvre, il n'est pas plus difficile à diriger qu'un modèle physique.

Références

[1] MASSAU (J.). — Mémoire sur l'intégration graphique des équations aux dérivées partielles. *Annales des Ingénieurs sortis de Gand,* tome XII, 1889.

[2] FAVRE (H.). — Etude théorique et expérimentale des ondes de translation dans les canaux découverts. *Dunod,* Paris, 1935.

[3] CRAYA (A.). — Calcul graphique des régimes variables dans les canaux. *La Houille Blanche,* 1946.

[4] ISAACSON (E.), STOKER (J. J.) et TROESCH (A.). — Numerical Solution of Flood Prediction and River Regulation Problems. *New York University Institute for Mathematics and Mechanics.* Reports I, II, III, 1953-1956.

[5] STOKER (J. J.). — Water Waves. *Interscience Publishers,* New York, 1957.

[6] PREISSMANN (A.). — Propagation des intumescences dans les canaux et des rivières. *1er Congrès de l'Association Française de Calcul,* Grenoble, 1961.

[7] PREISSMANN (A.) et CUNGE (J. A.). — Calcul des intumescences sur machines électroniques. *IXe Congrès de l'A.I.R.H. (IX Congress of the A.I.R.H.)* Dubrovnik, 1961.

[8] CUNGE (J. A.) et BERTHIER (P.). — Digital Computers and Hydro-Electric Design Problems. *Water Power,* novembre-décembre 1962.

Les photographies illustrant cet article représentent les inondations de la vallée de l'Isère en aval de Grenoble, en 1948; elles nous ont été communiquées par le Service des Ponts et Chaussées du département de l'Isère.

Abstract

Some aspects of the use of mathematical river models

by J. Mégard * and P. Berthier *

Basic equations:

A mathematical river model relies on two equations with a very simple physical meaning. These are :
(i) The continuity equation expressing conservation of the volume of water;
(ii) The dynamic equation expressing equilibrium of gravity, friction and inertia forces.
These equations take different spécial forms for dams, weirs, or set boundary conditions.

* Engineers at the SO.GR.E.A.H.

Numerical methods:

As there is generally no analytical solution available for equations defining flow, one has to rely on finite difference procedure. Computers are particularly well suited for such methods.

Data required and the construction of a model:

As for any other model, the value of a mathematical model depends on that of its topographical and hydraulic data. The latter data can be adjusted under unsteady flow conditions on the strengh of observed floods, which is a great advantage. The comparison phase between model and real life conditions frequently amounts to a comprehensive analysis method for the hydraulic behaviour of the considered river.

Applications:

Mathematical river models are eminently suitable for overall river basin problems, such as the following :
Natural flood formation and propagation from tributary flows;
Modifications expected by dyking or other large-scale correction works;
Study of flow conditions due to control operations at dams.

A particular advantage of the method is the ease with which it enables several alternative versions of a project to be studied with a view to comparing their respective effects.